Хрестоматия
по истории теории вероятностей и статистике

Составитель и переводчик О.Б.Шейнин

Берлин, 2006

Оглавление

Предисловие

Научная работа почти всегда исходит из предыдущего знания; Ньютон в письме Р. Гуку указал, что он *стоял на плечах гигантов*. Гораздо чаще, однако, приходится выискивать более обычных предшественников (а при неудаче *открывать Америки*). До недавнего времени помощь в подобных изысканиях в области математики в основном оказывали три реферативных журнала. Один из них, *Математика*, ныне во многом утратил свое значение, второй, *Zentralblatt MATH*, продолжает выходить лишь в электронном варианте (что не очень удобно), третий, *Mathematical Reviews*, теперь настолько дорог, что многие библиотеки прервали свою подписку на него (и в обычном, и в электронном видах). Неоценимую помощь начал оказывать интернет, однако в области истории науки положение, разумеется, намного хуже.

Но печально, что познание затемняется многими невежественными и все-таки длительно почитаемыми статьями и книгами. Почему они публикуются? Покойный проф. Трусделл рассказал нам, что один самоуверенный историк математики обвинил его в отсталом мышлении; прежнее требование строгости, мол, устарело. Сам Трусделл (Truesdell 1984, p. 292) заметил, что “по определению, учения больше нет, потому что истина изгнана как старомодный предрассудок. Ее место заняло ... постоянное *исследование* всего и вся”.

Пример негодной книги и хвалебного слова в ее автора мы привели раньше (Шейнин 2005, с. 7). Как могут появляться такие книги? Где заслон от подобных проходимцев и вообще от худых сочинений? Ведь “Для научного сообщества в целом нет ничего столь нелепо дорогостоящего как невежество”. Так сказали метеорологи (Shaw &

Austin 1926, p. v), но могли бы повторить и представители любой иной науки. Другие примеры (Шейнин 2005, с. 103 и 163) относились к недобросовестному охаиванию наших классиков.

Рецензирование рукописей и реферирование вышедших книг и статей – вот, казалось бы, спасение. Но нет! Подобная работа считается третьестепенной и слишком часто выполняется спустя рукава. Вспоминается, что когда-то в реферативном журнале *Математика* всё было иначе. Работая в соседнем помещении, в реферативном журнале *Астрономия и геодезия*, мы знали, что их сотрудники (как, впрочем, и наши) были специалистами (математиками), что референты считали за честь сотрудничать с ними, и что присланные рефераты не почитались истиной в последней инстанцией, – короче, повторимся, что всё было иначе, чем это происходит теперь, по крайней мере за пределами России.

Другая сторона недобросовестного и/или неквалифицированного реферирования это неизбежное отклонение многих хороших рукописей, содержание которых остается поэтому неизвестным. И вспомним, наконец, что в 1915 г. Петербургская академия наук присудила А.А. Чупрову золотую медаль за внутреннюю рецензию, написанную по ее заказу.

На этом неблаговидном фоне конечно же выделяются добросовестные исследования и в первую очередь мы назовем в этой связи книги и статьи А. Хальда, который неоднократно упоминается ниже.

Предлагаемый нами сборник содержит переводы отрывков из классических сочинений. Совместно с раннее опубликованными нами переводами (Граунт и Галлей 2005) он даст возможность лучше ознакомиться с историей теории вероятностей и статистики и, как мы надеемся, поможет избежать некоторых ошибок и вообще окажется подспорьем в научной и педагогической работе. В некоторых случаях включенные нами отрывки это аннотированные самими авторами оглавления их сочинений, и читатели смогут воспользоваться ими и для общего ознакомления с последними, и для направленного поиска материала.

В процессе работы мы неожиданно выяснили, что переводчики (не только на русский язык), как правило, слишком свободно обращаются с классическими текстами. В частности, это относится к русскому переводу *Опыта философии теории вероятностей* Лапласа. Для полноты картины мы включили в Библиографию существующие переводы классиков (в том числе и Лапласа) и дополнительно упомянем, что переведены также и многие труды Максвелла, Больцмана, Дарвина, также как и опубликованные на иностранных языках сочинения Остроградского, Чупрова и Бернштейна.

Библиография

Бернулли Д. (1955), О средней продолжительности браков при всяком возрасте супругов и о других смежных вопросах. В книге Птуха М.В. *Очерки по истории статистики в СССР*, т. 1. М., с. 453 – 464.

Бернулли Я. (1986), Перепечатка русского перевода 1913 г. 4-й части *Искусства предположений*. В книге автора *О законе больших чисел*. М.

Бессель Ф.В. (1961), *Избранные геодезические сочинения.* М.

Гальтон Ф. (1875), *Наследственность таланта.* СПб.

Гаусс К.Ф. (1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.

Гельмерт Ф.Р. (1914), *Уравновешивание по способу наименьших квадратов.* М.

Граунт Дж., Галлей Э. (2005), *Начала статистики населения, медицинской статистики и математического страхового дела*. Берлин.

Кетле А. (1865), *Человек и развитие его способностей или опыт общественной физики*. СПб.

--- (1911 – 1913), *Социальная физика*, тт. 1 – 2. Киев.

Лаплас П.С. (1999), Перепечатка русского перевода *Опыта философии теории вероятностей* 1908 г.: в книге Прохоров Ю.В., редактор, *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия.* М., с. 734 -863.

Мендель Гр. (1965), *Опыты над растительными гибридами.* М.

Мизес Р. (1930), *Вероятность и статистика.* М.

Пирсон К. (1911), *Грамматика науки.* СПб.

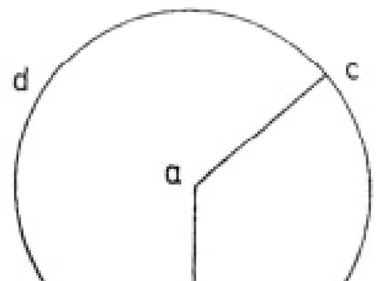
Пуанкаре А. (1999), *Теория вероятностей*. Ижевск.

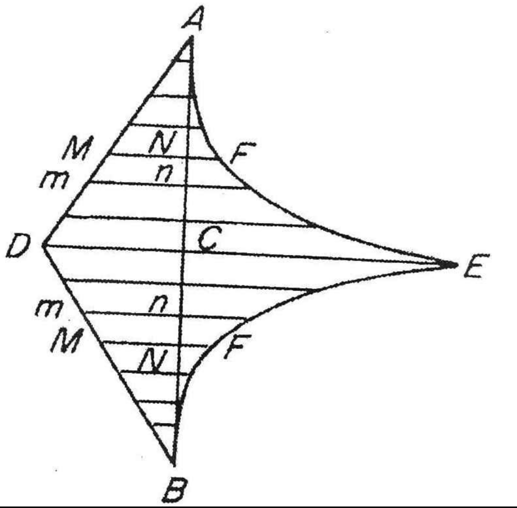
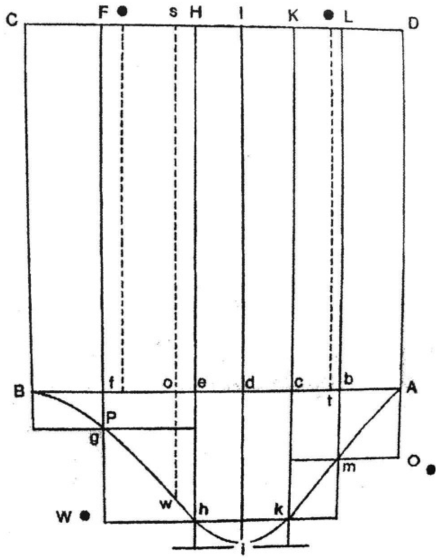
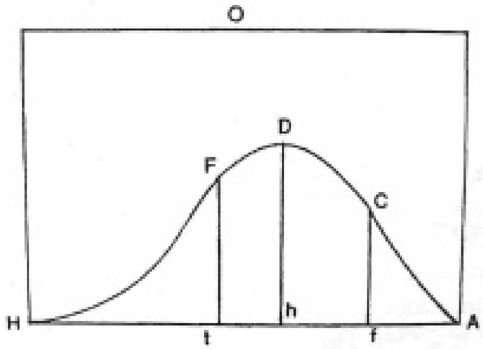
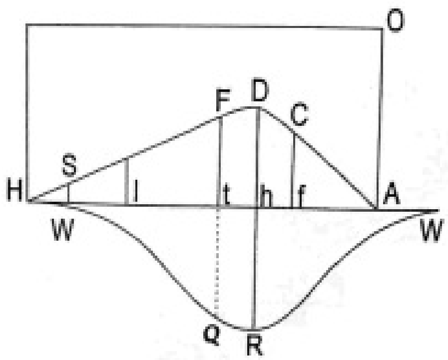
Четвериков Н.С., Составитель (1968), *О теории дисперсии*. М.

Шейнин О. (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин.

Shaw N., Austin E. (1926), *Manual of Meteorology*, vol. 1. Cambridge.

Truesdell C. (1984), *An Idiot's Fugitive Essays on Science*. New York. Перепечатка некоторых прежних работ, в основном рецензий, крупного и инакомыслящего (и в науке, и в социологии) ученого. Рецензия на эту книгу в *Math. Rev.* – яркий пример недобросовестного отношения к важной области научной работы.

<table>
<tr><th colspan="2">Рисунки к основному тексту</th></tr>
<tr><td>Рис. 1 к разделу 3, §5</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Рис. 1 к
разделу 8,
текст 1757 г</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Рис.1 к
разделу 9,
Лемма 1;
Предложени
е 10; и текст
1765 г., §2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Рис.2 к
разделу 9,
Лемма 1;
Предложени
е 10; и текст
1765 г., §2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Рис.3 к
разделу 9,
Лемма 1;
Предложени
е 10; и текст
1765 г., §2</td><td>
</td></tr>
</table>

1. Блез Паскаль и Пьер Ферма

Их переписка 1654 г. ознаменовала зарождение собственно теории вероятностей, а Паскаль (1623 – 1662) кроме того написал посмертно опубликованный *Трактат об арифметическом треугольнике* (Pascal 1665), который был частично посвящен разделу ставки в прерванной азартной игре, т. е. основной теме упомянутой переписки. И Паскаль, и особенно Ферма (1601 – 1665) затрагивали и другие вопросы. Последнего очень интересовали теоретико-числовые задачи и быть может поэтому Гюйгенс (см. раздел, посвященный ему в этом сборнике) впоследствии заметил. что задачи зарождавшейся теории [вероятностей] не легче диофантовых и даже “возможно покажутся более занимательными”. Об общем содержании писем он, видимо, узнал от других математиков; в самой переписке упоминаются Каркави и Роберваль, а одно из писем Ферма, которое обычно включается туда, адресовано первому из них.

Мы ниже приводим перевод сохранившейся части этой переписки. Существуют и ее переводы на английский язык, один из которых (M. Merrington, в книге David 1962, pp. 229 – 251), хотя он и недостаточно близок к оригиналу, и содержит математические ошибки, мы смогли в некоторой степени использовать. Кроме того, многие авторы (Хотимский 1936; Ore, 1960; David, 1962, pp. 70 – 80; Sheynin, 1977, pp. 232 – 238; Edwards, 1987); Hald, 1990, pp. 54 – 63) описывали и комментировали переписку.

Переписка Паскаля и Ферма

Pascal B. (1654), [Correspondance]. *Oeuvr. Compl.*, t. 1. Paris, 1998, pp. 145 – 166

Ферма – Паскаль, извлечение, июнь 1654?

[1.] Если я попытаюсь выкинуть некоторое число очков на одной кости за 8 бросков, и, если после того, как деньги окажутся в игре, мы договоримся, что я не делаю своего первого броска, то ввиду этого, в соответствии с моим принципом, мне следует забрать из игры как отступное 1/6 всей суммы [ставок]. Если же мы после этого дополнительно договоримся, что я не делаю второго броска, я должен в качестве возмещения забрать 1/6 остатка, т.е. 5/36 всей суммы.

И если после этого мы договоримся, что я не делаю третьего броска, я должен в качестве возмещения забрать 1/6 остатка, т.е. 25/216 всей суммы. И если после этого мы дополнительно договариваемся, что я не делаю четвертого броска, я должен забрать 1/6 остатка, т.е 125/1296 всей суммы, и я соглашаюсь с Вами, что это является стоимостью четвертого броска в предположении, что предыдущие броски уже улажены.

Но в последнем примере Вашего письма (повторяю Ваши собственные слова) Вы предлагаете: “Если я попытаюсь выкинуть шестерку в восьми бросках и безуспешно сыграл три раза, а мой противник предложит мне вовсе отказаться от четвертого броска и готов дать мне взамен отступное, поскольку я [все еще] могу выбросить шестерку, то он будет должен мне 125/1296 полной суммы наших ставок”.

[2.] Однако, в соответствии с моим принципом, это неверно. Потому что в этом случае тот, кто бросает кость, ничего не добился при первых трех попытках, и в игре осталась полная сумма, так что тот, у кого [в руках] кость, и кто соглашается не делать четвертого броска, должен забрать в качестве возмещения 1/6 всей суммы. И если он сыграл 4 раза не выкинув требуемого числа очков, и игроки соглашаются, что он отказывается от пятого броска, он так же само должен получить в качестве возмещения 1/6 всей суммы. Поскольку вся сумма остается в игре, то не только в соответствии с [моим] принципом, но и по здравому смыслу каждый бросок должен приносить одну и ту же выгоду.

Прошу Вас дать мне знать, соглашаемся ли мы, как я полагаю, в принципе и не расходимся ли только в [его] приложении.

Паскаль – Ферма, 29 июля 1654 г.

Сударь,

[1.] Как и Вы, я в той же мере охвачен нетерпением, и, хоть я снова в постели [прикован к постели], не могу не сказать Вам, что вчера вечером получил от месье Каркави[1] Ваше письмо о разделе ставки, которое восхищает меня сильнее, чем могу выразить. У меня нехватает свободного времени, чтобы распространяться, но, одним словом, Вы совершенно верно решили эти две задачи о разделе ставки, – для игры в кости и для [карточной] игры. Я полностью удовлетворен этим, потому что теперь, после замечательного обмена мнениями с Вами, совсем не сомневаюсь, что был прав.

Я гораздо больше восхищаюсь [Вашим] методом раздела ставки [в карточной игре] чем при игре в кости. Я видел, что многие решили вторую задачу, как[, например,] месье шевалье де Мере, который и предложил мне эти вопросы, а также месье де Роберваль[2]. Но месье де Мере так и не смог установить ни справедливого раздела ставки, ни уловки для подхода к нему, и я оказался единственным, кто знает эту [верную] пропорцию [раздела].

[2.] Ваш метод очень надежен и именно он первым пришел мне на ум при этом исследовании. Но, поскольку соединения слишком тягостны, я сократил путь и по существу отыскал другой метод, намного более короткий и более понятный, о котором хотел бы сообщить Вам здесь в нескольких словах. Ибо я хотел бы, если можно, впредь открывать Вам свое сердце, потому что радуюсь нашему обмену мнениями. Мне хорошо видно, что истина и в Тулузе, и в Париже одна и та же.

Вот, примерно, что я делаю, чтобы установить [справедливую] стоимость каждой партии, если двое играют, например, три партии [до выигрыша трех партий] и каждый ставит на кон 32 пистолей. Пусть первый выиграл две партии, а второй – одну. Они, далее, играют [следующую] партию, исход которой таков, что при ее выигрыше первым игроком он получает все деньги, находящиеся в игре, т.е. 64 пистолей; если выиграет другой, то каждый выиграет по две партии и потому, если они захотят разойтись, каждый должен будет забрать свою ставку, т.е. 32 пистолей.

А затем, сударь, примите во внимание, что если выиграет первый, ему будет причитаться 64 пистолей, если же проиграет, то – 32. Поэтому, если они [игроки] не захотят подвергнуться риску третьей партии и разойтись, не сыграв ее, первый должен сказать; “Я наверняка получу 32 пистолей, потому что уже мой проигрыш дает мне их; а что касается остальных 32, может быть их получу я, а может быть – Вы, шансы равны. Так поделим же эти 32 пистолей поровну и дайте мне кроме этого [те] 32, которые наверняка мои". Он поэтому получит 48 пистолей, а другой – 16[3].

[3.] Предположим теперь, что первый выиграл 2 партии. а второй – ни одной, и что они начали [новую] партию. Ее исход таков, что если выиграет первый, он заберет все деньги, 64 пистолей, а если второй, они окажутся в положении предыдущего случая, при котором первый игрок выиграл 2 партии, а второй – одну. Но мы уже показали, что в том случае 48 пистолей принадлежат тому, кто выиграл 2 партии, и поэтому, если они [игроки] вовсе не захотят играть эту [новую] партию, он должен сказать: "Если я выиграю её, я выиграю всё, т.е. 64; если я её проиграю, мне будет законно причитаться 48. Поэтому дайте мне 48, которые наверняка мои, даже если я проиграю, и разделим пополам остальные 16, потому что у Вас столько же шансов выиграть, сколько у меня". Таким образом, он получит 48 и 8, т.е. 56 пистолей.

Предположим, наконец, что первый выиграл только одну партию, а другой – ни одной. Вы видите, сударь, что если они начнут новую партию, её исход будет таков, что если выиграет первый, счет будет 2:0 и, стало быть, по предыдущему случаю ему будет принадлежать 56. Если он проиграет, счет окажется равным, и ему будут принадлежать 32 пистолей. Поэтому он должен сказать: "Если Вы не хотите играть [дальше], дайте мне 32 пистолей, которые наверняка мои, и разделим пополам остаток от 56. Вычитая 32 из 56, получим 24. Так разделим 24 пополам; Вы возьмете 12 и дадите мне 12, так что вместе с 24 это даст 44".

Вы видите, что путем простых вычитаний по этому способу оказывается, что за первую партию ему причитается от другого игрока 12 пистолей, за вторую партию – еще 12, а за последнюю – 8. И, чтобы больше не напускать ничего таинственного, поскольку Вы всё это так ясно усмотрите, я хочу лишь узнать, не допустил ли я какой-нибудь ошибки, [полагая, что] стоимость (под этим я понимаю только сумму денег второго игрока) последней из двух партий вдвое превышает стоимость последней из трех, вчетверо – стоимость последней из четырех и в восемь раз превышает стоимость последней из пяти партий и т. д.

[4.] Но пропорцию для первой партии установить не так легко. Я не хочу ничего скрывать, и она такова. Вот задача, которую я исследовал для многих случаев, потому что она, по правде говоря, очень нравится мне.

Пусть играется сколько угодно партий; требуется найти стоимость первой. Допустим, к примеру, что их 8. Возьмем первые 8 четных и 8 нечетных чисел[4]:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16; 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Перемножим четные числа таким образом: первое на второе; их произведение – на третье; произведение – на четвертое; произведение – на пятое, и т. д. Перемножим нечетные числа таким же образом: первое на второе, произведение – на третье и т. д. Последнее произведение четных чисел будет знаменателем, а последнее произведение нечетных – числителем дроби, которая выразит стоимость первой партии из восьми. Иначе говоря, если каждый игрок поставит столько пистолей, сколько выражает произведение четных чисел, он получит из ставки другого столько, сколько выражает произведение нечетных чисел.

Это может быть доказано, хотя и с большим трудом, при помощи таких сочетаний, которые Вы представляете себе, и я смог этого достичь только таким образом, но не тем другим путем, который только что описал Вам. И вот предложения, приводящие к этому. Они по существу являются арифметическими и касаются сочетаний, которые, как мне известно, обладают довольно красивыми свойствами.

