DIATRIBE
DE RATIONIIS IN LUDO ALEA

AS REPRODUCED BY JUAN CARAMUEL
MATHESIS BICEPS: KYBEIA

Num. LXXX.

Et si lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum, quam perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut, siquis primo jactu una tessera senarium jacere contendat, incertum quidem, an vincet; at quanto verisimilius sit eum perdere, quam vincere, reipsa definitum est, calculo'que subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hac ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verum quanti exspectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quanto major portio ejus quod depositum est mihi, quam adversario meo tribuenda esset: vel etiam, siquis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumerræ questiones exoriri possunt inter duos, tres, pluresve collusores. Cumque minime vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hic, qua ratione, aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam, sive tesseras proprie pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse, cujusque sortem, seu exspectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive exspectationem pervenire, æqua conditione certans. Ut, exempli gratia, siquis me inscio altera manu 3 solides occultet, altera 7 solidos, mihique optionem det ex utra manu solidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuo eo pervenire possum, ut æquam exspectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: id'que æquo lusu contendens.

PROPOSITIO I.

Si a vel b exspectem, quorum utrum vis æque facile mihi obtingere possit, exspectatio mea dicenda est valere $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non solum demonstrandum, verum etiam primitus eruendam posito x pro eo, quod æquivalet exspectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æqua conditione certantem. Ponantur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hac conditione, ut quisque deponat x, ac ut victor victo traditurus sit a. Hic autem lusus justus est, & patet me hac ratione æquam habere sortem ad obtinendum a, si lusum perdam scilicet; aut $2x - a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id, nempe quod depositum est, de que alteri erogandum est a. Quod si autem $2x - a$ tantundem valeret, atque b, æqua mihi sors obtingeret ad a, quam ad b. Pono itaque $2x - a \propto b$,& fit $x \propto \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ exspectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hac conditione, ut vincens victo sit traditurus a. Qua ratione similis exspectatio mihi obtinget ad obtinendum a, si perdam, aut ad obtinendum b, si vincam; tum enim obtineo $a + b$, id nempe quod depositum est, alteri'que inde concedo a.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua sors mihi obtingat, tum exspectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem exspectationem pervenire posse. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hac conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus

3: erit hic lusus omnino justus, & patet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam; aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

PROPOSITIO II.

Si a, b, vel c exspectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, exspectatio mea æstimanda est $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rursus inveniendum, ponantur, ut ante, x pro valere exspectationis meæ. Opertet ergo me, cum x habeo, ad eandem exspectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hac conditione, ut quisque nostrum trium deponat x, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus b, & ego ipsi traditurus sim b, si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc meam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus sit c, aut ego ipsi sim daturus c, si ego vincam. Et patet hanc ludum justum esse. Æquam autem hac ratione sortem habebo ad obtinendum b, si nimirum, primus vincat, aut c, Si secundus vincat, aut etiam $3x - b - c$, si ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depositum est, de quo uni concedo b, & alteri c. Quodsi $3x - b - c$ æquale fuerit ipsi a, eadem mihi obtingeret exspectatio ad obtinendum a, quæ ad b, aut ad c. Pono itaque $3x-b-c \propto a$, & fit $x \propto \frac{a+b+c}{3}$, pro valere meæ exspectationis. Eodem modo invenitur, si ad a, b, c, aut d æqua sors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porro.

PROPOSITIO III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a, sit p, numerus autem casuum, quibus mihi eveniet b sit q, sumendo omnes casus æque in proclivi esse: exspectatio mea valebit $\frac{pa+pq}{p+q}$.

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus x pro valore exspectationis meæ: ergo oportet me, cum x habeo, ad eandem exspectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot collusores sumam, ut una mecum numerum ipsius $p+q$ efficiant, quorum deponat quisque x, ita, ut depositum sit $px + qx$, & quisque sibi ludat æqua exspectatione ad vincendum. Porro, cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus q, sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum, qui vincat mihi, sit daturus b, aut ego contra ipsi idem b, si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p-1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus a, & ego tantundem (a scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hac conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q exspectationes habere ad b, & $p-1$ exspectationes ad a, & 1 exspectationem (me, nempe, vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$, tunc enim obtineo $px+qx$, id, quod depositum est, de quo tradere debeo b unicuique q lusorum, & a unicuique $p-1$ lusorum, quæ simul conficiunt $ab+pa-a$. Si itaque $qx+bx-bq-ap+a$ æquale esset ipsi a, haberem p exspectationes ad a, (quandoquidem jam $p-1$ exspectationes ad id habebam) & q exspectationes ad b, & sic ad priorem meam exspectationem rursus pervenissem. Quo circa porro $px+qx-bq-ap+a \propto a$; & fit $x \propto \frac{ap+bq}{p+q}$ pro valore exspectationis meæ, omnino, ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi exspectationes forent ad 13, & 2 exspectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem, ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem exspectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum, qui vincat, mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere exspectationes ad 8, nimirum, si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 exspectationes ad 13, nimirum, si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut, si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo, 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita, ut & mihi relinquatur 13.