[5.] Если из некоторого [произвольного] числа букв, например восьми, *A, B, C, D, E, F, G, H,* Вы образуете все возможные сочетания по 4, а затем по 5. по 6, 7 и 8, и т.д. [?] и таким путем образуете все возможные сочетания начиная с того множества [с того числа], которое является половиной всего до всего, я скажу, что если Вы объедините половину соединений по 4 со всеми последующими соединениями, сумма окажется определенным числом [членом], а именно членом, номер которого равен половине числа всех букв [геометрической] прогрессии со знаменателем 4 и первым членом, равным двум.

Например, и я сообщу это Вам на латинском языке, потому что французский [здесь] никуда не годится[5]. Пусть составлена суммма сочетаний по 4 из любого числа, например из восьми взятых букв

A, B, C, D, E, F, G, H,

и [добавлены числа всех сочетаний] по 5, по 6, и т. д. до восьми. Я говорю, что если Вы сложите половину сочетаний по 4, т.е. 35 (половина от 70) со всеми по 5, т.е. 56, плюс все сочетания по 6, т .е. 28, все сочетания по 7, т.е. 8, и плюс все по 8, т.е. 1, то получите четвертое число в [геометрической] прогрессии со знаменателем 4 и первым числом 2. Я говорю четвертое число, потому что 4 это половина восьми. Ибо члены прогрессии со знаменателем 4 и первым числом 2 это

2, 8, 32, 128, 512 и т.д.

и первое число – 2, 8 – второе число, 32 – третье и 128 – четвертое и это четвертое число равно

35 (половина сочетаний по 4 буквы) + 56 сочетаний по 5 букв + 28 сочетаний по 6 букв + 8 сочетаний по 7 букв + 1 сочетание по 8 букв.

[6.] Это было первое, чисто арифметическое предложение. Другое относится к учению о разделе ставки и оно таково. Прежде всего следует сказать, что если кто-то к примеру выиграл одну партию из пяти и что ему таким образом недостает четырех, игра неминуемо закончится в восьми [дополнительных] партиях, где 8 – удвоенное 4. Стоимость первой партии из пяти, считая ее по деньгам другого игрока, равна дроби, числитель которой равен половине числа сочетаний из восьми по 4 (я принял 4, потому что это число равно числу партий, недостающих [первому игроку] и 8 – потому что это удвоенное 4), а знаменатель – тот же числитель плюс все сочетания по числам элементов, превышающим 4.

Итак, если я выиграю одну партию из пяти, мне причитается 35/128 ставки другого игрока. Иначе говоря, если он поставил 128 пистолей, я забираю 35 и оставляю ему [для продолжения игры] остаток, т. е. 93. И эта дробь равна 105/384, которая получится, если принять произведение четных чисел за [ее] знаменатель, а произведение нечетных – за числитель. Вы без сомнения все это хорошо поймете, если возьмете на себя немного труда и поэтому я полагаю ненужным далее занимать Вас этим.

[7.] Тем не менее, я посылаю Вам одну из моих раннее составленных таблиц. У меня нет времени переписывать ее, и я опишу ее. Вы увидите

Таблица

Если каждый ставит 256 и требуется выиграть некоторое число партий

		Требуемое число партий					
		6	5	4	3	2	1
Мне полагается из ставки	1-ю партию	63	70	80	96	128	256
256 моего противника	2-ю партию	63	70	80	96	128	
за выигранную мной	3-ю партию	56	60	64	64		
	4-ю партию	42	40	32			
	5-ю партию	24	16				
	6-ю партию	8					
То же, за	1-ю партию	63	70	80	96	128	256
	первые 2 партии	126	140	160	192	256	
	первые 3 партии	182	200	224	256		
	первые 4 партии	224	240	256			
	первые 5 партий	248	256				
	первые 6 партий	256					

там, как всегда, что стоимость первой партии равна стоимости второй, что легко может быть найдено при помощи сочетаний. Вы также увидите, что числа первой строки все время возрастают, также и во второй строке, и в третьей. Но после этого числа в четвертой, в пятой и т. д. строках убывают, и это странно.

[8.] У меня нет времени послать Вам доказательство одной трудности, которая сильно удивила месье *** [де Мере], потому что у него очень хорошая голова, но он не геометр (а это, как Вам известно, большой недостаток) и он даже не понимает, что математическая прямая может быть разделена [отрезок ... разделен] до бесконечности и верит, что очень хорошо представаляет себе, что она состоит из конечного числа точек, и я так и не смог убедить его отказаться от этой мысли. Если Вы сможете этого добиться, он станет безукоризненным.

И он сказал мне, что обнаружил фальшь [противоречие] в числах и вот почему. Если взяться выкинуть шестерку на одной кости, то при четырех бросках выгода [соотношение шансов в его пользу] будет как 671:625, а взяться выкинуть две шестерки двумя костями в 24 бросках невыгодно. И тем не менее 24 относится к 36 (т.е. к числу исходов при двух костях) как 4 к шести (т.е. к числу исходов при одной кости)[6]. Вот каков обнаруженный им великий позор, который заставляет его гордо утверждать, что [эти] предложения непостоянны, а арифметика противоречива. Но в соответствии с известными Вам принципами Вы сразу же усмотрите в этом резон.

Я приведу все, сделанное мной, в порядок после окончания геометрических трактатов, над которыми тружусь уже некоторое время.

[9.] Я также выяснил нечто арифметическое. [Паскаль доказывает элементарный факт: для натуральных R и S при $R - S = 1$, $R^3 - S^3 - 1 = 6(1 + 2 + \ldots + S)$ и далее он формулирует геометрические теоремы.]

Это весьма недостаточное признание той чести, которую Вы мне оказываете, терпя мои беседы, столь долго докучающие Вам. Я никак не думал сказать Вам более двух слов, и [еще] не сказал Вам того, что ближе всего моему сердцу, а именно того, что чем дольше я знаю Вас, тем сильнее восхищаюсь Вами и почитаю Вас и что если Вы почувствуете, в какой степени это так и есть, Вы отыщете местечко для дружбы с тем, кто и т. д.

Ферма – Каркави. Тулуза, 9 авг. 1654 г.

[1.] Я был восхищен тем, что мое мнение оказалось сходным с мнением месье Паскаля, потому что бесконечно ценю его талант и верю, что он очень даже сможет справиться со всем, что только предпримет. Дружба, которую он мне предлагает, так мне дорога и важна, что мне, наверное, никак не будет трудно каким-то образом воспользоваться ей при публикации своих трактатов.

Если Вас это не покоробит, Вы оба смогли бы осуществить эту публикацию, и я согласен, чтобы вы стали редакторами. Вы сможете разъяснить или дополнить то, что представляется слишком кратким и избавить меня от хлопот, которые я не смогу принять на себя ввиду своих [основных] занятий. Я даже хочу, чтобы эта работа вышла в свет без упоминания моего имени, и в остальном оставить вам выбор, как обозначить автора, которого вы просто назовете своим другом[7].

[2.] Вот путь, представившийся мне для второй части, которая будет содержать мои находки о числах. Это работа, существующая пока лишь в замысле. У меня не будет свободного времени, чтобы полностью изложить ее на бумаге, но я вышлю месье Паскалю в сжатой форме все свои принципы и первые доказательства [основные теоремы?], в которых, заранее уверяю Вас, он обнаружит вещи, не только новые и до сих пор не известные, но к тому же удивительные.

Если вы объедините свой и его труд, все это может произойти и быть достигнуто за короткий срок, и тем временем Вы выпустите в свет первую часть, которая находится у Вас.

Если месье Паскаль одобрит мое предложение, которое главным образом основано на моей высокой оценке его таланта, его познаний и его ума, я в первую очередь сообщу Вам о своих находках в области чисел.

Всего доброго, сударь. Остаюсь Вашим покорнейшим и послушнейшим слугой.

Паскаль – Ферма. 24 авг. 1654 г.

Сударь,

[1.] Я не смог передать Вам все свои мысли о разделе ставки в игре нескольких игроков, а теперь даже испытываю к этому некоторое отвращение [сопротивление] из страха, что столь дорогое для меня чудесное согласие между нами по этому вопросу начнет покидать нас. Я боюсь, что наши мнения по этому вопросу отличаются друг от друга. Хочу сообщить Вам все свои доводы, и Вы окажете мне одолжение, поправив меня если я ошибаюсь, или подкрепив меня, если мои мысли удачны. Я прошу Вас об этом очень серьезно и искренне, потому что смогу считать себя уверенным лишь если Вы на моей стороне.

Когда игроков только двое, Ваш метод, который исходит из соединений, неоспорим. Но когда их трое, то думаю, что могу доказать, что он недостаточно верен, разве только Вы следуете каким-либо иным путем, которого я не понял. Но метод, который я Вам сообщил и который я всегда применяю, является общим для всех возможных условий раздела ставки, тогда как метод соединений (которым я пользуюсь лишь в частных случаях, когда он быстрее чем общий приводит к цели) пригоден лишь в этих, но не в остальных случаях. Уверен, что мне удастся это объяснить, но мне придется несколько порассуждать, а Вам потребуется немного терпения.

[2.] Вот Ваш подход при двух игроках. Если они, играя несколько партий, приходят к такому положению, что первому нехватает двух очков, а второму – трех, то для раздела ставки следует (как Вы говорите) выяснить, за сколько партий игра неминуемо закончится. Легко прикинуть, что это произойдет после четырех партий, откуда Вы заключаете, что следует представить себе как эти четыре партии распределятся между двумя игроками и сколько будет соединений для победы каждого, а после этого разделить деньги в этой [в соответствующей] пропорции. Мне было бы трудно понять это, не знай я уже этого сам; и Вы это также описали в соответствии с той же мыслью. Итак, чтобы выяснить, сколько соединений имеется из четырех партий по двум игрокам, следует представить себе, что они кидают двугранную игральную кость (потому что их только двое) как при игре в орлянку, и что они применяют 4 такие кости (потому что играют 4 партии). И теперь надо определить, сколько различных положений у этих костей. Это легко прикинуть: их 16, т. е. квадрат четырех[8]. Потому что, представим себе, что одна из граней, благоприятная первому игроку, обозначена буквой *a*, а вторая, благоприятная второму, – буквой *b*. И тогда эти 4 кости могут иметь одно из следующих 16 положений

aaaa (1); *aaab* (1); *aaba* (1); *aabb* (1); *abaa* (1); *abab* (1); *abba* (1); *abbb* (2); *baaa* (2), *baab* (1); *baba* (1); *babb* (2); *bbaa* (1); *bbab* (2); *bbba* (2); *bbbb* (2) [в скобках указан номер побеждающего игрока]

Поскольку первому игроку нехватает двух очков, он побеждает каждый раз, когда грань *a* выбрасывается дважды [или больше], и таких положений 11. И поскольку второму игроку нехватает трех очков, он побеждает каждый раз, когда грань *b* выкидывается трижды [или четырежды], и таких положений 5. Они, стало быть, должны разделить ставку в отношении 11:5. Таков Ваш метод когда играют двое. И Вы говорите, что если их [игроков] больше, нетрудно будет разделить ставку тем же методом.

[3.] По этому поводу, сударь, я могу сказать Вам, что раздел ставки между двумя игроками, основанный на соединениях, весьма справедлив и очень хорош. Но когда игроков больше двух, он не всегда будет справедлив и я поясню Вам причину этого различия. Я сообщил о Вашем методе нашим [известных нам] господам, после чего месье Роберваль прислал мне следующее возражение.

Ошибочно здесь то, что принят метод раздела ставки в предположении, что игра закончится после четырех партий, тогда как, при двух недостающих очках у одного, и трех – у второго, 4 партии не являются необходимыми и может случиться, что они сыграют всего лишь 2 или 3, или, по справедливости сказать, может быть 4. И он не видит, почему можно утверждать, что раздел ставки справедлив в ложном предположении о необходимости играть 4 партии, тогда как естественное условие игры состоит в том, что после победы одного из игроков кость больше не бросается. И по крайней мере, если все это не ошибочно, то оно и не было доказано, так что у него имелось некоторое сомнение, что наше заключение ложно.

Я ответил ему, что не настолько доверяю этому методу соединений, который, по правде сказать, в этом случае неуместен, насколько своему другому и всеобъемлющему методу, от которого ничто не ускользает. Его доказательство очевидно и он [его метод] в точности приводит к такому же разделу ставки, как и метод соединений. Более того, я доказал ему верность раздела ставки между двумя игроками по методу соединений следующим образом.

Разве это не правда, что если два игрока находятся в таком предполагаемом положении, что одному нехватает двух очков, а другому – трех, и что если они оба согласились играть все 4 партии, т. е. что 4 двугранные кости будут выброшены одновременно, – не правда ли, я спрашиваю, что если они решили играть 4 партии, раздел ставки, как мы сказали, соответствует количеству положений [костей], благоприятных каждому?

Он согласился с этим и это по существу может быть доказано, но он отрицал, что то же самое остается в силе, если не принуждать игроков играть 4 партии. Я тогда ответил ему следующим образом. Не ясно ли, что те же игроки, если они не вынуждены играть 4 партии, но желают закончить выбрасывать кости как только один из них наберет требуемое число очков, могут, без потери и выгоды, отказаться играть все 4 партии и что такое соглашение ни в коей мере не изменит их положения? Потому что, если первый выиграет первые 2 партии из четырех и станет таким образом победителем, станет ли он отказываться играть еще 2 партии, имея в виду, что если он их выиграет, то не получит ничего дополнительно, а если проиграет, не получит ничего меньше. Ибо если эти 2 партии выиграет его противник, их ему не хватит, потому что ему недостает трех очков, так что четырех партий слишком мало, чтобы они оба смогли набрать нужные им количества очков.

Конечно же, легко заметить, что совершенно все равно и ничего не меняет ни одному, ни другому, играть ли при естественном условии, т. е. закончить игру, как только кто-либо из них наберет свои очки, или играть все 4 партии. Поэтому, раз эти два условия равноценны и ничего не меняют, раздел ставки должен быть одним и тем же в обоих случаях. Но, как я показал, он справедлив, когда они вынуждены играть 4 партии и, стало быть, он справедлив и во втором случае.

Вот как я это показал и если Вы всмотритесь, то увидите, что доказательство основано на тождественности двух условий, реального и вымышленного, по отношению к двум игрокам. Либо один из них, либо другой всегда победит; и если кто-то из них победит или проиграет при первом условии, то он победит или проиграет и при втором, и никогда они не победят оба [сразу].

[4.] Будем настойчиво обобщать тот же вывод на случай трех игроков и предположим, что первому нехватает одного очка, а второму и третьему – двух очков. Чтобы разделить ставку, пользуясь тем же методом соединений, требуется установить прежде всего, как мы это сделали в случае двух игроков, после скольких партий игра будет закончена. Это произойдет после трех партий, так как нельзя сыграть 3 партии без того, чтобы решение не оказалось неминуемым.

Теперь надо выяснить, сколькими способами 3 партии могут сочетаться с тремя игроками, и сколько случаев будет благоприятно для первого, для другого, и для последнего, и разделить деньги в соответствии с [получающейся] пропорцией таким же образом, как это было сделано в случае двух игроков. Легко усмотреть сколько всего соединений здесь будет. Их число равно третьей степени трех, т. е. кубу трех или 27. Потому что, если бросить сразу 3 кости (ибо нужно играть 3 партии) с тремя гранями каждая (ибо игроков трое), обозначенными буквами *a, b* и *c* и благоприятными первому, второму и третьему игрокам соответственно, – ясно, что 3 совместно брошенных кости могут оказаться в 27 различных положениях, а именно [приведен их список, аналогичный предыдущему].

И поскольку первому нехватает лишь одного очка, ему благоприятны все положения, включающие одно *a* [или больше], и таких 19. Второму нехватает двух очков; за него поэтому все положения, включающие 2 [или 3] *b*, и таких 7. Двух очков нехватает и третьему; за него все положения, включающие 2 [или 3] *c*, и таких 7. Если теперь заключить, что каждому следует дать [долю ставки] в отношении 19:7:7, то это будет грубой ошибкой и я не готов поверить, что Вы так полагаете. Ибо несколько положений, например *abb*, благоприятны и первому, и второму, поскольку первый обнаружит здесь одно *a*, которое ему нужно [достаточно], а второй – два *b*, которых ему нехватает. И так же само *acc* благоприятно и первому, и третьему.

Поэтому мы должны полагать те положения, которые подходят двум игрокам, как представляющие каждому из них не всю сумму [всю ставку], а только ее половину. Пусть, например, выпало положение *acc*. И первый, и третий имеют одно и то же право на ставку. Поскольку каждый набрал необходимое число очков, мы делим деньги пополам. Но если выпадет *abb,* то выиграет только первый игрок. И поэтому подсчет должен быть таким. Имеется 13 положений, которые полностью благоприятны первому игроку, 6, дающих ему половину, и 8, которые ему ничего не дают. Следовательно, если вся сумма составляет 1 пистоль[9], имеются 13 положений, которые дают ему 1 пистоль [по одному пистоли], 6, дающих каждое по 1/2 пистолей и 8, которые ничего не дают. Надо поэтому перемножить 13 на 1 пистоль [...], 6 на 1/2 пистолей [...], 8 на 0, т.е. 0. Всего 27 случаев, 16 пистолей. Разделив денежную сумму 16 на количество положений, 27, получим дробь 16/27.

Такова доля ставки, принадлежащая первому, т. е. 16 пистолей из 27. Доли второго и третьего игроков определяются таким же образом. [...]

[5.] Таков, как мне кажется, способ раздела ставки по Вашему методу при помощи соединений, если только Вы не обладаете еще чем-то, о чем я не могу знать. Но если я не ошибаюсь, такой раздел ставки несправедлив и причина тому ложное предположение, что неминуемо следует играть 3 партии вместо естественного условия для этой игры, т.е. вместо ее продолжения только до того, как кто-то из игроков наберет столько очков, сколько ему нехватает, после чего игра прекращается. Не то, чтобы никогда не случилось, что будут играть 3 партии, но может также случиться, что не понадобится больше одной или двух.

Но спрашивается, откуда следует, что не разрешается принять в этом случае то же ложное предположение как и при двух игроках? И вот причина. В действительных условиях игры с тремя игроками выиграть может только один из них, потому что условие это таково, что игра прекращается, как только кто-то победит. А при ложном условии двое могут набрать необходимое количество очков; именно, если первый выиграет одну партию, которой ему недостает, а один из двух других – две недостающие ему, потому что [и в этом случае] им придется играть только 3 партии. В случае двух игроков, однако, ложное и действительное условия соответствовали интересам их обоих и именно это приводит к чрезвычайному различию между ложным и действительным условиями.

Но если игроки находятся в указанном предполагаемом положении, т. е. если первому нехватает одного очка, второму и третьему – по два очка и все они согласны играть все 3 партии, и что те, кто наберут недостающие очки, заберут всю сумму, если только добьются своего. А если двое достигнут этого, то они разделят сумму поровну, – в этом случае раздел ставки должен быть произведен так, как я только что описал его, т. е. что первому достанется 16 пистолей, а второму и третьему – по 5½ пистолей и при указанных условиях это очевидно. Если же они просто исходят из условия, что играть 3 партии не обязательно, и что игра продолжится лишь до тех пор, пока один из них не наберет нужного ему количества очков, и что поэтому игра закончится не давая возможности никакому другому игроку достичь своей цели, – тогда из 27 пистолей первому будет принадлеждать 17, а второму и третьему – по 5.

Это может быть найдено по моему общему методу, притом без использования соединений, потому что он беспрепятственно действителен всегда. Он также устанавливает, что при предыдущем условии первому принадлежит 16 пистолей, и по 5½ второму и третьему.

[6.] Таковы, сударь, мои мысли по этому вопросу, в котором я превосхожу Вас только в том, что больше размышлял о нем. Но для Вас это обстоятельство мало что значит, потому что Ваше первоначальное мнение было проницательнее моих продолжительных усилий. Я не позволяю себе сообщить Вам свои причины для ожидания Вашего суждения. Мне думается, что своим пояснением я дал Вам знать, что метод соединений случайно является хорошим для двух игроков, равно как и иногда для трех, как, например, когда первым двум нехватает одного очка, а третьему – двух, потому что здесь число партий, после которых игра заканчивается, недостаточно для того, чтобы победили двое. Но этот метод не является общим и хорош лишь если игра должна продолжаться в течение определенного числа партий.

Итак, поскольку Вы не были знакомы с моим методом, когда предложили мне задачу на раздел ставки между несколькими игроками, а знали лишь метод соединений, то я боюсь, что наши мнения по этой теме окажутся различными. Умоляю Вас сообщить мне каким образом Вы исследуете этот раздел ставки [раздел в общем случае]. Я отнесусь к Вашему ответу с уважением и удовольствием даже если Ваше мнение будет противоположно моему.

Остаюсь и т. д.

Ферма – Паскаль. Тулуза, 29 авг. 1654 г.

Сударь,

[1.] Наши споры все продолжаются и я, также как и Вы, восхищен тем, что наши мысли столь точно согласуются, будто они выбрали одно и то же направление и прошли один и тот же путь. Ваши последние сочинения по арифметическому треугольнику и его применению[10] доподлинно доказывают это и если мои вычисления не ошибочны, Ваше одиннадцатое следствие[11] пришло по почте в Тулузу из Парижа в то время, когда мое по существу равносильное предложение о фигурных числах было на пути из Тулузы в Париж.

Я предохранен от заблуждений при столкновениях с подобными задачами, и убежден, что верное средство избежать ошибок состоит в соревновании с Вами. Но если я скажу больше, то в моих словах окажется похвала, а мы [ведь] изгнали это слащавого и удобного противника бесед. И теперь моя очередь выложить Вам некоторые свои численные [теоретико-числовые] изобретения. Однако, окончание [сессии] парламента [Тулузы] увеличивает мою нагрузку и я смею надеяться, что Вы по Вашей доброте предоставите мне разумную и почти необходимую передышку.

[2.] Тем не менее, я отвечу на Ваш вопрос о трех игроках, которые играют 2 партии для случая, когда первый набрал одно очко, а остальные – ничего. Ваше первое решение верно и ставка должна быть разделена в отношении 17:5:5. Причина этого ясна и всегда следует из одного и того же принципа. Соединения сразу указывают, что первый имеет 17 благоприятных случаев, тогда как каждый из остальных – лишь 5. В остальном, нет ничего, о чем я не сообщил бы Вам впредь со всей откровенностью. Пока что, если Вы сочтете это сейчас подходящим, поразмышляйте над следующими предложениями.

3. Квадратные степени двух, увеличенные на единицу [$2^{2^n}+1$], всегда оказываются простыми числами. Квадрат двух плюс 1 равен пяти, т. е. простому числу. Квадрат квадрата равен 16; прибавляя единицу, получаем простое число 17. Квадрат 16 равен 256; прибавляя единицу, получаем простое число 257. Квадрат 256 равен 65 536; прибавляя елиницу, получаем простое число 65 537, и так до бесконечности[12].

Таково свойство, за верность которого я Вам ручаюсь. Его доказательство весьма затруднительно, и я признаюсь Вам, что еще не смог полностью найти его. Дойди я до конца, я не стал бы предлагать отыскивать это доказательство. Это предложение служит для отыскания чисел, которые находятся в заданном соотношении со своими делителями и относительно них я сделал существенные открытия. Об этом поговорим в другой раз.

Остаюсь, сударь, Вашим покорнейшим и послушнейшим слугой.

Ферма – Паскаль. 25 сент. с.г.

Сударь,

[1.] Не опасайтесь, что наше согласие покинет нас. Вы сами, полагая, что разрушите, подтвердили его и мне представляется, что, отвечая месье Робервалю, Вы ответили ему и за меня. Я беру пример трех игроков, первому из которых нехватает одного очка, а каждому из остальных – по два очка. Это тот случай, который Вы мне противопоставляете. Я нахожу, что в пользу первого существует лишь 17 соединений, и 5 – в пользу каждого из двух других. Потому что, когда Вы говорите, что соединение *acc* благоприятно и первому, и третьему, Вы, видимо, не припомнили, что всё, что происходит после победы одного из игроков, уже бесполезно. А раз это соединение приводит к выигрышу первой партии первым, то какое же значение имеет последующий выигрыш двух партий третьим игроком? Выиграй он хоть 30, всё это будет излишним. Из этого следует, как Вы очень хорошо заметили, что вображаемое продолжение игры до определенного числа партий лишь облегчает правило и (по моему мнению) уравнивает все шансы, или, более четко, сводит все дроби к одному и тому же наименованию [сводит воедино].

Чтобы Вы более не сомневались, если вместо трех партий Вы продолжите в предложенном примере воображаемую игру до четырех, то соединений будет не только 27, но 81, и придется установить, сколько из них приводят к выигрышу одной партии первым игроком перед тем, как каждый их остальных [кто-либо из них] выиграет две и сколько – к выигрышу двух партий каждым из [каким-либо из] двух других перед тем, как первый выиграет одну. Вы увидите, что 51 соединение окажется в пользу первого игрока и 15 – в пользу каждого из остальных, что снова приводит к той же пропорции.

И если Вы предположите 5 или какое угодно иное число партий, Вы каждый раз придете к трем числам в пропорции 17:5:5. И таким образом я имею право сказать, что соединение *acc* благоприятно лишь для первого, но не для третьего игрока, а соединение *cca* – лишь для третьего, но не для первого игрока и что, следовательно, мое правило соединений остается тем же для трех игроков и вообще для любого их числа как и для двух.

[2.] Из моего предыдущего письма Вы должны уже были увидеть, что я нисколько не сомневаюсь в верности решения задачи о трех игроках, которое я послал Вам с тремя окончательными числами, 17, 5 и 5. Но поскольку месье Робервалю быть может будет легче усмотреть решение, лишенное уловок, которое [притом] иногда может во многих случаях оказаться короче, вот предлагаемый мной пример[13].

Первый игрок может выиграть либо в одной, либо в двух, либо в трех партиях. Если он выиграет [чтобы выиграть] в одной партии, он должен с первого раза выкинуть благоприятный исход на одной трехгранной кости. Возможны 3 исхода и потому для выигрыша лишь в одной партии он имеет за себя 1/3 всех случаев. Если играют 2 партии, он может выиграть двумя способами, – либо если второй игрок выиграет первую партию, а он – вторую, либо если третий игрок выиграет первую партию, а он – вторую. Но 2 кости имеют 9 положений и поэтому первому игроку, который играет 2 партии, благоприятны 2/9 всех случаев. Если играют 3 партии, он может выиграть только двумя способами, либо когда второй игрок выиграет первую партию, третий – вторую, а он сам – третью, либо когда третий игрок выиграет первую партию, второй – вторую, а он сам – третью. Ибо, если второй или третий игрок выиграет первые 2 партии, победит [именно] он, а не первый игрок. А так как 3 кости имеют 27 положений, то первый игрок, играя 3 партии, имеет за себя 2/27 случаев. Сумма случаев, при которых побеждает первый игрок, равна таким образом 1/3 + 2/9 + 2/27 = 17/27.

Это правило надежно и общо во всех случаях. Не прибегая к уловкам, действительные соединения при каждом числе партий приводят к решению и показывают то, что я говорил в начале [письма], – что заданное число партий лишь сводит различные дроби к единому наименованию [сводит воедино]. Вот, стало быть, в нескольких словах вся загадка, которая без сомнения возвращает нас к доброму согласию, потому что ни один из нас не добивается ничего кроме резона и истины.

[3.] Я надеюсь послать Вам к Мартынову дню сводку всего существенного, что я отыскал в числах. Позвольте мне быть кратким и понятым лишь человеком, который все схватывает с полуслова. То, что Вы посчитаете наиболее важным, относится к предложениям, что каждое число состоит из одного, двух или трех треугольных; из одного, двух, трех или четырех квадратов; одного, двух, ... пяти пятиугольных; одного, двух, ..., шести шестиугольных, и так до бесконечности [что любое натуральное число является суммой не более чем n n-угольных чисел]. Чтобы получить это, надо доказать, что все простые числа, превышающие единицу на число, кратное четырем, состоит из двух квадратов, как например, 5, 13, 17, 29, 37 и т. д.

Если дано какое-либо простое число этого вида, как, например, 53, найдите, в соответствии с общим правилом, те 2 квадрата, которые его составляют. Все простые числа, превышающие единицу на число, кратное трем, состоят из квадрата и утроенного другого квадрата, как, например, 11, 17, 19, 41, 43 и т. д. Нет никакого треугольного числа в числах, чья площадь [?] равна квадратному числу. Это последует из открытия многих предложений, которые, как признал Баше [де Мезириак], оставались ему неизвестны и которых не было у Диофанта.

Я убежден, что как только Вы узнаете мой метод доказательства предложений подобного рода, он покажется Вам изящным и позволит Вам сделать много новых открытий, потому что, как Вам известно, часто упускают как развивается наука (multi pertranseant ut augeatur scientia; que beaucoup passent autre pour que la science augmente). Если у меня останется время, мы еще поговорим о магических числах и я вспомню свои прежние мысли об этой теме.

Всем сердцем, сударь, Ваш покорнейший и послушнейший слуга.

Желаю такого же здоровья месье Каркави как и себе. Я всегда к его услугам. Пишу из деревни и поэтому во время каникул мои ответные письма могут запаздывать.

Паскаль – Ферма, 27 окт. 1754 г.

Сударь,

Ваше последнее письмо меня полностью удовлетворило. Я восхищаюсь Вашим методом раздела ставки тем более, что очень хорошо понял его. Он полностью Ваш и не имеет ничего общего с моим; он легко приводит к тому же результату.

Но, сударь, если в этом вопросе я соревновался с Вами, то Вы сможете найти кого-либо, кто последовал бы за Вами в Ваших численных [теоретико-числовых] изобретениях, пояснение которых Вы любезно прислали, где-то в другом месте. Что до меня, должен признаться, что они намного превосходят мое понимание и я могу лишь восхищаться ими и покорнейше умолять Вас завершить их при первой же возможности. Все наши господа [коллеги] повидали их в прошлую субботу и высоко оценили их от всего сердца. Нелегко выносить ожидание столь изящных и желательных вещей. Подумайте, пожалуйста, об этом и будьте уверены, что я остаюсь и т. д.

Примечания

1. P. de Carcavi (примерно 1600 – 1684). Математик.

2. A.G. de Méré (1607 – 1684); G.P. Roberval (1602 – 1675). Математик, механик, физик.

3. Уже здесь Паскаль фактически пользуется понятием математического ожидания, а в §4 своего письма от 24 авг. он использует ожидание в общем случае. Ферма, в своем первом письме, упомянул “принцип”, который также можно истолковать как использование математического ожидания.

4. Число 1 называют нечетным только в просторечии.

5. Текст, из которого мы исходили, сопровождается использованными нами переводами латинских отрывков на французский.

6. На самом деле $P_1 = 1 - (5/6)^4 \approx 0.5177$, $P_2 = 1 - (35/36)^{24} \approx 0.4913$. Ope (Ore 1960, pp. 411 – 412) и другие авторы заметили, что де Мере вычислил эти вероятности (но остался при своем мнении о противоречивости чисел) и так, как указано выше, и в соответствии со старинным правилом, весьма неточным при небольших числах. Вычисления Де Мере оказались поэтому противоречивыми и он решил, что числа обманчивы.

7. О теоретико-числовых заслугах Ферма см. Башмакова (1970). Некоторые его находки были опубликованы посмертно в 1679 г., а 5 томов его трудов появились в 1891 – 1922 гг.

8. На самом деле не 4^2, а 2^4. В общем случае подобные результаты окажутся неверными. К примеру, при игре двух партий тремя игроками число соединений будет $3^2 = 9$.

9. Явная описка. Из дальнейшего следует, что 1 пистоль приносит каждый благоприятный случай.

10. Сочинение Паскаля было опубликовано только посмертно (Pascal 1665), см. также Edwards (1987). Оказывается, однако, что Ферма был по крайней мере частично знаком с ним.

11. Edwards (1987, p. 69, note 8) указал, со ссылкой на источник 1970 г., что фактически имелось в виду двенадцатое следствие.

12. Эйлер доказал ошибочность этого утверждения (Башмакова 1970, с. 73).

13. Представляется, что дальнейшие рассуждения весьма удобно пояснить теми же соединениями, т. е. что решение “лишенное уловок” вряд ли воспринимается легче.

Библиография

Башмакова И.Г. (1970), Теория чисел. В книге Юшкевич (1970, с. 70 – 80).
Хотимский И.В. (1936), Исторические корни теории вероятностей. *Под знаменем марксизма*, №1, с. 137 – 150.
Шейнин О.Б. (1977), Early history of the theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 17, pp. 201 – 259.
Юшкевич А.П., редактор (1970), *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия*, т. 2. М.
Dale A.I. (1998), De Méré's paradox. *Math. Scientist*, vol. 23, pp. 74 – 82.
David F.N. (1962), *Games, Gods and Gambling*. London.
Edwards A.W.F. (1987), *Pascal's Arithmetic Triangle.* Baltimore – London, 2002.
Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* New York.
Ore O. (1960), Pascal and the invention of probability theory. *Amer. Math. Monthly*, vol. 67, pp. 409 – 419.
Pascal B. (1665), *Traité du triangle arithmétique.* В книге автора (1998 – 2000, 1998, pp. 282 – 327).
--- (1998 – 2000) *Oeuvr. Compl.*, tt. 1 – 2. Paris.

2. Христиан Гюйгенс

Трактат Гюйгенса (1629 – 1695) 1657 г. оказался первым сочинением по теории вероятностей и стал всеобще известным. Достаточно сказать, что первая часть *Искусства предположений* Якоба Бернулли (1713) состояла из этого трактата с существенными комментариями, добавленными после каждого переписанного им Предложения Гюйгенса. (Это, правда, дополнительно свидетельствовало о том, что Бернулли не успел закончить своего посмертно изданного труда.)

Независимо от Паскаля и Ферма Гюйгенс ввел математическое ожидание выигрыша в азартной игре, принял его в качестве критерия для решения задачи о разделе ставки и неявно ввел условные вероятности. В дальнейшем он продолжал плодотворно заниматься и исследованием азартных игр, и проблемами смертности (т.е. приложил теорию вероятностей к новой и очень важной теме), однако все это было опубликовано лишь в 1920 г. См. о нем анонимное редакторское предисловие к тому 14 его Полного собрания сочинений (см. Библиографию), с. 3 – 48, а также Шейнин (1977, с. 239 – 252; 2005, с. 39 – 42) и Hald (1990, Chapter 6).

Мы приводим перевод указанного трактата вместе с его предисловием, – письма Гюйгенса ван Схутену. Вот фраза из этого письма: “Вы сочли его [трактат] достойным появиться вместе с результатами Ваших глубоких исследований ...”

Вычисления в азартных играх

Huygens C. (1757), De calcul dans les jeux de hazard. *Oeuvr. Compl*., t. 14. La Haye, 1920, pp. 49 – 91 (франц. и голл.). Голландск. текст опубл. в 1660 г.

Письмо Ф. ван Схутену

Сударь, зная, что, публикуя ценный плод Вашего рассудка и усердия, Вы пытаетесь, помимо прочего, показать, учитывая разнообразие рассматриваемых тем, громадное протяжение поля, на которое распространяется наше изумительное *алгебраическое* искусство, я не сомневаюсь, что данное [мной] сочинение об исчислении азартных игр послужит этой цели. По существу, чем труднее кажется логическое установление того, что изменчиво и подчиняется шансу, тем восхитительнее представляется наука, которая определяет результаты этого.

Поскольку именно по Вашей просьбе и в ответ на Ваши запросы я начал писать об этом исчислении, и поскольку Вы сочли его достойным появиться вместе с результатами Ваших глубоких исследований, я не только охотно разрешаю Вам опубликовать его [это исчисление] подобным образом, я полагаю, что этот метод публикации будет благоприятен мне в полной мере. Ибо если некоторые читатели вполне могут подумать, что я трудился над маловажными темами, они все же не сочтут совсем бесполезными и не заслуживающими никакой похвалы то, что Вы таким путем соизволили заимствовать как свою собственную работу[1], переведя ее не без некоторых хлопот с нашего [голландского] языка на латинский. Тем не менее, я хотел бы верить, что при более внимательном рассмотрении читатель вскоре поймет, что здесь дело идет не о простой игре ума, что в нее заложено начало весьма интересному и глубокому умозрительному построению. Задачи, принадлежащие этой теме, как мне представляется, не следует считать более легкими чем *диофантовы*, но они, возможно, покажутся более занимательными, поскольку включают нечто большее, чем простые свойства чисел[2].

Следует также знать, что в течение какого-то времени некоторые наиболее знаменитые математики всей Франции [Паскаль и Ферма] занимались этим видом исчисления, так что никто не должен приписывать мне честь первого открытия, которое мне не принадлежит. Но эти ученые, хоть они испытывали друг друга, предлагая друг другу много трудных задач, скрыли [не обнародовали] свои методы. Поэтому мне самому пришлось исследовать и глубоко вникать в этот предмет начиная с самого начала. И по причине, которую я только что упомянул, я даже не могу утверждать, что мы исходили из одного и того же принципа[3]. Однако, что касается результатов, я обнаружил, что во многих случаях мои выводы нисколько не отличались от выводов моих предшественников.

В конце моего трактата Вы увидите, что я предложил еще некоторые вопросы того же рода не указывая метода их решения, главным образом потому, что видел, что подходящее изложение рассуждений, приводящих к ответу, потребует слишком много усилий, и, во-вторых, из-за того, что мне представлялось полезным оставить нашим читателям (если они найдутся) нечто для обдумывания, а это послужит им и как упражнение, и как способ провести время.

Ваш преданнейший слуга Хр. Гюйгенс де Зюйлихен

Гаага, 27 апреля 1657 г.

Хотя результаты чисто азартных игр недостоверны, шанс игрока выиграть или проиграть тем не менее имеет определенное значение. Пример: если кто-то держит пари на то, что с первого раза выбросит шестерку на игральной кости, то его выигрыш или проигрыш не достоверны, но что определенно может быть вычислено, это насколько шанс его проигрыша превзойдет шанс выигрыша. Так же само, если я играю с кем-либо при условии, что победит тот, кто первым выиграет три партии, и я уже выиграл одну, то еще неясно, кто из нас победит. Но можно достоверно вычислить отношение наших шансов на победу и, следовательно, если мы захотим прервать игру, какова та часть ставки, на которую я должен превосходить его часть. Так же само можно вычислить за какую сумму я могу разумно уступить мою игру кому-то, кто захочет продолжить ее вместо меня. Много вопросов подобного рода могут представиться в аналогичных случаях при двух, трех или более игроках, а так как эти вычисления не являются всеобще известными и часто могут оказаться полезными, я кратко укажу тот метод, при помощи которого я рассмотрел и игру в кости.

В обоих предметах [играх] я исхожу из предположения, что в азартной игре [ожидание] выиграть какую-то вещь стоит столько, что кто-то, имеющий эту стоимость, может получить за нее тот же шанс в справедливой игре, т.е. в игре, которая не имеет целью нанести ущерб кому-либо[4]. Пример: если кто-то держит три экю в одной какой-то руке и семь – в другой, и разрешает мне выбрать одну из них, я говорю, что для меня это предложение имеет ту же цену как если бы я был уверен в получении пяти экю. По существу, имея пять экю, я могу заново воспользоваться случаем заиметь равные шансы на получение трех или семи экю в справедливой игре, см. ниже.