PROPOSITIO IV.

Ut igitur ad primo propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opus est, ut a facilioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut, qui prius ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum vero semel. Scire cupio, si lusum prosequi non velimus, sed pecuniam, de qua certamus, prout æquum est, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primo, considerare oportet lusus, qui utrobique deficiunt. Certum enim est, si inter nos convenerit, verbi gratia, ut, quod depositum est, lucretur is, qui prius vigesies vicerit, & ego decies, & novies vicero, at alter decies, & octies, tanto meliorem fore eo casu sortem meam, quanto hic melior est, ubi a tribus lusibus binos consequutus sum, ille vero unum duntaxat: quia, nimirum, utrobique mihi unus tantummodo lusus, sed ipsi duo deficiunt.

Porro, ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum est, quid fieret, si in lusu pergeremus. Certum enim est, si primum ludum vincerem, me præscriptum numerum impleturum, & omne depositum consecuturum, id, quod vocetur a. Quod, si autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque sors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeo'que cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifestum autem est me æquam habere sortem ad primum ludum vincendum, aut perdendum, ita, ut mihi nunc æqua sit exspectatio ad obtinendum a, aut $\frac{1}{2}a$: quod ipsum per primam Propositionem tantum est, ac, si utriusque sortis dimidium, id est, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo collusori $\frac{1}{4}a$, quæ ipsius portio statim ab initio eodem modo reperiri potuisset. Unde patet, eum, qui ludum meum in se recipe e vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde semper tria contra unum deponere eum posse, qui unum ludum vincere contendat, priusquam alter duos vincat.

PROPOSITIO V.

Ponamus unum mihi deficere ludum, & collusori meo tres lusus. Oportet hic facere distributionem.

Advertamus itaque rursus, in quo essemus statu, si ego, vel ipse primum vinceret lusum. Si ego vincerem, obtinerem depositum, id est, a; quod, si autem ille primum ludum vinceret, deficerent ipsi duo lusus, & mihi unus; ac proinde in eodem statu essemus, qui inpræcedenti Propositione positus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi ostensum est. Itaque pari facilitate, vel a mihi obtinget, vel $\frac{3}{4}a$, id, quod tantum est, per primam Propositionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ collusori meo; ita, ut mea sors ad sortem illius se habeat, sicut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requisitus est præcedens, ita rursus hisce inservit sequenti: nimirum, si ponamus mihi unum ludum deficere, & collusori meo quatuor lusus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ istius, quod depositum est, & ipsi $\frac{1}{16}$.

PROPOSITIO VI.

Ponamus mihi deficere duos lusus, & collusori meo tres lusus.

Fiet itaque primo lusu; vel, ut mihi unus lusus deficiat, & ipsi tres (unde mihi per præcedentem Propositionem obtinget $\frac{7}{8}a$;) vel, ut cuique nostrum adhuc duo lusu deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem sic utrique æqua sors futura est. Est mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum, aut perdendum; ita, ut mihi æqua sit exspectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$, aut $\frac{1}{2}a$, id, quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per primam Propositionem. Et debentur mihi 11 partes ejus, quod depositum est, & collusori meo 5 partes.

PROPOSITIO VII.

Ponamus mihi deficere duos lusus, & collusori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, si primum ludum vincere debeam, & alter quatuor; vel, si eundem perdam, duos, & alter tres. Ita, ut æqua mihi sors obtingat ad $\frac{15}{16}a$, aut $\frac{11}{16}a$, id, quod tantum valet, ac $\frac{13}{16}a$, per primam Propositionem. Unde patet, eum meliorem habere sortem, qui duos lusus vincere debet, dum alter quatuor, quam eum, qui unum, dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum, ipsius 1 ad 2, portio mea, per quartam Propositionem, est $\frac{3}{4}a$, quæ minor est, quam $\frac{13}{16}a$.