Предложение 1. Имея равные шансы получить a или b, я получаю $(a + b)/2$.

Чтобы не только доказать это правило, но и полностью раскрыть его, назовем стоимость моего шанса x. Следовательно, имея x, я могу снова получить тот же шанс в справедливой игре и пусть она будет такой. Я ставлю x против другого, который ставит столько же. Соглашаемся, что победитель дает a побежденному. Игра справедлива и поэтому я имею равные шансы получить a при проигрыше или $(2x – a)$ при выигрыше, так как в последнем случае я получаю ставку $2x$, из которой должен отдать a другому игроку. Если $(2x – a)$ равно b, то я буду иметь равные шансы получить a или b. Поэтому я полагаю, что $(2x – a) = b$ и получаю стоимость моего шанса $x = (a + b)/2$.

Доказательство просто. По существу, имея $(a + b)/2$, я могу играть на эту сумму против другого игрока, который поставит столько же, и договорюсь с ним, что победитель отдает a другому игроку. Таким образом, у меня есть равные шансы получить a, если я проиграю, и b – если выиграю, потому что в этом последнем случае я получу ставку $(a + b)$ и отдам a своему противнику.

В числах. Если я имею равные шансы получить 3 или 7, стоимость моего шанса, в соответствии с данным Предложением, равна 5. И ясно, что получив 5, я могу [за эту сумму] снова добыть тот же шанс. По существу, если я ставлю 5 против другого, ставка которого также равна 5, при условии, что победитель отдает 3 проигравшему, то игра справедлива и ясно, что я имею равные шансы получить 3 при проигрыше или 7 при выигрыше ибо в этом [последнем] случае я получу 10, из которых отдам ему 3.

Предложение 2. Имея равные шансы получить a, b или c, я получаю $(a + b + c)/3$.

Чтобы доказать это, снова назовем стоимость моего шанса x. Следовательно, имея x, я могу заново добыть те же шансы для справедливой игры и пусть она будет такой. Я играю против двух других и каждый из нас троих ставит x. Я договариваюсь с ними, что в случае их выигрыша первый из них даст мне b, а второй – c, а если выиграю я, то я дам b второму и c – третьему.

Ясно, что игра справедлива. Итак, я имею равные шансы получить b, если выиграет первый из них, или c, если выиграет второй, или, наконец, $(3x – b – c)$, если выиграю я сам, потому что в этом последнем случае я получу ставку $3x$, из которой отдам b одному из них и c – другому. Но $3x – b – c$ равно a и я имею равные шансы получить a, b или c. И поэтому $3x – b – c = a$, откуда я получаю стоимость моего шанса $x = (a + b + c)/3$. Так же само можно установить, что, имея равные шансы получить a, b, c или d, я получаю $(a + b + c + d)/4$ и т. д.

Предложение 3. Имея p шансов получить a и q шансов получить b, и полагая все эти шансы равными друг другу, я получаю $(pa + qb)/(p + q)$.

Чтобы вывести это правило, обозначим заново стоимость моего шанса через x. Следовательно, имея x, я могу вернуться в свое прежнее состояние при помощи справедливой игры. Для этого я наберу столько игроков, что вместе со мной их будет $(p + q)$ и каждый из нас поставит x, так что общая ставка будет $px + qx$. Каждый играет за себя и имеет один и тот же шанс победить. Предположим, кроме того, что с q игроками, т.е. с каждым из них по-отдельности, я договариваюсь, что если кто-то из них выиграет, он даст мне сумму b, и что если выиграю я, я дам ему столько же. Предположим, наконец, что с оставшимися $(p – 1)$ игроками, или, точнее, с каждым из них по-отдельности, я договариваюсь, что если кто-то из них выиграет, он даст мне сумму a, и что если выиграю я, я дам ему столько же.

Ясно, что условия игры справедливы, так как не ущемлены интересы ни одного игрока. И видно, что теперь я имею q шансов получить b, $(p – 1)$ шанс получить a и один шанс (если выиграю именно я) получить $(px + qx – bq – ap + a)$. По существу в этом последнем случае я получу ставку $(px + qx)$, из которой я должен буду отдать b каждому из q игроков и a – каждому из $(p – 1)$ игроков, а всего $qb + pa – a$. И, если $(px + qx – bq – ap + a)$ равно a, у меня будет p шансов получить a, – потому что я уже имел $(p – 1)$ шанс получить эту сумму, – и q шансов получить b. Таким образом, я возвращаюсь к своим прежним шансам и поэтому приравниваю $(px + qx – bq – ap + a) = a$ и, в соответствии с утверждением этого Предложения, нахожу, для стоимости моего шанса[5], что $x = (ap + bq)/(p + q)$.

В числах. Если я имею 3 шанса выиграть 13 и 2 шанса – выиграть 8, то в соответствии с этим правилом я, так сказать, обладаю суммой 11. И легко усмотреть, что, имея 11, я могу снова получить те же шансы. По существу я могу играть с четырьмя другими игроками, причем каждый из нас пятерых должен (peut) поставить 11. Я договариваюсь с двумя из них, что если кто-либо из них выиграет, он дает мне 8, а если выиграю я, я даю каждому из них ту же сумму. Я также договариваюсь с двумя другими, что тот из них, кто выиграет, даст мне 13, а если выиграю я, я дам каждому 13. Эта игра справедлива и видно, что я таким образом имею 2 шанса получить 8, а именно в случае когда выигрывает один из тех двоих игроков, которые обещали вычесть для меня эту сумму из ставки, и 3 шанса получить 13, либо если выиграет один из остальных двоих, которые обещали мне эту сумму при выигрыше, либо если я выиграю сам. На самом деле, в этом последнем случае я получаю ставку, которая равна 55, и из нее я должен буду отдать 13 каждому из первых двух игроков и 8 – каждому из двух других, так что мне останется также 13.

Предложение 4. Предположим[6], что я играю с кем-то при условии, что побеждает тот, кто первым выиграет три партии и что я уже выиграл две, а он – одну. Я желаю знать, какая часть ставки мне причитается, если мы захотим прекратить игру и справедливо разделить ставки.

Необходимо начать с наиболее простого случая, чтобы подойти к решению вопросов, поставленных раннее по поводу раздела ставки между многими игроками, шансы которых не равны друг другу. Вначале следует заметить, что достаточно рассмотреть те [несыгранные] партии, которых нехватает игрокам [для победы]. Потому что ясно, что если побеждает тот, кто первым выиграет 20 партий, и если я уже выиграл 19, а мой противник – 18, то мое преимущество оказывается тем же самым, что и в рассматриваемом случае, в котором при требуемых трех выигрышах я выиграл две партии, а он – только одну, так как в обоих случаях мне нехватает только одной партии, а ему – двух.

Затем, чтобы вычислить причитающуюся каждому из нас долю, следует обратить внимание на то, что произойдет, если мы продолжим игру. Ясно, что если я выиграю первую [из несыгранных] партию, я закончу игру и таким образом получу всю ставку, которую я обозначу a, но если первую партию выиграет другой игрок, наши шансы уравняются, поскольку каждому не будет хватать одной партии, и таким образом каждый получит право на $a/2$. И ясно, что у меня столько же шансов выиграть первую партию как проиграть ее. Поэтому я имею равные шансы получить a и $a/2$, что, по Предложению 1, соответствует их полусумме, т.е. $3a/4$, так что моему противнику остается $a/4$. Впрочем, я могу тем же методом и непосредственно проделать вычисления для него. Отсюда следует, что тот, кто захочет продолжить игру вместо меня, должен будет (pourrait) предложить мне $3a/4$ и что всегда можно держать пари в отношении 3:1, что игрок выиграет одну партию до того, как его противник выиграет две.

Предложение 5. Предполагается, что мне нехватает одной партии, а моему противнику – трех. В этом предположении речь идет о разделе ставки[7].

Предложение 6. Предположим, что мне нехватает двух партий, а моему противнику – трех.

[Ответ: $11a/16$ первому игроку.]

Предложение 7. Предположим, что мне нехватает двух партий, а ему – четырех.

[Ответ: $13a/16$ первому.]

Предложение 8. Теперь предположим, что играют трое и что первому, равно как и второму, нехватает одной партии, тогда как третьему нехватает двух.

Чтобы вычислить долю первого игрока, следует снова рассмотреть то, что произойдет с ним, если первую партию выиграет он сам или кто-то из двух других. Если выиграет он, то получит ставку, которую я обозначу через a. Если эту партию выиграет второй, то первый не получит ничего, потому что второй закончит игру. Если же выиграет третий, каждому из троих не будет хватать одной партии, так что первый, равно как и каждый из остальных, получит право на $a/3$. Итак, первый имеет 1 шанс получить a, 1 шанс получить 0 и 1 шанс получить $a/3$ (потому что каждый из трех имеет один и тот же шанс выиграть первую партию), так что в соответствии с Предложением 2 он получает $4a/9$. Второй игрок, стало быть, получает ту же долю, так что третьему остается $a/9$. Можно и непосредственно найти долю третьего и после этого вычислить доли остальных.

Предложение 9. Чтобы вычислить долю каждого из заданного числа игроков, каждому из которых нехватает заданного числа партий, следует прежде всего установить, чтó причитается некоторому игроку, а затем по очереди – остальным, если он сам или какой-то другой игрок выиграет следующую партию. Сложив все эти части и разделив полученную сумму на число игроков, мы получим его искомую долю. [Аналогично определяются доли остальных игроков.]

Пусть играют три человека, A, B и C, и A нехватает одной партии, а B, равно как и C – двух. Желательно знать, какая доля ставки, обозначенной через q, причитается игроку B. Прежде всего исследуем, на какую долю B будет иметь право, если он сам или A или C выиграет первую последующую партию. Если выиграет A, он закончит игру и, следовательно, B получит 0. Если выиграет сам B, ему, как и A, не будет хватать еще одной партии, тогда как C не будет хватать двух. В соответствии с Предложением 8, B получает право на $4q/9$. Наконец, если последующую партию выиграет C, и ему, и A не будет хватать одной партии, тогда как B не будет хватать двух. В соответствии с тем же предложением, B получает право на $q/9$. Теперь требуется сложить доли, которые достаются B по этим трем предположениям, т.е. 0, $4q/9$ и $q/9$. Получается $5q/9$. Разделив это число на три, т.е. на число игроков, получим $5q/27$, справедливую долю игрока B.

Мы это доказываем по Предложению 2. По существу, поскольку B имеет равные шансы получить 0, $4q/9$ и $q/9$, он, так сказать, имеет, в соответствии с этим предложением, $(0 + 4q/9 + q/9)/3$ или $5q/27$. И ясно, что делитель 3 равен числу игроков. Но чтобы узнать, что причитается в каждом случае каждому игроку, когда он сам или кто-то другой выигрывает первую последующую партию, следует начать с вычисления наиболее простых случаев и затем, исходя из этого, вычислять последующие случаи. Ибо, как в только что рассмотренной задаче, мы не смогли бы подчинить ее вычислению без решения Предложения 8, в котором недостающих партий было 1, 1 и 2. Равным образом, доля каждого игрока в случае, когда недостающих партий 1, 2 и 3, не может быть вычислена без предварительного исследования этих доль по тому же предложению и при 1, 2 и 2, и при 1 1 и 3 нехватающих партий. По этому методу можно найти доли, соответствующие числам, указанным в следующей таблице, и бесконечному множеству других.

Таблица для трех игроков

1, 1, 2/4:4:1	1, 2, 2/17:5:5	1, 1, 3/13:13:1
1, 2, 3/19:6:2	1, 1, 4/40:40:1	1, 1, 5/121:121:1
1, 2, 4/178:58:7	1, 2, 5/542:179:8	1, 3, 3/65:8:8
1, 3, 4/616:82:31	1, 3, 5/629:87:13	2, 2, 3/34:34:13
2, 2, 4/338:338:53	2, 2, 5/353:353:23	2, 3, 3/133:55:55
2, 3, 4/451:195:83	2, 3, 5/1433:635:119	

Примечание. Первые три числа в каждой шестерке чисел указывают количества недостающих партий, а последние три числа пропорциональны долям соответствующих игроков. Гюйгенс дополнительно привел единые знаменатели вторых троек чисел; так, в первом случае он указал 4/9 4/9 и 1/9, т.е. доли игроков. О.Ш.

Относительно игральных костей можно спросить: на какое количество бросков одной кости можно держать пари на выпадение шестерки, или, если на то пошлó, одного из других чисел? И также, что на двух костях выпадут две шестерки, или три шестерки на трех. И, в самом деле, можно задать еще и другие вопросы. Чтобы их разрешить, надо заметить следующее. Прежде всего, что при одной кости существует шесть равновероятных возможностей, потому что я предполагаю, что кость имеет форму совершенного куба. Далее, при двух костях существует 36 различных возможностей, которые также равновероятны. По существу, с каждым броском первой кости можно сочетать каждый из шести возможных номеров второй. И 6 раз 6 это 36.

Так же само имеется 216 возможностей при трех костях, потому что с каждой из 36 возможностей для двух костей можно сочетать любой из возможных исходов третьей и 6 раз 36 это 216. Так же само мы найдем, что при четырех костях имеется $6 \cdot 216 = 1296$ исходов и можно продолжать вычислять таким же образом для любого числа костей, умножая предыдущее число возможностей на 6 каждый раз, когда добавляется новая кость.

Далее, следует знать, что при одном броске двух костей можно только по одному разу добиться двух и 12 очков и по 2 раза – трех и 11 очков. И если обозначить эти две кости через A и B, то ясно, что для получения трех очков A должно дать одно очко и B – два или, конечно же, B – 1 и A – 2. То же самое для выкидывания 11 очков: A должно дать 5 и B – 6, или, разумеется, A – 6 и B – 5. Четыре очка осуществляются тремя способами, а именно A – 1, B – 3 или A – 3, B – 1, или A – 2 и B – 2. Также тремя способами выкидываются 10 очков; 5 и 9 очков – четырьмя способами; 6 или 8 очков – пятью; 7 очков – шестью.

С тремя костями мы находим число возможностей равным

Для 3 и 18 очков	1	Для 7 и 14 очков	15

Для 4 и 17 очков	3	Для 8 и 13 очков	21
Для 5 и 16 очков	6	Для 9 и 12 очков	25
Для 6 и 15 очков	10	Для 10 и 11 очков	27

Предложение 10. Найти на какое количество бросков одной кости можно держать пари о выпадении шестерки.

Ясно, что игрок, который согласится выкинуть 6 с одного раза, имеет 1 шанс выиграть ставку и 5 – чтобы ее потерять, потому что против него 5 возможностей и лишь одна – за него. Назовем ставку a. Имеется, стало быть, 1 шанс получить a, и 5 шансов не получить ничего, что означает для него, в соответствии с Предложением 2, получение $a/6$. Остальные $5a/6$ – тому, кто устроил игру. Ставка того, кто берется играть на указанных условиях, должна поэтому составлять лишь 1 против 5.

Доля того, кто берется выкинуть 6 в двух бросках, вычисляется следующим образом. Если он добьется успеха в первом броске, то выиграет a. Если нет, у него есть еще один бросок, который по предыдущему вычислению принесет ему $a/6$. Но у него есть только один шанс выкинуть 6 с первого раза и 5 шансов не добиться успеха. И поэтому он имеет вначале 1 шанс получить a и 5 шансов получить $a/6$, и это, в соответствии с Предложением 2[8], означает $11a/36$. Остается $25a/36$ тому, кто играл против него. Тот, кто берется играть на таких условиях, может поэтому ставить 11 против 25, что меньше, чем 1 против 2.

Отправляясь от этого результата, можно тем же путем вычислить, что доля того, кто берется выкинуть 6 с трех бросков, составляет $91a/216$ и что он может поэтому ставить 91 против 125, т.е. чуть меньше, чем 3 против 4. Доля того, кто играет на 4 броска, $671a/1296$ и он поэтому может ставить 671 против 625, т.е. более чем 1 против 1. Для пяти бросков доля игрока $4651a/7776$ и он может ставить 4651 против 3125, т.е. почти 3 против 2. Для шести бросков доля игрока $31\,031a/46\,656$ и он может ставить 31 031 против 15 625, т.е. почти 2 против 1.

Можно последовательно продолжать это вычисление для каждого количества бросков, но можно продвигаться и более быстро, как мы укажем в следующем предложении, в противном же случае вычисления становятся очень длинными.

Предложение 11. Найти, на какое количество бросков двух костей можно держать пари на выпадение двух шестерок.

Тот, кто берется это выполнить с одного раза, имеет 1 шанс выиграть, т.е. получить a, против 35 шансов проиграть, т.е. получить 0, поскольку всего имеется 36 возможностей. Таким образом, в соответствии с Предложением 2, он имеет $a/36$. Что касается того, кто играет на 2 броска, он выиграет a, если добьется успеха при первом броске. Если же нет, ему остается еще один бросок, который принесет ему $a/36$, как мы только что сказали. Но есть лишь один шанс выбросить две шестерки с первого раза против 35 и поэтому вначале имеется 1 шанс получить a и 35 шансов получить $a/36$, что доставляет ему $71a/1296$ в соответствии с Предложением 2. Тому, кто устроил игру, остается $1225a/1296$.

Можно, отправляясь от этого, найти шанс или долю того, кто играет на 4 броска и при этом перескочить через случай игры на 3 броска. По существу, тот, кто играет на 4 броска, получает a, если выбросит 2 шестерки в одном из первых двух бросков; если же нет, ему останутся еще 2 броска, что доставит ему $71a/1296$ по предыдущему вычислению.

Но по тому же вычислению он имеет 71 шанс выкинуть 2 шестерки в одном из первых двух бросков против 1225 шансов этого не достичь. Поэтому он вначале имеет 71 шанс получить *a* и 1225 шансов получить 71*a*/1296, что по Предложению 2 доставит ему 178 991*a*/1 679 616. Остается 1 500 625*a*/1 679 616 тому, кто играет против него. Шансы того и другого относятся поэтому как 178 991 к 1 500 625.

Отправляясь отсюда, можно тем же путем найти шанс того, кто играет на 8 бросков. И далее, исходя из этого, определить шанс игрока на 16 бросков. А отправляясь от шанса последнего игрока и учитывая шанс того, кто играл на 8 бросков, можно найти шанс того, кто играет на 24 броска. Поскольку в таких вычислениях дело идет главным образом о том, чтобы определить, при скольких бросках шансы обоих игроков начинают уравниваться, можно опустить часть последних цифр в числах [заменив их нулями], которые и без того стали слишком большими [длинными]. Я нахожу, что тот, кто играет на 24 броска, находится еще в слегка невыгодном положении и что соглашаться на выгодную игру можно только, если число бросков по меньшей мере равно 25.

Предложение 12. Найти количество костей, при которых можно согласиться выкинуть 2 шестерки с первого раза.

Это равносильно желанию узнать, за сколько бросков одной единственной кости можно рассчитывать дважды получить 6. В соответствии с тем, что было доказано выше, тот, кто возьмется выкинуть 2 шестерки за 2 броска, имеет право на *a*/36. Что же касается того, кто играет на 3 броска, то если его первый бросок не даст шестерки, у него останется еще 2 броска, каждый из которых должен дать ему 6, и это, как мы говорили, стоит *a*/36. Но если его первый бросок дает 6, ему нужно в двух последующих бросках выкинуть только одну шестерку, что по Предложению 10 даст ему 11*a*/36. И ясно, что у него есть 1 шанс выкинуть 6 с первого раза против 5 шансов не добиться успеха, так что вначале он имеет 1 шанс получить 11*a*/36 и 5 шансов получить *a*/36, что в соответствии с Предложением 2 доставит ему 16*a*/216 или 2*a*/27. Продвигаясь каждый раз на один бросок, найдем, что можно с преимуществом взяться выкинуть 2 шестерки на одной кости в 10 бросках или на 10 костях с первого раза.