PROPOSITIO VIII.

Nunc vero ponamus tres esse collusores, quorum primo, ut, & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusus.

Ut igitur, inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse, vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id, quod sit a. Quod si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At, si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideoque tam primo, quam utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et fit primo una exspectatio ad a, una ad 0, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æque facile contingere potest cuique trium, ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet, ac $\frac{4}{9}a$, per secundam Propositionem. Et fit similiter secundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars separatim etiam in veniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

PROPOSITIO IX.

Ut tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures, & alii pauciores lusus deficiunt, cujus que pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes, si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendes unius quasitam partem.

Ponamus tres esse collusores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusus, & ipsi C similiter duos lusus. Invenire oportet, quid ipsi B, ejus, quod depositum est, debeatur. Id, quod vocetur q.

Primo, examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipsi, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur 0. Si ipsi B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusus. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur $\frac{4}{9}q$, per octavam Propositionem.

Denique, si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A, & C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusus, ac per consequens ipsi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propositionem octavam. Nunc autem in unam summam colligendum est, id, quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, $0\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum summa est $\frac{5}{9}q$. Quod ipsum divisum per 3 numerum collusorem, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipsius B quæsita pars est. Demonstratio autem hujus patet ex secunda Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum $0\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per secundam Propositionem tantundem, ac $\frac{c+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q}{3}$, id est, $\frac{5}{27}q$. Et certum est, hunc divisorem 3 esse numerum collusorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet casu, videlicet, si vel ipse, vel aliquis reliquorum primum sequentem ludum vincat: oportet simpliciores casus primo investigare, & horum medio sequentes. Nam sicut hic ultimus casus solvi non potuit priusquam ille octavæ Propositionis calculo subductus esset, in quo deficientes lusus erant 1, 1, 2, ita etiam cujusque pars supputari nequit in tali casu, ubi deficientes lusus sunt 1, 2, 3, quin primum calculo subductus sit casus deficientium lusuum 1, 2, 2, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo lusus deficientes sunt 1, 1, 3; qui similiter per octavam Propositionem supputari potuisset.

TABULA PRO TRIBUS COLLUSORIBUS.

Lusus, qui ipsis deficiunt.	1.1.2	1.2.2	1.1.3	1.2.3
Eorum partes.	4.4.1	17.5.5	13.13.1	19.6.2
	9	27	27	27

Lusus, qui ipsis deficiunt.	1.1.4	1.1.5	1.2.4	1.2.5
Eorum partes.	40.40.1	121.121.1	178.58.7	542.179.8
	81	243	243	729

Lusus, qui ipsis deficiunt.	1.3.3	1.3.4	1.3.5
Eorum partes.	65.8.8	616.82.31	629.87.13
	81	729	729

Lusus, qui ipsis deficiunt.	2.2.3	2.2.4	2.2.5	2.3.3	2.3.4	2.3.5
Eorum partes.	34.34.13	338.338.53	353.353.23	133.55.55	451.195.83	1433.635.119
	81	729	729	243	729	2187

Atque hoc quidem pacto consequenter supputare licet casus omnes, qui in sequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Quod ad tesseras attinet, de iis hæ quæstiones proponi possunt: videlicet, quotam vice una tessera senarium jacere periclitandum sit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quota vice duos senarios duabus tesseris, aut tres senarios tribus tesseris jacere sit tentandum. Et plures aliæ hujusmodi quæstiones.

Ad quas solvendas advertendum est, Primo unius tesseræ sex esse jactus diversos, quorum quivis æque facile eveniat. Sumo enim tesseram habere figuram cubi perfectam. Porro, duarum tesserarum 36 esse diversos jactus, quorum similiter quivis æque facile obtingere potest. Nam ratione cujusque jactus unius tesseræ simul contingere. Et sexies 6 efficiunt 36 jactus. Item trium tesseratum esse 216 jactus diversos. Nam ratione cujusque 36 jactuum duarum tesserarum potest unus sex jactuum, qui in tertia sunt, evenire. Et sexies 36 efficiunt 216 jactus. Eodem modo patet, quatuor tesserarum jactus esse sexies 216, id est, 1296; atque sic ulterius jactus quotlibet tesserarum supputari posse, sumendo semper pro accessione unius tesseræ sexies jactus præcedentis.

Porro notandum, duarum tesserarum unum duntaxat esse jactum, qui 2, aut 12 puncta efficiat, duos vero jactus, qui 3, aut 11 puncta efficiant. Si enim tesseras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum, & in B duo, vel in B unum, & in A duo puncta reperiri posse. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque, & in B sex, vel in A sex, & in B quinque puncta patere posse. Quatuor punctorum tres sunt jactus, videlicet, ipsius A 1, & B 3 puncta; vel ipsius A 3, & B 1 punctum; vel ipsius A 2, & B 2 puncta.

Decem punctorum similiter tres sunt jactus.

Quinque, vel novem punctorum quatuor sunt jactus.

Sex, vel octo punctorum quinque sunt jactus.

Septem punctorum sex sunt jactus.

$$\text{In tribus tesseris}\left\{\begin{array}{c}3 \text{ vel } 18\\4 \text{ vel } 17\\5 \text{ vel } 16\\6 \text{ vel } 15\\7 \text{ vel } 14\\8 \text{ vel } 13\\9 \text{ vel } 12\\10 \text{ vel } 11\end{array}\right\}\text{punctorum reperiuntur}\left\{\begin{array}{c}1\\3\\6\\10\\15\\21\\25\\27\end{array}\right\}\text{jactus.}$$

PROPOSITIO X.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut una tessera 6 puncta jaciat.

Siquis prima vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeat'que id, quod pignoris loco depositum est; quinque vero esse casus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipsum, & tantum unus pro ipso. Quod autem depositum est, vocetur a. Est itaque ipsi unica exspectatio ab obtinendum a, sed quinque ab obtinendum 0; id, quod per secundam Propositionem tantundem valet, ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo, qui ipsi hunc casum offert $\frac{5}{6}a$. Ita, ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui prima vice suscipere velit.

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet: sors ejus hoc pacto computatur. Si prima vice 6 jaciat, obtinet a. Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui, ut prima vice 6 jaciat, unus tantum casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a, & quinque, qui dent $\frac{1}{6}a$, id, quod per secundam Propositionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contra certanti lusori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeo, ut sors utriusque, sive æstimatio exspectationis eam servet rationem, quam 11 ad 25; id est, minus, quam 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quod sors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, si futura $\frac{91}{216}a$; ita, ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulo minus, quam 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{671}{1296}a$; ita, ut 671 contra 675 deponere possit; id est, plus, quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{4651}{7776}a$, & potest 4651 contra 3125 deponere; id est, paulo minus, quam 3 ad 2.

Qui sex vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{31031}{46656}a$, & potest 31031 contra 15625 deponere; id est, paulo minus, quam 2 ad 1.

Atque ita consequenter quilibet jactuum numerus inveniri potest. Sed licet majori compendio progredi, ut in sequenti Propositione ostendetur; sine quo calculus alias multo prolixior foret.

PROPOSITIO XI.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut duabus tesseris 12 puncta jaciat.

Siquis prima vice duos Senarios jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, id est, ad obtinendum a; & 35 esse casus, quibus perdat, sive nihil habeat, quoniam 36 sunt jactus. Itaque habet, per secundam Propositionem $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem suscipit, si prima vice duos senarios jaciat, obtinebit a; si vero prima vice diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, id, quod ipsi, per illud, quod jam dictum est, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui, ut prima vice duos senarios jaciat, unus tantum est casus, sed 35 casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a, & 35, qui dent $\frac{1}{36}a$; id, quod per secundam Propositionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contra certanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis sit ei sors, aut pars, qui idem suscipit quaternis jactibus, prætereundo casum eum, cum quis illud ternis jactibus suscipit.