Предложение 13. Предположив, что я бросаю один раз 2 кости и что я выиграю, если выкину 7 очков, и что мой противник выиграет, если выкинет 10, и что в остальных случаях мы делим ставку пополам, найти долю каждого.

Так как среди 36 возможностей, которые имеют место при двух костях, имеется 6 для семи очков и 3 – для 10, то остается 27, при которых не выигрывает ни один из нас. В этом последнем случае каждый получает право на *a*/2. В остальных случаях у меня 6 шансов выиграть, т.е. получить *a*, и 3 шанса проиграть, т.е. получить 0. В соответствии с Предложением 2 это стоит 2*a*/3. Поэтому я вначале имею 27 шансов получить *a*/2 и 9 шансов получить 2*a*/3, и, в соответствии с тем же предложением, это доставит мне 13*a*/24. Другому игроку остается 11*a*/24.

Предложение 14. Другой игрок и я по очереди бросают 2 кости с условием, что я выиграю, если выкину 7 очков, а он – если выкинет 6, и я отдаю ему первую очередь. Найти отношение наших шансов.

Пусть x – стоимость моего шанса и ставка a. Шанс другого игрока поэтому стоит $(a - x)$. Ясно также, что каждый раз, когда наступает его очередь, мой шанс снова стоит x. Но каждый раз, когда очередь моя, мой шанс должен стоить больше, допустим y. Или, поскольку среди 36 возможностей, которые имеют место при двух костях, 5 могут дать 6 очков моему противнику и он выиграет, и 31 возможность против него, что приведет к моей очереди бросать кости, и тогда я буду иметь 5 шансов получить 0 если он бросает первый раз [?] и 31 шанс получить y. По Предложению 3 это доставит мне $31y/36$.

Но мы указали, что в начале игры мой шанс равен x, так что $31y/36 = x$ и $y = 36x/31$. Мы, кроме того, установили, что, когда наступает моя очередь играть, мой шанс равен y. Но когда я бросаю, я имею 6 шансов получить a, поскольку для выкидывания семи очков, что приведет к моему выигрышу, существует 6 возможностей, и я имею 30 шансов передать очередь моему противнику, т.е. возыметь шанс x. Поэтому стоимость y равносильна 6 шансам получить a и 30 шансам получить x. По Предложению 3 я поэтому получаю $(6a + 30x)/36$ и это выражение равно y, а y по сказанному раннее равно $36x/31$. Поэтому должно быть

$$\frac{30x+6a}{36} = \frac{36x}{31},$$

откуда $x = 31a/61$ есть стоимость моего шанса. Следовательно, шанс моего противника $30a/61$ и соотношение наших шансов, стало быть, равно 31:30.

Я заканчиваю, указывая следом еще несколько задач.

1. *A* и *B* играют с двумя костями на таких условиях. *A* выигрывает, если он выкидывает 6 очков, а *B* – если выкинет 7. *A* начинает, затем *B* выбрасывает кости дважды. После этого *A* снова выбрасывает кости дважды и так далее [каждый по очереди выбрасывает кости дважды] пока кто-то из них не выиграет. Требуется определить отношение шансов *A* и *B*. Ответ: оно равно 10 355:12 276.

2. Три игрока, *A, B* и *C*, играют с 12 жетонами, из которых 4 белых и 8 черных при условии, что выиграет тот, кто первым вслепую вытащит белый жетон и что они вступают в игру по очереди; первым жетон вытаскивает *A*, затем *B* и *C*, далее снова *A* и т. д. Требуется определить отношение их шансов[9].

3. *A* держит пари против *B* на то, что из колоды в 40 карт, по 10 каждой масти, он вытянет 4 карты, по одной каждой масти. Оказывается, что в этом случае шансы *A* и *B* относятся как 1000:8139[10].

4. Пусть, как и выше, имеются 12 жетонов, 4 белых и 8 черных. *A* держит пари против *B*, что из 7 жетонов, которые он выберет вслепую, 3 окажутся белыми. Требуется определить отношение их шансов[11].

5. *A* и *B*, имея по 12 жетонов, играют с тремя костями при условии, что при каждом выкидывании 11 очков *A* должен отдать один жетон *B*, а *B* должен отдать жетон *A* при каждом выкидывании 14 очков, и выигрывает тот, кто первым завладеет всеми жетонами. В этом случае оказывается, что шансы *A* и *B* относятся как 244 140 625 к 282 429 536 481[12].

Примечания

1. Ван Схутен никогда не приписывал себе сочинения Гюйгенса, фраза которого неудачна.

2. Диофантовы задачи, как их назвал Гюйгенс, оказались исключительно важными и ему, пожалуй, не следовало упоминать их несколько пренебрежительно.

3. Принцип, или исходное начало, был(о) тем же самым: математическое ожидание выигрыша в азартной игре.

4. Справедливой игрой сейчас более четко называется игра, при которой математические ожидания выигрыша (или проигрыша) игроков одинаковы.

5. Бернулли (1713, p. 9) обосновал это предложение гораздо проще. Если каждый из p игроков получит a, а каждый из q игроков получит b, и если выгоды всех должны быть одинаковы, то ожидание каждого и составит указанную Гюйгенсом величину.

6. Здесь и в нескольких случаях ниже Гюйгенс фактически сформулировал не предложения, а задачи.

7. Фактически имея в виду свое замечание (начало Предложения 4) о том, что в подобных задачах можно и не обуславливать заранее количества партий в игре, Гюйгенс ни здесь, ни в следующих двух предложениях этого количества и не указывает. Решение, опять-таки как и в двух последующих случаях, сводится к предшествующим вариантам; здесь, например, к условиям Предложения 4. Ответ таков: первый игрок получает $7a/8$. Кроме того, Гюйгенс здесь дополнительно рассматривает случай, не оговоренный в условии, а именно: нехватает одной и четырех партий. Ответ таков: первый получает $15a/16$.

8. Здесь и в нескольких других случаях ниже Гюйгенс ошибочно ссылается на свое предложение 2 вместо Предложения 3.

9. Бернулли (1713, p. 61) заметил, что жетоны могут извлекаться либо с возвращением, либо без и что их количество могло было быть либо 12. либо 36 (если каждый игрок имел по 12).

10. По формуле $p = (C_{10}^1)^4/C_{40}^4$ соотношение шансов, как заметила David (1962, p. 119n), оказывается равным 1000:9139.

11. Подобные задачи, приводящие к гипергеометрическому распределению, оказались важными для статистического контроля продукции.

12. Первую и третью задачи предложил Ферма, а пятую – Паскаль.

Библиография

Шейнин О.Б. (Sheynin O.B.) (1977), Early history of the theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci*., vol. 17, pp. 201 – 259.

--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин.

Bernoulli J. (1713, латинск.), *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1899). Thun – Frankfurt/Main, 1999.

David, F.N. (1962), *Games, Gods and Gambling*. London.

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York.

3. Исаак Ньютон

Ньютон (1642 – 1727) не опубликовал никаких сочинений по теории вероятностей, однако он был знаком с ее тогдашним состоянием. Ниже мы публикуем перевод его комментария к трактату Гюйгенса 1657 г., в котором содержатся указание на возможность статистического определения вероятности события и, фактически, введение геометрической вероятности. Известно, что Монмор поднес ему экземпляр своей книги (см. раздел, посвященный ему в этом сборнике) и что Ньютон был в дружеских отношениях с Муавром и сильно повлиял на него и, можно сказать, на развитие теории вероятностей. Вот мнение Пирсона (Pearson 1926):

Идея Ньютона о вездесущем божестве, которое сохраняет средние статистические значения, составила фундамент статистического развития по цепочке Дерхам [религиозный философ] – *Зюссмильх – Нивентит* [статистик] – *Прайс* [см. мемуар Бейеса в нашем сборнике] –
Кетле – Флоренс Найтингейл.

О сохранении средних значений Ньютон все же не упоминал, но есть у него активирующее и регулирующее божество Newton (1704, Вопрос 31):

Слепая судьба никогда не могла бы заставить планеты двигаться по одному и тому же направлению по концентрическим орбитам за исключением некоторых незначительных неправильностей, которые могли происходить от взаимных действий комет и планет друг на друга и которые будут вероятно нарастать <u>пока эта система не потребует</u> [божественной] *<u>реформации</u>. Для столь чудесной однородности планетной системы следует допустить действие выбора. О том же свидетельствует однообразие в телах животных.*

В русском переводе подчеркнутые нами слова чудесным образом исчезли. Заметим, наконец, что при изучении хронологии древнего мира, Ньютон (1728, с. 52) применил вероятностный довод для оценки длительности правления династий:

Греческие хронисты ... утверждали, что цари их нескольких городов ... правили в среднем по 35 – 40 лет, что настолько превосходит ход событий в природе, что не может быть признано. Ибо в соответствии с обычным ходом природы цари правят в среднем около 18 или 20 лет, иногда в среднем на 5 или 6 лет дольше, а иногда на столько же короче. 18 или 20 лет является средней величиной.

Свою собственную оценку Ньютон вывел на основании других хронологических данных.

О Ньютоне см. также David (1959), Schell (1960), Шейнин (1971; 2005, с. 42 – 45), Gani (1982), Hald (1990, pp. 170 – 182, 189).

Рукопись без названия [Замечания к трактату Х. Гюйгенса 1657 г.]

Newton I. (1664 – 1666), *Math. Papers*, vol. 1. Editor, D.T. Whiteside. Cambridge, 1967, pp. 58 – 61.

1. Пусть p – число шансов, один из которых может доставить мне выигрыш a, q – шансы, один из которых может доставить мне b и r – шансы, один из которых может доставить мне c и все эти шансы равны друг другу и один из них должен обязательно произойти. Моя надежда или шанс сто́ит

$$\frac{pa + qb + rc}{p + q + r} = A. \qquad (1)$$

То же самое будет верно, если p, q, r обозначают любое соотношение шансов [любые соотношения между шансами] для получения a, b, c.

2. Если я договариваюсь больше чем на один шанс (т.е., если, после получения выигрыша за свой первый шанс от ставки $a + b + c$, я решаюсь на второй шанс от оставшейся ставки и т. д.), мой второй жребий сто́ит

$$A - \frac{A^2}{a + b + c} = B.$$[1]

[Мои третий, четвертый, пятый, шестой жребии сто́ят][2]

$$A\frac{-A^2 - AB}{a + b + c} = C, A\frac{-A^2 - AB - AC}{a + b + c} = D,$$

$$A\frac{-A^2 - AB - AC - AD}{a + b + c} = E, A - A\frac{A + B + C + D + E}{a + b + c}.$$

Как будто 6 человек (1, 2, 3, 4, 5, 6) бросают игральную кость и тот, кто выбросит пять очков, выигрывает a. Поскольку при каждом броске существует лишь один шанс для выигрыша a и 5 шансов, чтобы ничего не выиграть, я принимаю $b = 0 = c = r$, $p = 1$ и $q = 5$. Поэтому жребий первого сто́ит $a/6$. Жребий второго сто́ит $a/6 - a/36 = 5a/36$. [Жребий третьего, четвертого, пятого, шестого, … сто́ят]

$5a/36 - 5a/216 = 25a/216$; $25a/216 - 25a/1296 = 125a/1296$;

$125a/1296 - 125a/7776 = 625a/7776$;

$625a/7776 - 625a/46\,656 = 3125a/46\,656$; …

Так что их жребии относятся как 7776:6480:5400:4500: 3750:3125[3].

Поэтому, если я брошу кость дважды или больше, соотношение шансов в пользу выпадения пятерки при первом броске будет 1:5 [и при следующих бросках соответственно]

11:25, 91:125, 671:625, 4651:3125 и т. д.[4]

3. Если я договорюсь бросить несколько жребиев один за другим на ту же самую ставку, то цена каждого определится следующим образом. Первое Предложение[5] дает значение первого жребия; вычитая это значение из ставки, получим остаток, т.е. ставку для второго жребия, который поэтому также может быть найден в соответствии с первым Предложением и т. д.

Как будто я выигрываю *a*, если выброшу 12 очков при первом броске двух костей, или 11 очков при втором или 10 при третьем, и т. д. При первом броске имеется всего один шанс для выигрыша *a* (т.е. для выбрасывания 12 очков), и 35 шансов, чтобы не выиграть ничего, поэтому по Предложению 1 его значение $a/36$. И ставка для второго броска $a - a/36 = 35a/36$. Поскольку для него имеются два шанса (т.е. 6, 5; 5, 6) и 34 шанса для 0, его значение равно

$$\frac{2 \cdot 35a}{36 \cdot 36} = \frac{35a}{648}.$$

И ставка для третьего жребия $595a/648$, для которой имеются три шанса (т.е. 5,5; 6, 4; 4, 6) и 33 для нуля. Его значение поэтому равно 595a/7776.

4. Пусть я договариваюсь с одним или двумя бросать жребии по порядку пока один из нас не выиграет ставку *a*. Поскольку шансы могут следовать один за другим неопределенно, я рассматриваю только их первый круг. Значения полного ожидания каждого игрока относятся друг к другу так же, как значения их жребиев в одном круге. И значение первого жребия каждого относится к значению его полного ожидания как сумма значений их первых жребиев к ставке *a*.

Пусть я договариваюсь (contend) с другим, что кто первый выбросит 12 очков двумя костями, получит *a* и кости находятся у меня. Мой первый жребий, по Предложению 1, сто́ит $a/36$. Первый жребий второго игрока сто́ит $35a/36$. И $(a/36):(35a/36^2) = 36:35$ это отношение моего ожидания к его ожиданию. Ибо эти два первых жребия составляют первый круг, потому что, если я брошу кости вторично, я получу тот же жребий. Следовательно.

[$36 + 35 = 71:a = 36:(36a/71)$] $36a/71$ это мой интерес в ставке[6].

Если мы договариваемся таким образом, что в начале игры существует какой-то жребий, который не возвращается после [некоторых] кругов, надо вычесть значение этих беспорядочных жребиев из ставки и остаток будет ставкой для тех жребиев, которые следуют и вращаются [по кругу] одни за другими. Как будто я договариваюсь (contend) с другим, что тот, кто первым выбросит 11 очков, должен получить *a*, но только я имею право на первый бросок с целью выбросить 12. Мой первый жребий сто́ит $a/36$. И наша ставка после бросков [?] $35a/36$. Его первый жребий $35a/648$. И мой следующий жребий $595a/11\,664$. Так что его доля ставки $35a/36$ относится к моей как $(35a/648):(595a/11\,664) = 18:17$ и моя доля в ней поэтому $17a/36$[7]. К этому я добавляю значение своего первого жребия, т.е. $a/36$, что в сумме составит $18a/36 = a/2$, т.е. мой интерес в ставке *a* в начале игры.

5. Если соотношение шансов, относящихся к любой ставке, иррационально, интерес в ставке может быть найден тем же самым путем. Пусть радиусы *ab*, *ac* делят горизонтальный круг *bcd* на две части, *abec* и *abdc* в такой пропорции как 2 к $\sqrt{5}$ [Рис. 1][8]. И если мяч, падающий перпендикулярно на центр *a,* скатится в часть *abec*, я выиграю *a*, а если в другую часть, я выиграю *b*. Моя надежда сто́ит

$$\frac{2a+b\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}.$$

И если игральная кость является не правильным телом, а параллелепипедом или имеет неравные грани (sides) каким-то иным образом, можно определить насколько легче добиться одного исхода нежели другого[9].

6. Так что, если легкость осуществления шансов и ставки, относящиеся к каждому шансу, известны, стоимость жребия может быть всегда найдена при помощи предшествующих правил. А если оба указанных обстоятельств не известны непосредственно, их необходимо отыскать прежде, чем может быть найдено значение жребия.

Если мне нехватает для выигрыша двух очков при игре в Irish, а моему противнику – трех очков, и я хочу знать свой интерес в ставке *a*, мой первый жребий не может принести мне ничего, кроме преимущества [возможности] другого [следующего] жребия и поэтому, чтобы узнать его стоимость, я вначале должен найти стоимость другого и т. д. Поэтому, если вначале каждому из нас нехватало одного очка, чтобы выиграть *a*, наш интерес в этой ставке будет одним и тем же, т.е. стоимость моего жребия $a/2$. Во-вторых, если мне нехватает одного очка, а моему противнику – двух очков, и я выигрываю следующую партию, я получаю *a*, но если я ее проиграю, я только получаю для следующей партии равный жребий относительно *a*, который сто́ит $a/2$. Поэтому мой интерес в ставке равен $[a + (a/2)]/2 = 3a/4$. В третьих, если мне нехватает одного очка, а моему противнику – трех очков, и я выигрываю следующую партию, я получаю *a*. Но если я ее проигрываю, мне не будет доставать одного очка, а моему противнику – только двух очков, т.е. я получаю $3a/4$. Поэтому (поскольку имеется один шанс для получения *a* и один для получения $3a/4$), мой интерес в ставке равен $[a + (3a/4)]/2 = 7a/8$. В четвертых, если мне нехватает двух очков, а моему противнику – трех, и я выиграю, я получу $7a/8$. Но если я проиграю, я получу $a/2$, так как наши шансы тогда станут равными друг другу. Поэтому мой интерес в ставке равен $11a/16$. Если мне нехватает 1 очка, а моему противнику – 4, мой интерес в ставке *a* равен $15a/16$. Если мне нехватает двух, а ему – 4, она равна $13a/16$. Если мне нехватает трех очков, а ему – четырех, он равен $21a/32$. Если мне нехватает одного, а ему – 5, он равен $31a/32$. Если мне двух, а ему – 5, он равен $57a/64$. Если мне 3, а ему – 5, он $99a/128$. Если мне 4, а ему 5, – $163a/256$.

(Аналогичное может быть проделано, если играют трое игроков или больше. Если одному нехватает одного очка, другому – 3, третьему – 4, их жребии относятся как 616:82:31 и т. д. И также если их жребии различны (... if their lots be of divers sorts)).

Таким путем могут быть также решены некоторые предшествующие задачи, как например: я выиграю *a*, если выброшу пятерку при двух бросках одной кости. Если я потеряю свой первый жребий, у меня имеется при втором броске пять шансов не получить ничего и один шанс получить *a* и поэтому этот бросок сто́ит $a/6$. Таким образом, при первом броске я имел пять шансов получить $a/6$ и один шанс получить *a*, что, вместе со вторым броском, сто́ит 11*a*/36. Т.е., как было получено раньше, это 11:25, что я один раз выброшу пятерку при двух бросках. Таким же путем я могу узнать свой жребий при выборе 4 карт различных мастей из колоды в 40 карт по 10 карт каждой масти. Или вслепую выбрать по одному белому и черному камешку из двух белых и трех черных.

Примечания

1. Условия задачи неясны, но нетрудно догадаться, что величина A вычитается из a, b, c пропорционально самим этим числам, т.е.

$$a_1 = a - \frac{aA}{a+b+c} \text{ и т. д.}$$

Более естественно было бы, пожалуй, принять коэффициенты при A, пропорциональные p, q, r. Следующие три формулы были, очевидно, выписаны (или прочитаны, или напечатаны) небрежно: указанные в них дроби следовало вычитать из A.