Etenim, qui quatuor vicibus duos senarios jacere contendit, si illud prima, aut secunda vice faciat, obtinet a; fin minus, restant ipsi duo jactus, qui per illud, quod superius dictum est, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem rationem habet etiam 71 casus, ut ex duobus primis jactibus semel duos senarios jaciat, contra 1225 casus, quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio 71 casus, qui ipsi dent a, & 1225 casus, qui dent ipsi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipsi per secundam Propositionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contra certanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id, quod ostendit eorum sortes esse ad se invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porro eadem ratione invenitur exspectatio ejus, qui 8 vicibus semel duos senarios jacere certat. Ac inde rursus exspectatio ejus, qui idem suscipit 16 vicibus. Atque ex hujus exspectatione, ut etiam ex exspectatione illius, qui istud 8 vicibus suscipit, invenitur exspectatio ejus, qui illud 24 vicibus in se recipit. In qua operatione, quoniam præcipue quæritur, in quo numero jactuum æqualis sors incipiat, inter eum, qui id suscipit, & eum, qui offert, licebit a numeris, qui alioquin in immensum excrescerent, posteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus suscipit, adhuc aliquid deficere; tum'que demum eum potiorem conditionem inire cum 25 actibus aggreditur.

PROPOSITIO XII.

Invenire, quot tesseris suscipere quis possit, ut prima vice duos senarios jaciat.

Hoc autem tantundem est, ac, siquis scire velit, quoto jactu quispiam una tessera suscipere possit, ut bis senarium jaciat. Quod, siquis duobus jactibus susciperet, obtingeret ei, per ea, quæ ante ostensa sunt $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet, id, quod tantundem valere dictum est, ac $\frac{1}{36}a$. At vero, primo ejus jactu existente senario, opus est, ut ex duobus jactibus nonnisi semel senarium jaciat. Quod per 10 Propositionem tantundem valet, ac si $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui, certum est ipsum unum habere casum, quo prima vice senarium jaciat, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 casus ad $\frac{1}{36}a$, id, quod per secundam Propositionem tantundem valet, ac $\frac{16}{216}a$, seu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto assumendo continue unum jactum amplius, invenitur 10 jactibus una tessera, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciantur, id'que cum lucro.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus tesseris unum solummodo jactum, hac conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si vero quidquam aliud accidat, ut tum id, quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeatur.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id, quod, si fiat, cuique nostrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verum, si id non obtingat, habebo 6 casus, quibus vincam, id est, ut a habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id, quod per secundam Propositionem tantundem est, ac si tali casu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad $\frac{1}{2}a$, & 9 casus ad $\frac{2}{3}a$, id, quod per secundam Propositionem, tantundem est, ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contra certanti $\frac{11}{24}a$.

PROPOSITIO XIV.

Si ego, & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hac conditione, ut ego vincam simul, atque septenarium jaciam, ille vero, quam primum senarium jaciat; ita videlicet, ut ipse primum jactum concedam: Invenire rationem mea ad ipsius sortem.

Ponatur, sortem meam valere x, & id, quod depositum est vocari a; erit'que sors alterius $\infty\ a - x$. Et patet, quandocunque ipsius vices jaciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse $\infty\ x$. At quandocunque; meæ vices sunt, ut jaciam, sors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore y. Iam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare, lusus'que victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id est, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priusquam jacit, 5 casus ad obtinendum 0, & 31 casus ad obtinendum y, id, quod per tertiam Propositionem valet $\frac{31y}{36}$. Posuimus autem casum meum a principio esse $\infty\ x$. Quo circa erit $\frac{31y}{36}\ \infty\ x$, adeo'que $y\ \infty\ \frac{36x}{31}$. Deinde positum fuit, vicibus meis venientibus, sortem meam valere y. Ego vero jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeo'que 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam x, id, quod per tertiam Propositionem valet $\frac{6a+30x}{36}$. Hoc autem cum fit $\infty\ y$, erit, invento, ut ante

$\frac{36x}{31} \propto y$, $\frac{36x+6a}{36} \propto \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \propto \frac{31a}{61}$ valor meæ sortis. Et per consequens collusoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita, ut ratio sortis meæ ad illius sortem fit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco subjungantur sequentia Problemata.

Problema. I. A & B una ludunt duabus tesseris, hac conditione, ut A vincat, si senarium jaciat, at B si septenarium jaciat. A primo unum jactum instituet; deinde B duos jactus consequenter; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic, vel ille victor evadat. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B? Respondeo, ut 10355 ad 12276.

Problema. II. Tres collusores A, B, & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi, & 8 nigri existunt, ludunt hac conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; &, ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, itaque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

Problema. III. A certat cum B, quod ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit; ita, ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B, ut 1000 ad 8139.

Problema. IV. Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis, & 8 nigris, certat A cum B, quod velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

Problema. V. A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hac conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at, si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A; &, ut ille ludum victurus sit, qui primum omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.