2. Здесь и в нескольких местах ниже мы изменили порядок записи. В оригинале после каждого жребия была указана соответствующая формула, мы же отделили текст от формул.

3. Эти числа равны соответственно 6^5; $6^4 \cdot 5$; $6^3 \cdot 5^2$; $6^2 \cdot 5^3$; $6 \cdot 5^4$ и 5^5. *Д.Т. Уайтсайд.*

4. Эти шансы равны соответственно

1/6; 1/6 + 5/36; 1/6 + 5/36 + 25/216 и т. д. *Д.Т. Уайтсайд.*

5. Ньютон, видимо, имеет в виду формулу (1).

6. Дробь 36/71 следует непосредственно из отношения 36:35, но вот равенство в квадратных скобках непонятно.

7. “Мой следующий жребий” сам по себе равен 1/18; учитывая убывание ставки сначала на 1/36, а затем на 35/648 частей, этот жребий оказывается несколько меньшим и именно равным 595/11 664. Но если исходить из соотношения 18/17, доли ставки должнеы быть 18/35 и 17/35. Получение доли 17/36 непонятно.

8. Здесь Ньютон обобщает гюйгенсово понятие математического ожидания и (см. чуть ниже) фактически вводит геометрическую вероятность.

9. Мы полагаем, что Ньютон имел в виду не вычисления, а определение теоретической вероятности по статистическим данным и эту мысль, правда, лишь намеченную, он сформулировал намного раньше, чем Якоб Бернулли, который исходил из нее в своем законе больших чисел.

Библиография

Шейнин О.Б. (Sheynin O.B.) (1971), Newton and the classical theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 7, pp. 217 – 243.

--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк.* Берлин.

David F.N. (1959), Newton, Pepys and Dyse: a historical note. *Annals of Science*, vol. 13, pp. 137 – 147.

Gani J. (1982), Newton and the “Question touching ye different odds upon certain given chances upon dice”. *Math. Scientist*, vol. 7, pp. 61 – 66.
Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York.
Newton I. (1704), *Optics*. London, 1931. Русский перевод: М., 1954.
--- (1728), *Chronology of Ancient Kingdoms Amended.* London, 1770.
Pearson K. (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries*. Лекции 1921 – 1933 гг. Редактор E.S. Pearson. London.
Schell E.D. (1960), Pepys, Newton, and probability. *Amer. Statistician*, vol. 14, No. 4, pp. 27 – 30.

4. Пьер Ремон Монмор

В 1708 г. Монмор (1678 – 1719) опубликовал книгу, предисловие к которой мы ниже приводим в переводе, а в 1713 г. переиздал ее с важным дополнением, – с текстами писем, которыми он обменялся с Николаем Бернулли; одно из писем последнего мы также перевели в этом сборнике. Непонятно почему оба издания вышли в свет анонимно: вряд ли кто-нибудь из читателей не узнал их автора, да и зачем вообще было прятаться? Сочинение Монмора было первым трактатом по теории вероятностей, опубликованным после сочинения Гюйгенса 1657 г. и оно оказало влияние и на Николая Бернулли, и на Муавра. См. о нем Hald (1990, Chapter 18).

Опыт исследования азартных игр

Montmort P.R. (1708), *Essay d’analyse sur les jeux de hazard.* Paris, 1713. Перепечатка: Нью Йорк, 1980. Прижизненные издания публиковались анонимно

Предисловие (с. iii – xxiv)

[1] Уже издавна геометры [математики] похвалялись, что могут своими методами обнаруживать в естественных науках все истины, доступные человеческому разуму. И замечательный союз, который существует в течение последних 50 лет между геометрией и физикой[1], ясно показал, что они вынудили общество признать, что их слова о превосходстве геометрии не лишены основания. А какая слава покроет эту науку, если она сможет еще послужить для упорядочения людских суждений и образа действий людей в практической жизни!

Старший из братьев Бернулли, каждый из которых столь известен в научном мире, не думал, что невозможно привести геометрию к этому. Он взялся дать правила для суждения о вероятности будущих событий, знание которых скрыто от нас, в играх и в других событиях жизни, зависящих только от случая. Его труд [1713] будет озаглавлен *Искусство предположений*; преждевременная смерть помешала ему закончить эту работу. И Фонтенель, и Сорен кратко описали эту [еще не вышедшую] работу, первый – в *Histoire de l’Académie* [*des Sciences Paris*] за 1705 г. [1706], с. 148, второй – в *Journal des Sçavans de France* за 1706 г., с. 81. Вот, в соответствии с этими авторами, структура книги.

Бернулли разбил ее на четыре части; в первых трех частях он решил различные задачи на азартные игры и там можно будет найти много нового о бесконечных рядах и сочетаниях и перестановках, равно как и решение пяти задач, давно уже предложенных геометром Гюйгенсом

[1657]. В четвертой части он применил методы, данные им в первых трех частях, для решения различных моральных, политических и гражданских задач[2]. Мы совсем не знаем ни для каких игр этот автор решил задачу о разделе ставки, ни какие политические и моральные темы он хотел осветить. Но как ни поразителен план книги, можно полагать, что этот ученый автор выполнил его в совершенстве. Бернулли намного превосходил других по желанию внушать уважение и принадлежал к тому небольшому числу людей, которые способны изобретать, так что я убежден, что он стремился осуществить все то, что обещало заглавие его книги.

[2] Ничто так не замедляет продвижение наук и не представляет столь мощного препятствия открытию скрытых истин, как наше неверие в собственные силы. Большинство вещей, которые кажутся невозможными, таковы лишь потому, что мы не используем всех возможностей нашего разума. Многие мои друзья уже давно побуждали меня выяснить, не может ли алгебра как-то определить преимущество банкомёта в игре фараон. Я никогда не посмел бы предпринять такое исследование, потому что знал, что число перестановок из 52 карт превосходит более чем в сто тысяч миллионов раз число песчинок, которые могли бы содержаться в объеме земного шара. И я не считал возможным выбрать среди такого громадного числа те перестановки, которые благоприятны банкомёту, и те, которые ему безразличны или неблагоприятны для него.

Я находился бы еще в этом предубеждении, но несколько лет назад успех покойного Бернулли побудил меня исследовать различные случаи в этой игре. Я преуспел больше, чем смел ожидать, потому что кроме общего решения этой задачи усмотрел пути, по которым надлежит следовать, чтобы решить бесконечное множество таких же или даже намного более трудных задач. Я знал, что в мире азартных игр, в который еще никто не заходил, можно итти намного дальше и надеялся, что удастся собрать там богатый урожай столь же любопытных и новых истин. Это привело меня к мысли добраться до сути темы и к желанию в некотором смысле возместить обществу ту потерю, котрую оно понесет, если лишится отличного труда Бернулли. И в этом намерении меня укрепили различные мысли.

[3] Слабость человеческого разума особенно проявляется в азартных играх, которые склоняют его к суевериям. Нет ничего более обычного, чем увидеть, как игроки приписывают свои неудачи тем, кто подходил к ним [во время игры] и другим обстоятельствам, которые столь же безразличны к происходившему в игре. Есть такие, кто считает для себя законом играть только с теми колодами карт, с которыми они раннее выиграли, поскольку верят, что с этими колодами связано определенное счастье. Другие, напротив, неуклонно выбирают проигравшие колоды, полагая, что после многих проигрышей дальнейшая неудача менее вероятна, – как будто прошедшее может что-то определить в будущем[3]. Есть такие, которые выбирают для игры определенные места и дни. Можно видеть игроков, соглашающихся тасовать карты только, если они находятся в определенном порядке, и верящих, что определенно проиграют, если нарушат это правило. Наконец, большинство ищет преимущество там, где его нет, или, точнее, полностью забывает о нем [о соотношении шансов].

Почти то же можно сказать о поведении людей во всех жизненных делах, в которых случай играет какую-то роль. Ими владеют те же предрассудки, их хлопотами руководит воображение, которое ослепляет их страхи и надежды. Они часто отказываются от небольшого верного блага, чтобы безрассудно гнаться за бóльшим, завладеть которым почти невозможно. А часто ввиду сильного недоверия они отступаются от значительных и вполне обоснованных надежд, чтобы сохранить благо, стоимость которого не идет ни в какое сравнение с тем, чем они пренебрегают.

Общий принцип этих предрассудков и заблуждений состоит в том, что большинство людей приписывает распределение хорошего и плохого и вообще всех событий в этом мире неизбежной силе, которая действует без правил, беспорядочно. Они верят, что лучше отдаться на милость этому слепому божеству, называемому фортуной, нежели заставить его быть благосклонным, следуя правилам предусмотрительности, которые кажутся им вымышленными.

[4] Я, однако, полагаю, что не только игрокам, но и всем вообще полезно знать, что случай подчиняется познаваемым правилам, и что незнание этих правил ежедневно приводит их к ошибкам, тягостные последствия которых с большим правом должны быть отнесены к ним самим, а не к обвиняемой ими судьбе. В качестве доказательства я могу привести бесконечное количество примеров, связанных с играми или с другими областями жизни, в которых события зависят от случая. Ясно, что люди ни в какой достаточной мере не используют свой разум, чтобы получить то, что они желают даже самым страстным образом, и не стремятся лишить фортуну того, что можно похитить у нее по правилам осмотрительности.

Можно полагать, что эта тема возбудит любопытство даже у тех, кто меньше всего интересуется отвлеченными знаниями. Естественно, людям нравится ясно представлять себе свои поступки даже независимо от всякого интереса и без сомнения игра будет доставлять больше удовольствия, если удастся в каждый момент знать ожидаемый выигрыш или риск проигрыша, которому подвергаешься. Можно будет относиться более спокойно к событиям в игре и лучше представлять себе смехотворность тех постоянных жалоб, которые позволяет себе большинство игроков в самых обычных неблагоприятных для них случаях.

[5] Если точное знание случаев в игре само по себе недостаточно игрокам для выигрыша, оно по крайней мере может послужить для выбора лучшего продолжения игры при сомнительных обстоятельствах, и, что очень важно, для понимания, в какой степени неблагоприятны для них условия таких игр, которые ежедневно привносятся в жизнь скаредностью и безделием. Я же верю, что если игроки узнают, что когда они ставят в фараоне луидор, т.е. 13 ливров [старинные монеты], на карту, которая прошла трижды, так что остаток колоды не более 12 карт, то это в точности означает, что они просто дарят банкомёту 1 ливр 1 су и 8 денье. Мало кто захочет испытывать судьбу в столь неблагоприятных условиях.

Наиболее часто поведение людей определяет их счастливую или несчастную участь и разумный человек оставляет на волю случая как можно меньше. Мы не можем знать будущее, но всегда в состоянии точно узнать в азартных играх и часто в других жизненных делах насколько более вероятно, что некоторое событие произойдет определенным образом скорее чем любым иным! И поскольку таковы границы нашего познания, мы по крайней мере должны пытаться достичь их.

Всем известно, что в спорных вопросах мы должны отыскивать правдоподобное, чтобы приблизиться к истине, но нам совсем недостаточно известно, каковы бóльшие и меньшие правдоподобия. И поскольку для верного суждения разум должен различать все эти степени, постольку часто может случиться, что что-то, казавшееся недостоверным, тем не менее, как ясно и даже очевидно, правдоподобно и более правдоподобно, чем всё остальное.

Представляется, что до сих пор было весьма недостаточно отмечено, что можно составить безошибочные правила для вычисления разностей, существующих между различными вероятностями.

[6] В нашей книге мы пытаемся приложить это новое искусство к теме, которая до сих пор пребывала в потемках и, как представлялось, не поддается никаким точным подсчетам. Мне думается, что это удивительное искусство более чем любое иное может быть использовано для [математического] анализа нашей темы. Оно – ключ ко всем точным наукам и им пренебрегали по всей видимости лишь потому, что недостаточно представляли широту ее приложений. Ибо, вместо того, чтобы, как до сих пор, применять алгебру и анализ лишь для отыскания постоянных и незыблемых отношений между числами и между фигурами, здесь они служат для обнаружения отношений вероятностей недостоверных вещей, которые никак нельзя закрепить, которые, как кажется, резко противопоставлены духу геометрии и находятся в некотором смысле вне действия ее законов. И это то, что привело прославленного автора [некролога] в *Histoire de l'Académie*, в указанном выше месте, к разумному чувству:

> *Для духа геометрии менее славно управлять физикой, чем моральными вещами, столь случайными, сложными и изменчивыми. Чем больше какая-нибудь тема противостоит и не поддается геометрии, тем бóльшая честь ее обуздать.*

[7] Я разбил этот трактат на четыре части. Первая заключает полную теорию соединений. Во второй я решаю различные задачи на нынешние карточные игры и прежде всего исследую те, которые имеют чисто случайный характер. Таковы фараон, Bassete, ландскнехт и тринадцать. Я определяю, каковы преимущества игроков и неблагоприятные для них случаи при всех возможных обстоятельствах этих игр. В решении этих задач геометры найдут всю желаемую ими общность, а игроки встретят весьма особые и важные для них новшества. Я ограничился исследованием этих четырех игр, чтобы книга никак не оказалась слишком объемистой, притом именно их я предпочел другим, потому что они более в ходу и казались мне наиболее любопытными.

Остаток этой второй части книги содержит решение различных задач на другие игры, – Hombre, пикет, империал, Brelan и другие. По причинам, указанным на с. 157 – 161, я не смог исследовать эти игры так же подробно как предыдущие[4].

В третьей части содержится решение всех вопросов, которые могут быть предложены в Quinquenove, в игре в три кости и в игре Hazard [Hasard]. Первые две это единственные игры в кости, которые в ходу во Франции, последняя же известна только в Англии. Далее, я указываю правила для самой как только возможно совершенной и хитроумно придуманной игры, которая равным образом близка к двум карточным играм, – к le Her и к тонтине[5]. Тот, кто показал мне эту игру, не смог сказать как она называется и, чтобы не оставлять ее безымянной, я называю ее игрой в надежду. Далее, в третьей части находится также решение некоторых весьма нетрудных задач об игре в триктрак и одна из них может оказаться в некоторой степени полезной для игроков. Я заканчиваю эту третью часть весьма общими задачами на игру в кости и привожу таблицы, которые [опять же] могут оказаться полезными для игроков. В качестве примеров я исследую три задачи. Одна из них посвящена игре на первое Rafle[6], вторая – на три Rafles, третья – на игру, которую барон de la Hontan упомянул во втором томе своих *Voyages* [1706] и которая, как он сообщает, весьма популярна среди дикарей [туземцев] Канады. Ее название Noyaux (косточки), что не звучит пышно.

Можно заметить, что все различные игры в кости, которые мы исследуем в третьей части, неблагоприятны для того, кто держит их, тогда как в карточных играх, таких как фараон, Bassete, ландскнехт и тринадцать, банкомёты обладают значительным преимуществом. Можно полагать, что придумавшие эти игры вовсе не собирались сделать их совершенно справедливыми, или же, что представляется более правдоподобным, весьма плохо представляли себе их суть и не могли верно распределить случаи. В большинстве игр условия настолько неблагоприятны для игроков, что можно обоснованно утверждать, что нельзя выиграть честно и так же само без сомнения нельзя проиграть не будучи простофилей.

Хотя в этом трактате я главным образом имел в виду доставить удовольствие геометрам, а не пользу игрокам, и хотя по нашему мнению тот, кто теряет время на игру, вполне заслуживает потерять и деньги, я нисколько не пренебрегаю нахождением преимущества или ущерба игроков и замечаниями о том, как следует видоизменить игры, чтобы они стали совершенно справедливыми.

[8] В четвертой части я привожу решение пяти задач, предложенных Гюйгенсом, и добавляю к ним много других. Некоторые из последних кажутся любопытными и быть может достаточно трудными. Я заканчиваю, предлагая в подражание Гюйгенсу четыре в известной степени особые задачи[7]. Но я полагаю, что обязан уведомить геометров, которые пожелали бы попытаться решить их, что эти задачи не окажутся легче наиболее трудных задач интегрального исчисления. Тот, кто рассматривает эти вопросы лишь как арифметические задачи, убедится, что они требуют меньших знаний геометрии, но быть может больше сноровки и наверняка намного большей точности [строгости мышления].

Имей я в виду следовать во всем плану Бернулли, я добавил бы пятую часть, приложив в ней методы, содержащиеся в первых четырех частях, к политическим, экономическим и моральным темам. Что мне препятствует, так это трудность, представившаяся при выборе предположений, которые, будучи приложены к достоверным событиям, смогли бы руководить мной и помогать мне в моих исследованиях. Но полностью я вовсе не удовлетворен и полагаю, что будет лучше вернуться к этой работе в другое время или предоставить славу кому-либо более умелому, нежели говорить о вещах либо весьма обычных, либо малоточных [не допускающих точности] и никак не соответствующих ни ожиданиям читателей, ни красоте темы. Я ограничусь более кратким замечанием, чем это было бы возможно, о соотношении этой темы с играми и о взглядах, которые следует принять, чтобы достигнуть указанного.

[9] Строго говоря, ничего не зависит от случая. Изучая природу, вскоре убеждаешься, что ее Творец поступал в общей и единообразной манере, исполненной мудрости и бесконечного провидения. И чтобы придать этому слову *случай* идею, соответствующую истинной философии, следует полагать, что все вещи упорядочены в соответствии с достоверными законами. Однако, установленный порядок наиболее часто нам неизвестен и те вещи зависят от случая, естественные причины которых скрыты от нас. В соответствии с этим определением можно сказать, что жизнь человека это игра, в которой царствует случай.

Следует более точно усмотреть, что анализ геометров и главным образом анализ, применяющийся в нашем трактате, пригоден для того, чтобы отчасти рассеять тьму, которая, как представляется, окутывает события гражданской жизни, имеющие отношение к будущему. Для этого заметим, что, как существуют игры, подчиняющиеся одному лишь случаю и другие, частично зависящие от него, а частично от умения игроков, – так в некоторых событиях в жизни успех полностью определяется случаем, а в других существенное значение имеет образ действий людей. И вообще, во всех вещах жизни, по поводу которых мы принимаем решения, наши размышления должны сводиться, как и при участии в играх, к сравнению числа случаев появления и непоявления некоторого события. Или, говоря геометрически, должны сводиться к исследованию, не будет ли то, что мы ожидаем, умноженное на существующую степень вероятности получить это, равно нашей ставке (т.е. авансу, который мы должны внести трудом, в деньгах, кредитом и т. п.) или больше нее.

Отсюда следует, что те же правила анализа, которые служили нам для определения решений игроков и манеры, в которой им следует проводить игру, могут также служить для установления точной степени наших ожиданий в различных мероприятиях и для обучения образу действий, которого мы должны придерживаться, чтобы получить наибольшую возможную выгоду. Ясно, например, что метод, послуживший нам для определения обстоятельств, при которых следует отказаться в игре Hombre от причитающихся фишек не теряя надежды сыграть большой шлем, можно применить, хоть и с бóльшим трудом, чтобы установить при каких обстоятельствах жизни следует пожертвовать малым благом в надежде получить больше.

[10] Продолжая это сравнение, следует заметить, что те же причины, помешавшие нам разрешить все вопросы по поводу игр, препятствуют решению тех, которые могут быть предложены о событиях гражданской жизни. Эти причины подразделяются на два вида. Первый, эта наша неопределенность по поводу решений, которые принимают те, чьи действия управляют событиями в наших предприятиях. Удар по некоторому телу определит и траекторию, по которой оно должно последовать, и полученную им скорость, потому что законы передачи движения незыблемы и постоянны. Но причины и различные поводы, которыми человек может руководствоваться, чтобы поступать скорее так, а не иначе, не могут нас уверить, в каком направлении они определят его действия. Часто люди совсем не представляют себе своих интересов и часто не преследуют их даже в противном случае. Люди намного сильнее руководятся своими прихотями чем резоном и можно только угадывать то, что зависит от их свободы [свободной воли].

Вторая причина нашего незнания вещей, которые зависят от будущего, основана на том, что пределы нашего разума очень узки. Все знания, которые предполагают [изучение] очень большого числа отношений, находятся вне его возможностей. Следовательно, во многих играх и в большинстве жизненных вещей так много сравнений, которые необходимо произвести, что их почти невозможно исчерпать.

Определить [ожидаемую] стоимость броска кости в игре двух игроков равного умения в триктрак; найти стоимость первой руки в пикете; выяснить, какая шахматная фигура, слон или конь, сильнее и насколько одна из них лучше другой, – вот задачи, которые я полагаю невозможным для человека. То же самое, и притом по тем же самым причинам, верно и по отношению к большинству вопросов морали и политики. Например: определение при тех или иных обстоятельствах должен ли я обратить больше внимания на рекомендацию родственника чем на просьбу некоторого числа знакомых; выгодна или вредна торговля определенного вида [определенным товаром] для некоторой нации; каковы должны быть успехи некоторых переговоров или военных действий и т. д.

[11] Страховые договоры, столь обычные среди коммерсантов, главным образом в Республиках, не всегда обогащают страховые компании и [даже] самые умелые английские политики ежедневно испытывают убыток от тех серьезных рискованных шагов, которые предпринимаются в их стране по поводу событий войны[8], поскольку человеческая предусмотрительность недостаточна для достоверного проникновения в будущее. Действительно, имея точное сознание и хорошо зная события и особенно тайные пружины, которые приводят к колебаниям и движению всевозможные действия, можно достаточно правдоподобно установить лучшее решение при проведении этих рискованных предприятий. Но никогда нельзя будет дойти до возможности определять насколько одно решение лучше другого по точному отношению двух чисел.

Человеческий разум может получить от геометрии некоторое содействие, а именно свойство, называемое предусмотрительностью, которое, однако, имеет только неопределенные правила. Кроме небольшого числа истин и достоверных принципов, которые включены в политику и мораль, там находится бесконечно много неясностей, непостижимых человеческому разуму. Есть польза, которую можно извлечь из геометрии по отношению к этому виду задач. Тот, кто ознакомится с тем видом логики, который применяется в этом трактате, будет лучше подготовлен к установлению различных степеней вероятности в возможных решениях, относящихся к морали и гражданской жизни и скорее сможет избежать ошибок в своих оценках ввиду приобретенного навыка отличать истинное от правдоподобного и не соглашаться ни с чем, кроме очевидности.

[12] Пусть люди думают что хотят, но ясно, что та сила, та точность сознания, которых мы достигаем при исследовании отвлеченных истин, действуют и по отношению к ощущаемым истинам и, так сказать, к практике. Анализ это инструмент, который служит всем, кто знает как с ним обращаться. Все истины связаны друг с другом и когда затратишь какое-то время, пытаясь применять эти силы [анализа] к точным понятиям, которые нам известны о числах и протяженностях, то применяешь их с бо́льшим успехом к менее точным сведениям, которые могут быть предметом исследований нашим разумом. Те, кто лучше изучали метафизику, физику и может быть даже медицину и мораль, были прекрасными геометрами. И опыт должен убедить в пользе геометрии тех, кого не может склонить резон.

Чтобы закончить с этой аналогией между задачами об играх и вопросами, которые могут быть предложены об экономике, политике и о моральных вещах, следует заметить, что в этих последних как и в играх существует род задач, решаемых при соблюдении следующих двух правил. Первое, следует ограничить предложенный вопрос небольшим числом предположений, установленным по достоверным фактам. Второе, следует отвлечься от всех обстоятельств, в которых может участвовать свобода [свободная воля] человека, это извечное препятствие нашему познанию. Можно полагать, что Бернулли учел эти правила в четвертой части своего труда и ясно, что при двух указанных ограничениях можно будет рассматривать многие темы политики и морали так же точно как геометрические истины.

Именно это замечательно осуществил Галлей в мемуаре [1694], в котором этот ученый англичанин взялся определить степень смертности рода человеческого. Его отрывок [небольшое сочинение] заполнен любопытными наблюдениями, выдержки из которых читатель с удовольствием увидел бы здесь. Но мое Предисловие уже стало быть может слишком длинным и я сообщу только то, что автор рассмотрел очень тонко. Это метод определения того основания, которое должно соразмерять безвозвратную ренту. Он привел таблицу, вычисленную для разных возрастов с интервалом в пять лет от одного года до семидесяти лет. Из нее видно насколько благоприятно для англичан решение, которое в то время принял Рой Гильом[9] о продаже пожизненных рент, дающих 14% в год, т.е. почти седьмую часть фонда [что соответствует покупке ренты за семикратную годовую ренту]. Из этой таблицы видно, что десятилетний должен был бы [ежегодно] получать лишь тринадцатую часть, 36-ти летний – одиннадцатую часть, и, наконец, что 10% должен был бы получать только человек в возрасте 43 – 44 лет. Автор обобщил эту идею и исследовал основания, которые должны соразмерять пожизненную ренту на двух или более человек различных возрастов. Мемуар Галлея видимо исчерпал эту тему. Имеется еще несколько других подобных тем, достаточно успешно хотя и не столь строго рассмотренных в *Политической арифметике* Сэра Уильяма Петти [1690], но остается и многое другое того же рода, которое можно изучать столь же успешно и с такой же пользой для общества.

Теперь я считаю себя обязанным упомянуть двух прославленных геометров, которым я обязан первым взглядам на рассматриваемую мной тему. В 1654 г. Паскаль решил следующую задачу:

Двое играют в равную [справедливую] игру до выигрыша [одним из них] определенного числа очков и по предположению один из игроков набрал больше очков, чем другой. Спрашивается, как они должны разделить деньги, находящиеся в игре, если захотят прервать игру не заканчивая ее.

Решение этой задачи можно увидеть в его очень небольшой книжке *Арифметический треугольник*, изданной посмертно [1665]. Великий Паскаль, который много размышлял о свойствах чисел, отыскал немало приложений этого треугольника к правилам раздела ставки и к соединениям.

Шевалье де Мере предложил ему эту задачу [о разделе ставки] и еще несколько задач об игре в кости. Так, требовалось определить в скольких бросках можно выкинуть определенное rafle [см. Прим. 6] и решить другие довольно простые задачи того же вида. Этот шевалье, больше умница чем геометр, решил задачи об игре в кости, но ни он, ни Роберваль[10] не смогли одолеть задачу о разделе ставки. Паскаль предложил ее Ферма, с которым он находился в дружеской переписке о геометрии, и который в этой науке не ниже Декарта.

Этот геометр решил задачу иным путем нежели Паскаль; он пошел даже еще дальше и выяснил, что его метод пригоден для любого числа игроков. Паскаль не думал, что это возможно и постарался убедить Ферма в письме, находящемся вместе с некоторыми другими на ту же тему в посмертных трудах Ферма, опубликованных в Тулузе [Fermat (1679)], в том, что его метод [метод Ферма], который он достаточно исследовал для двух игроков, не годится для большего их числа. В этом сборнике [трудов Ферма] вовсе нет ответа Ферма, но ясно, что истина была на его стороне. Его метод неоспорим и распространяется на любое число игроков.

[15] Немного позднее Гюйгенс, знаменитый геометр, который обогатил все части математики столькими прекрасными открытиями, услыхал разговоры про эти задачи и попытался решить их, применив для этой цели аналитический метод[11], который большей частью ведет дальше всех остальных. Он объединил эти задачи в небольшом латинском трактате объемом примерно в один лист и помещенном в конце книги [Ф. ван] Схутена *Exercitationes Geometricae*.

Хотя этот автор не стал определять [наилучших] решений игроков ни в какой карточной игре, ни в играх в кости, и ограничился тем, что легче всего в этой теме, и притом почти только задачами Паскаля, по его письму [ван] Схутену видно, что он высоко оценивал данное им в этом небольшом сочинении:

> *Нет ничего более славного в искусстве, которое мы применяем в этом трактате, чем быть в состоянии указать правила для вещи, зависящей от случая, видимо никем не изученные и именно потому уклонявшиеся от исследования человеческим разумом. ... Я убежден, что те, кто умеет судить о вещах, поймут при чтении этого сочинения, что его тема более серьезна и более важна чем кажется, потому что она закладывает основы весьма превосходной и очень*

тонкой теории и что исследования Диофанта, которые касались лишь отвлеченных свойств чисел, более просты и менее приятны, чем те, которые могут быть предложены по этому предмету[12].

В конце своего трактата Гюйгенс пригласил геометров исследовать пять задач, которые никто, насколько мне известно, еще не решил[13]. Для трех из этих пяти он привел ответы, но без анализа или доказательства, а для остальных двух он не дал никакого решения.

[16] Поскольку я составил данный трактат в основном для геометров, и поскольку ученые обычно не являются игроками, я полагал необходимым очень подробно описывать те игры, о которых я здесь говорю и старался не упустить каких-либо необходимых обстоятельств. Вначале я имел в виду описать обычным языком решение некоторых самых легких задач, как например тех, которые включены в четвертую часть трактата, но затем был вынужден отказаться от этого намерения, чтобы ни в коей мере мое описание не стало бесконечно длинным, так что ни у кого не хватило бы терпения следовать за мной. Применение алгебры имеет целью представить разуму большое число идей в весьма коротких выражениях и обеспечить существенные возможности для быстрого просмотра соотношений между рассматриваемыми вещами. Я полагаю, что, нисколько не желая составить объемистую книгу, я ни в коем случае не должен был отказываться от этого преимущества. Я поступал таким образом [?] только в конце описания каждой задачи, а также в Следствиях и Замечаниях, которые находятся в конце решения каждой из них, чтобы меня понял весь свет и даже игроки.

Поскольку пишут лишь для того, чтобы читали, я старался облегчить чтение этой книги и я предпочитаю без труда удовлетворять читателя нежели оглядываться на тот заурядный разум, который восхищается только тем, что сто́ит ему больших усилий и что кажется ему вне пределов его досягаемости.

Можно установить, что я очень далек от мест, которые я полагаю трудными и главным образом от тех, которые должны проливать свой свет на многие истины. Но поскольку мне также известно, что польза математической книги состоит не столь в истинах, которые там обнаруживаются, а в склонности, которую они предоставляют разуму открывать аналогичное, и что эту склонность приобретают намного сильнее при открытии того, что уже сообщил автор, при следовании ему шаг за шагом, то я полагаю, что нисколько не должен стесняться, описывая всё в подробностях и даже поясняя всё наглядно. И что для меня достаточно не оставлять никаких трудностей, которых нельзя было бы преодолеть при достаточном прилежании. Наконец, я не предлагаю оберегать читателя от труда по изобретению и тем самым доставляю ему удовольствие некоторого рода.

Примечания

1. См. Юшкевич (1970).

2. Ни Монмор, ни упомянутые им выше авторы не имели представления о действительном содержании 4-й части *Искусства предположений*.

3. Гораздо убедительнее высказался Бертран (1888, p. XXII), который заметил, что рулетка “не имеет ни воли, ни памяти”.

4. Эти игры не являлись чисто случайными и, как Монмор пояснил в указанном месте, выбор наилучших решений был иногда слишком труден, притом многое зависело от предрассудков.

5. Игра le Her приводила к затруднениям, которые были преодолены только в современной теории игр на основе принципа минимакса. Она обсуждалась во втором издании книги Монмора. По поводу тонтины (названной по имени неаполитанского банкира Лоренцо Тонти) мы можем лишь указать, что сам термин в первую очередь означал покупателей пожизненных рент, объединенных в группу и распределяющих общую ренту между своими остающимися в живых членами. Тонтины не получили широкого распространения, потому что их члены желали смерти друг другу и фактически отстранялись от населения в целом.

6. Rafle – бросок трех костей, при котором учитывались только те очки, которые образовывали последовательности вида a,a; a, a, a; и $a, a + 1, a + 2$.

7. См. Todhunter (1865, pp. 105 – 106, 110 – 111). Первую задачу решил сам автор, третья это le Her, см. Прим. 5. Четвертая задача относилась к игре, которая не была чисто случайной.

8. В те времена страховое дело было более всего развито в Нидерландах и в итальянских городах. Монмор, видимо, имел в виду Соединенные провинции федеративной республики, называемой также Голландской республикой. Далее он упомянул войну за Испанское наследство 1701 – 1714 гг.

9. Галлей (1694, с. 117 перевода) указал, что существующий фонд был "недавно одобрен Их Величествами", т.е. Вильгельмом III Оранским, который до 1694 г. правил совместно со своей женой Марией. Гильома (Roy Guillaume) мы вообще не смогли отыскать.

10. Gilles P. de Roberval (1602 – 1675).

11. Это непонятно, ведь Паскаль и Ферма тоже применяли аналитические методы.

12. Можно полагать, что Монмор перевел этот отрывок с латинского варианта письма Гюйгенса, опубликованного в 1657 г. В разделе, посвященном Гюйгенсу в этом сборнике, мы перевели то же письмо с французского текста (переведенного с голландского варианта, опубликованного в 1660 г.). Возможные погрешности переводов никак не могли бы привести к значительному расхождению текстов, которые, стало быть, не были идентичными.

13. Их решил Якоб Бернулли в своей не вышедшей к тому времени книге и сам Монмор упоминает это в своем §1.

Библиография

Юшкевич А.П. (1970), Общая характеристика математики 17-го века. В книге под ред. автора *История математики с древнейших времен до начала 19-го столетия*, т. 2. М., с. 7 – 21.

Bernoulli J. (1713), *Ars Conjectandi*. В книге автора *Werke*, Bd. 3. Basel, 1975, pp. 107 – 259. Немецкий перевод: *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1899). Thun – Frankfurt/Main, 1999.

Bertrand J. (1888), *Calcul des probabilités.* Paris. Тождественное 2-е изд.: 1907. Перепечатки: Нью Йорк, 1970, 1972.

Fermat P. (1679), *Varia opera mathematicae. Tolosae*. Перепечатка: Берлин, 1861.
Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* New York.
Halley E. (1694, англ.), Оценка степеней смертности рода человеческого и т. д. В книге Граунт Дж., Галлей Э. (2005), *Начала статистики населения, мед. статистики и математики страхового дела*. Берлин, с. 108 – 118.
Hontan, Baron de la (1706), *Voyages au Canada*, t. 2. Paris, 1900.
Pascal B. (1665), *Traité du triangle arithmétique*. В книге автора (1998, pp. 282 – 327).
--- (1998 – 2000), *Oeuvres complètes*, tt. 1 – 2. Paris.
Petty W. (Петти В.) (1690, англ.), *Политическая арифметика.* В книге автора *Экономические и статистические работы.* М., 1940, с. 154 – 205.
Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

5. Джон Арбутнот

Арбутнот (1667 – 1735), по всей видимости, перевел на английский язык трактат Гюйгенса (Todhunter 1865, p. 23), но более всего он известен своей заметкой, перевод которой приведен ниже. Нетрудно заметить в ней недостатки. Во-первых, источник использованных им данных не указан. Граунт (Graunt 1662, pp. 408 – 409) привел общее количество крещений в Лондоне за ряд лет, в частности за 1624 – 1666 гг., и расхождение с данными Арбутнота имеется лишь за 1659 г.: по Граунту, общее количество крещенных, 5690, было на 300 меньше, чем у Арбутнота. Соотношение мужских и женских рождений в том году оказалось, по Арбутноту, 1.154, самое высокое за 82 года, но если уменьшить на 300 число крещенных мальчиков, то соотношение окажется равным 1.046, – самым низким за 1629 – 1672 гг. (но в 1682 г. оно оказалось равным 1.02, а в 1703 г. – даже 1.01).

В своей главе 3-й Граунт определил, что в течение ряда лет крещениями и/или их регистрацией пренебрегали, в основном ввиду религиозных *замешательств и изменений*, и что, в частности, в 1659 г. фактическое число крещений было вдвое больше зарегистрированного. Мы не уверены, что соответствующее искажение статистических данных оставило без изменения соотношения между родившимися. И, конечно же, крещения (у христиан) вовсе не равнозначны рождениям.

Во-вторых, Арбутнот не попытался усилить свой вывод указанием на биномиальное распределение мужских и женских рождений. И тем не менее позднейшие авторы продолжали изучать указанное соотношение и непременно ссылались на Арбутнота, а Фрейденталь (Freudenthal 1961, p. xi) даже назвал его автором первой работы по математической статистике.

Из многочисленных комментаторов назовем трех: Bellhouse (1989), который заметил, что Арбутнот в большой степени предвосхитил свою заметку в рукописи, написанной, видимо, в 1694 г.; Shoesmith (1987); Hald (1990, §17.1 и далее). Последний (с. 185 – 186) прямо назвал Арбутнота переводчиком Гюйгенса и процитировал несколько строк из его предисловия к переводу. Так, на примере броска игральной кости

Арбутнот определил случай как незнание, политику назвал анализом “количества вероятности” случайных событий, который должен изучаться наблюдением “рода человеческого”. См. также Шейнин (2005, с. 45 – 46).

Довод в пользу божественного Провидения, исходящий из неизменной правильности, наблюдаемой в рождениях обоих полов

Arbuthnot J. (1712), An argument for Divine providence taken from the constant regularity observed in the birth of both sexes. В книге Kendall M.G., Plackett R.L., редакторы (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London, pp. 30 – 34.

Среди бессчетных следов божественного Провидения, которые встречаются в действиях природы, имеется весьма примечательный, наблюдаемый в точном равновесии, соблюдаемом между числами мужчин и женщин. Род человеческий никогда не ослабнет и не вымрет, ибо каждый мужчина может иметь свою женщину и притом соответствующего возраста. Это равенство [численностей] мужчин и женщин является не следствием случая, а божественного Провидения, которое трудится во имя доброй цели и это я доказываю следующим образом.

Пусть имеется игральная кость с двумя гранями, M и F (обозначающими орла и решку). Чтобы найти все шансы [при броске] любого определенного числа таких костей, возведем бином ($M + F$) в степень, равную числу костей и коэффициенты этого бинома укажут все искомые шансы. Например, при двух двугранных костях шансы будут $M^2 + 2MF + F^2$, т.е. один шанс для двойного появления M, один для двойного F и два шанса для однократного появления M и F. При четырех костях шансы будут

$$M^4 + 4M^3F + 6M^2F^2 + 4MF^3 + F^4,$$

т.е. один шанс для четырехкратного появления M, один для четырехкратного появления F, … и, вообще, при n костях все шансы будут выражены рядом

$$M^n + (n/1)\,M^{n-1}F + [n(n-1)/2]\,M^{n-2}F^2 + \dots$$

Ясно, что при четном количестве костей средний член содержит равное число букв M и F и что во всех остальных членах больше либо тех, либо этих.

Поэтому, если некто возьмется при четном числе костей выкинуть столько же букв M, сколько F, все члены кроме первого будут против него и его жребий так отнесется к сумме всех шансов как коэффициент среднего члена к числу 2, возведенному в степень, равную количеству костей. Так, при двух костях его жребий составит 2/4 или 1/2, при трех – 6/16 или 3/8, при шести костях – 20/64 или 5/16, при восьми – 70/256 или 35/128 и т. д.

Чтобы найти этот средний член при любой степени или любом количестве костей, следует продолжить ряд $n/1$, $(n-1)/2$, $(n-3)/3$, … и т.

д. пока число членов в нем не окажется равным $n/2$. Например, коэффициент среднего члена бинома в десятой степени равен

$$(10/1) \cdot(9/2) \cdot(8/3) \cdot(7/4) \cdot(6/5) = 252,$$

десятая степень числа 2 равна 1024 и если поэтому А возьмется с первого раза выбросить равное количество M и F десятью костями, у него будет 252 шанса из 1024 и его жребий окажется равным 252/1024 = 63/256, что меньше 1/4.

При помощи логарифмов легко распространить эти вычисления на очень большое число, но это не входит в мою нынешнюю цель. Из сказанного усматривается, что при очень большом числе костей жребий А окажется весьма малым, и, следовательно (если M обозначает мужчин, а F – женщин), при большом количестве людей и в любое назначенное время рождение равного числа мальчиков и девочек будет иметь за себя лишь небольшую часть всех возможных шансов.

Но следует действительно признать, что это равенство мальчиков и девочек является не математическим, а физическим, что значительно изменяет предыдущее вычисление, ибо в этом случае средний член не будет точно представлять шансы А. Его шансы [также] вберут в себя некоторые соседние члены и склонятся в одну или в другую сторону и если один только шанс управляет [этим явлением], то [все-таки] будет весьма маловероятно, что шансы никогда не достигнут оконечностей. Однако, подобное событие мудро предотвращается мудрым устройством (economy) природы. И, чтобы [верно] судить о мудрости этого плана, мы обязаны заметить, что внешние случайности, которым подвержены мужчины (с опасностью добывающие свое пропитание), действительно сильно прорежают их род и что эта потеря, как убеждает нас опыт, намного превосходит потери второго пола, вызванные присущими ему болезнями.

Чтобы возместить эту потерю, предусмотрительная природа, управляемая своим мудрым Творцом, производит больше мальчиков чем девочек и притом почти в постоянном соотношении. Это следует из приложенной таблицы, которая содержит наблюдения рождений [крещений] в Лондоне за 82 года. Теперь, чтобы привести все это к вычислениям, я предлагаю следующую

Задачу. А держит пари с В, что ежегодно будет рождаться больше мальчиков чем девочек. Требуется определить жребий или цену ожидания А. Из сказанного ясно, что ежегодно жребий А будет меньше 1/2. Но, чтобы усилить довод, пусть он будет равен 1/2. Если А берется держать пари 82 года подряд, его жребий окажется равным $(1/2)^{82}$. По таблице логарифмов легко определить, что это $1/48\ 360 \cdot 10^{20}$ [Мы привели число, указанное ниже, в современной записи, Арбутнот же выписал 20 нулей]. Но если А к тому же утверждает, что избыток мальчиков будет иметь место в постоянном соотношении и что разность [между числами рождений мальчиков и девочек] будет ограничена заранее установленными границами, и что все это будет происходить не только в течение 82 лет, а эпоха за эпохой и не только в Лондоне, но по всему миру (крайне вероятно как предусмотренное, что каждый мужчина имеет женщину из той же страны и подходящей по возрасту), то шанс А будет близок к бесконечно малой величине [!] и во всяком случае меньше любой заданной дроби. Отсюда следует, что управляет [рождениями] не шанс, а Мастерство.

Для этого равенства рождений в физике, видимо, нельзя указать никакой вероятной причины, кроме как признания, что вначале в семени наших прародителей было образовано равное число обоих полов.

Пояснительный комментарий. Отсюда следует, что многоженство противоречит закону природы и справедливости, равно как и размножению рода человеческого. Ибо если там, где поровну мужчин и женщин, мужчина возьмет себе 20 жен, 19 мужчин должны будут жить в безбрачии, что несовместимо с предназначением природы. Кроме того, маловероятно, чтобы 20 женщин были так же хорошо оплодотворены одним мужчиной как двадцатью.

Количество крещенных

Год	Мальчиков	Девочек	Год	Мальчиков	Девочек
1629	5218	4683	71	6449	6061
30	4858	4457	72	6443	6120
31	4422	4102	73	6073	5822
32	4994	4590	74	6113	5738
33	5158	4839	75	6058	5717
34	5035	4820	76	6552	5847
35	5106	4928	77	6423	6203
36	4917	4605	78	6568	6033
37	4703	4457	79	6247	6041
38	5359	4952	80	6548	6299
39	5366	4784	81	6822	6533
40	5518	5332	82	6909	6744
41	5470	5200	83	7577	7158
42	5460	4910	84	7575	7127
43	4793	4617	85	7484	7246
44	4107	3997	86	7575	7119
45	4047	3919	87	7737	7214
46	3768	3395	88	7487	7101
47	3796	3536	89	7604	7167
48	3363	3181	90	7909	7302
49	3079	2746	91	7662	7392
50	2890	2722	92	7602	7316
51	3231	2840	93	7676	7483
52	3220	2908	94	6985	6647
53	3196	2959	95	7263	6713
54	3441	3179	96	7632	7229
55	3655	3349	97	8062	7767
56	3668	3382	98	8426	7626
57	3396	3289	99	7911	7452
58	3157	3013	1700	7578	7061
59	3209	2781	01	8102	7514
60	3724	3247	02	8031	7656
61	4748	4107	03	7765	7683
62	5216	4803	04	6113	5738
63	5411	4881	05	8366	7779
64	6041	5681	06	7952	7417

65	5114	4858	07	8379	7687
66	4678	4319	08	8239	7623
67	5616	5322	09	7840	7380
68	6073	5560	10	7640	7288
69	6506	5829			
70	6278	5719			

Библиография

Граунт Дж. (1662, англ.), Естественные и политические наблюдения над бюллетенями смертности. В книге Граунт Дж., Галлей Э. (2005), *Начала статистики населения, мед. статистики и математики страхового дела*. Берлин, с. 7 – 105.

Шейнин О.Б. (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин.

Bellhouse D.R. (1989), A manuscript on chance written by J. Arbuthnot. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 57, pp. 249 – 259.

Freudenthal H. (1961), 250 years of mathematical statistics. В книге *Quantitative Methods in Pharmacology.* Editor, H. De Jonge. Amsterdam, pp. xi – xx.

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Application before 1750.* New York.

Shoesmith E. (1987), The Continental controversy over Arbuthnot's argument for divine providence. *Hist. Math.*, vol. 14, pp. 133 – 146.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1965.

6. Николай Бернулли

Николай Бернулли (1687 – 1759) опубликовал диссертацию о приложении искусства предположений к юриспруденции (1709), см. Шейнин (2005, с. 57 – 58), не переведенную ни на один живой язык. Она несомненно способствовала распространению вероятностных представлений в обществе и была интересна и в математическом отношении (Todhunter 1865, pp. 195 – 196). Однако, автор не только подхватил в ней намеки, содержавшиеся в еще не вышедшем сочинении своего покойного дяди, но дословно перенес в свою диссертацию отдельные куски из нее и даже из *Дневника* Якоба Бернулли (Kohli 1975, p. 541), который вообще не предназначался к публикации.

Н.Б. также придумал петербургскую игру и исследовал соотношение мужских и женских рождений, см. письма Монмору 1713 г.(Montmort (1708, pp. 401 – 402 и 388 – 394). Заключительные слова второго письма (в котором он неявно ввел в теорию вероятностей нормальное распределение и перевод которого следует ниже) о якобы плохо известном ему результате Я.Б. были, стало быть, просто дымовой завесой.

Поясним суть рассуждений Бернулли. Пусть (Шейнин 1968; 1970, с. 201 – 203) m/f – соотношение полов, n – общее число рождений в год, а количества рождений мальчиков и девочек – μ и $(n - \mu)$. Если

$$n/(m + f) = r,\ m/(m + f) = p,\ f/(m + f) = q,\ p + q = 1,$$

и s, которое никак не ограничено, фактически примерно равно $1.4\sqrt{n}$, то доказанное Бернулли можно представить в виде

$$P(|\mu - rm \leq s) \approx (t-1)/t, \ t \approx [1 + s(m+f)/mfr]^{s/2} \approx \exp[s^2(m+f)^2/2mfn],$$
$$P(|\mu - rm| \leq s) \approx 1 - \exp(s^2/2pqn),$$

$$P[|\mu - np|/\sqrt{npq} \leq s] \approx 1 - \exp(-s^2/2).$$

Этот результат все же не приводит к интегральной теореме, поскольку s ограничено. Он также не является локальной теоремой, поскольку окончательная формула не содержит сомножителя $\sqrt{2/\pi}$. Юшкевич (1986) сообщил, что по его просьбе трое современных математиков заключили, что Н.Б. близко подошел к локальной теореме, однако ни они, ни Hald (1990, p. 17), не упомянули недостающий множитель.

Следуя обычаям своего времени, вместо некоторого числа a Н.Б. выписывал отношение a:1.

Письмо П.Р. Монмору. Париж, 23 янв. 1713 г.

Montmort P.R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris, 1713, pp. 388 – 394. Перепечатка : Нью Йорк, 1980

Я посылаю Вам список количества детей, родившихся [крещенных] в Лондоне с 1629 по 1710 г. с моими доказательствами того, о чем я писал Вам о доводе, в соответствии с которым желательно доказать, что это чудо, что количества детей каждого пола, рожденных в Лондоне, не различаются в большей степени друг от друга в течение 82 лет подряд и что невозможно, чтобы случайно в течение столь длительного времени они неизменно оставались заключенными в такие тесные границы, какие мы видим в списке за 82 года[1].

Я утверждаю, что здесь нет никакого повода для удивления и что налицо высокая вероятность, что числа мальчиков и девочек располагались бы в еще более тесных границах, чем те, которые имели место. Чтобы доказать это, я предположил, что число всех детей, рожденных ежегодно в Лондоне, составляет 14 000[2], среди которых должно было рождаться 7200 мальчиков и 6800 девочек, если эти числа в точности следуют пропорции 18:17, которая выражает отношение между легкостями их рождений. Или, поскольку число мальчиков иногда больше, а иногда меньше 7200, примем некоторые пределы. Например, в 1703 г., когда число девочек оказалось всего ближе к числу мальчиков, родилось 7765 мальчиков и 7683 девочек, или, если перевести сумму к 14 000, 7037 мальчиков и 6963 девочки. Таким образом, число девочек превысило 6800 на 163, а число мальчиков оказалось настолько же меньшим, чем 7200.

Итак, я докажу Вам, что можно вполне держать пари, что среди 14 000 детей число мальчиков не будет отличаться от 7200, в ту или другую сторону больше, чем на 163. Иначе говоря, что отношение чисел мальчиков и девочек не будет ни бóльшим, чем 7363:6637, ни меньшим, чем 7037:6963. Для этой цели представим себе 14 000 игральных костей с 35-ю гранями каждая, 18 из них белых и 17 – черных. Вы знаете, что члены бинома (18 + 17), возведенного в степень 14 000, укажут нам все возможные случаи выбрасывания на этих 14 000 костях любого числа белых граней. А именно, первый член соответствует всем случаям, при которых все грани окажутся белыми, второй соответствует одной черной грани и 13 999 белым, ..., и т. д. Таким образом, 6801-й член выразит все случаи, при которых в точности 6800 граней окажутся черными и 7200 – белыми, 6638-й член – случаи 6637 черных и 7363 белых граней, и 6964-й член – случаи 6963 черных и 7037 белых.

Требуется, стало быть, найти, какое отношение существует между суммой всех членов от 6638-го до 6964-го включительно и суммой всех остальных членов, которые расположены по одну сторону от 6638-го и по другую сторону от 6964-го члена. Но так как эти члены страшно велики, для отыскания этого отношения требуется особое ухищрение и вот как я это делаю. Пусть вообще вместо 14 000 число всех детей = n, легкости рождения мальчиков и девочек относятся друг к другу как $m:f$ вместо 18:17, а вместо границы 163 примем некоторую границу l. Пусть далее $p = n/(m + f)$ или $n = mp + fp$. В нашем примере $mp = 7200$ и $np = 6800$.

В первую очередь я отыскиваю очень близкое приближение отношения члена с номером $fp + 1$ к члену с номером $fp - l + 1$. В соответствии с законом хода этих членов, член $fp + 1$ равен

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\;\dots\;\frac{n-fp+1}{fp}\;m^{\,n-fp}f^{\,fp},$$

а член $fp - l + 1$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\;\dots\;\frac{n-fp+l+1}{fp-l}\;m^{\,n-fp+1}f^{\,fp-1},$$

так что отношение того к этому равно

$$\frac{n-fp+l}{fp-l+1}\;\frac{n-fp+l-1}{fp-l+2}\;\frac{n-fp+l-2}{fp-l+3}\;\dots\;\frac{n-fp+1}{fp}\;(f/m)^{\,l}:1.$$

Подставляя mp вместо $n - fp$, получим

$$\frac{mp+l}{fp-l+1}\;\frac{mp+l-1}{fp-l+2}\;\frac{mp+l-2}{fp-l+3}\;\dots\;\frac{mp+1}{fp}\;(f/m)^{\,l}:1.$$

Я предполагаю, что сомножители в левой части этого отношения за исключением последнего, $(f/m)^{\,l}$, находятся в геометрической прогрессии, а их логарифмы – в арифметической прогрессии. Это предположение весьма близко к истине, особенно когда n – большое число. Следовательно, сумма всех их логарифмов будет равна

$$(l/2)\;[\log\frac{mp+l}{fp-l+1}+\log\frac{mp+1}{fp}],$$

т.е. равна сумме логарифмов первого и последнего членов, умноженной на полусумму числа всех членов, и если к ней прибавить логарифм $(f/m)^l$, т.е. $l \log f/m$, мы получим

$$(l/2)\left[\log \frac{mp+l}{fp-l+1} + \log \frac{mp+1}{fp}\right] + l \log f/m$$

или

$$(l/2)\left[\log \frac{mp+l}{fp-l+1} + \log \frac{mp+1}{mp} + \log \frac{fp}{mp}\right]$$

для логарифма искомого отношения. И поэтому само отношение будет равно

$$\left[\frac{mp+l}{fp-l+1} \frac{mp+1}{mp} \frac{fp}{mp}\right]^{l/2}:1.$$

Если мы захотим еще больше приблизиться к истинному значению, можно разбить этот ряд множителей

$$\frac{mp+l}{fp-l+1} \frac{mp+l-1}{fp-l+2} \frac{mp+l-2}{fp-l+3} \ldots$$

на несколько частей и предположить, что множители каждой части находятся в геометрической прогрессии. Но нет нужды поступать так, потому что все значения, которые мы определили при помощи этих предположений, будут очень мало отличаться друг от друга. И даже, если в соответствии с этим первым предположением, я получу искомое отношение немного бóльшим, чем на самом деле, этот избыток окажется весьма малым сравнительно с тем, чем я впоследствии пренебрегу.

Если сейчас рассмотреть члены, непосредственно предшествующие члену с номерами $fp + 1$ и $fp - l + 1$, т.е. те, чьи номера fp и $fp - l$, то отношение того к этому будет

$$\frac{mp+l+1}{fp-l} \frac{mp+l}{fp-l+1} \frac{mp+l-1}{fp-l+2} \ldots \frac{mp+2}{fp-1} (f/m)^l:1,$$

т.е. бóльшим, чем

$$\frac{mp+l}{fp-l+1} \frac{mp+l-1}{fp-l+2} \frac{mp+l-2}{fp-l+3} \ldots \frac{mp+1}{fp} (f/m)^l$$

или

$$\left[\frac{mp+l}{fp-l+1} \frac{mp+p}{mp} \frac{fp}{mp}\right]^{l/2}:1,$$

потому что каждый множитель первого ряда больше соответствующего множителя второго ряда. По той же причине отношение члена с номером $fp-1$ к члену с номером $fp-l-1$ больше, чем члена fp к члену $fp-l$, и отношение члена $fp-2$ к члену $fp-l-2$ больше отношения члена $fp-1$ к члену $fp-l-1$ и т. д., при отходе все время на один член вплоть до первого. Вот почему, если разделить все члены, предшествующие члену $fp+1$, на классы, каждый из которых содержит равное число членов, выраженное числом l, и начать считать с члена с номером fp, первый член первого класса будет иметь большее отношение к первому члену второго класса, чем член $fp+1$ к члену $fp-l+1$, и второй член первого класса ко второму из второго класса еще большее отношение. А третий член из первого класса к третьему из второго класса еще большее и т. д. и потому все члены первого класса, взятые вместе, будут иметь ко всем членам второго класса большее отношение, чем член $fp+1$ к члену $fp-l+1$. И по той же причине все члены второго класса будут иметь ко всем членам третьего класса большее отношение, чем член $fp+1$ к члену $fp-l+1$. И все члены третьего класса ко всем членам четвертого класса еще большее отношение, чем член $fp+1$ к члену $fp-l+1$, а именно

$$\left[\frac{mp+l}{fp-l+1}\,\frac{mp+1}{mp}\,\frac{fp}{mp}\right]^{l/2}:1. \tag{1}$$

Поэтому, если принять левую часть (1) за q и сумму членов первого класса за s, сумма членов второго класса будет меньше, чем s/q, сумма [членов] третьего класса – меньше, чем s/q^2, сумма четвертого класса – меньше чем s/q^3 и т. д. Поэтому сумма всех классов за исключением первого, даже если их число бесконечно, окажется меньшей, чем

$$s/q + s/q^2 + s/q^3 + \ldots$$

и стало быть меньшей, чем $s/(q-1)$. Отсюда следует, что сумма первого класса, т.е. всех членов между членом $fp+1$ и членом $fp-l+1$, включая также $fp-l+1$, будет иметь к сумме всех предшествующих членов большее отношение, чем $(q-1):1$, или, если подставить сюда значение q, большее, чем

$$\left[\left(\frac{mp+l}{fp-l+1}\,\frac{mp+1}{mp}\,\frac{fp}{mp}\right)^{l/2}-1\right]:1.$$

Следовательно, если подставить m вместо f и f вместо m, сумма всех членов между членом $fp+1$ и членом $fp+l+1$ включая член $fp+l+1$ будет иметь к сумме всех последующих членов до последнего большее отношение, чем

$$\left[\left(\frac{fp+l}{mp-l+1}\,\frac{fp+1}{fp}\,\frac{mp}{fp}\right)^{l/2}-1\right]:1.$$

И, наконец, сумма всех членов от $fp-l+1$ до члена $fp+l+1$ включительно, не считая даже члена $fp+1$, который находится в середине, к сумме всех остальных членов будет иметь по крайней мере большее отношение, чем наименьшая из величин

$$\left[\frac{mp+l}{fp-l+1}\ \frac{mp+1}{mp}\ \frac{fp}{mp}\right]^{l/2} \text{ и } \left[\left(\frac{fp+l}{mp-l+1}\ \frac{fp+1}{fp}\ \frac{mp}{fp}\right)^{l/2}-1\right]$$

к единице, *что и требовалось найти*.

Применив это сейчас к нашему примеру, в котором n = 14 000, mp = 7200, fp = 6800, l = 163, мы найдем, что

$$(l/2)\cdot\left[\log\frac{mp+l}{fp-l+1}+\log\frac{mp+1}{mp}+\log\frac{fp}{mp}\right]=$$

(163/2) [log 7363/6638 + log 7201/7200 + log 6800/7200] =

(163/2) (0.0450176 + 0.0000603 – 0.0248236) = 1.6507254.

Число, отвечающее этому логарифму, равно 44 74/100. Заменяя fp на mp и mp на fp, мы найдем, что

$$(l/2)\left[\log\frac{fp+l}{mp-l+1}+\log\frac{fp+1}{fp}+\log\frac{mp}{fp}\right]=$$

(163/2) [log 6953/7038 + log 6801/6800 + log 7200/6800] =

(163/2) (– 0.0046524 + 0.0000639 + 0.0248236) = 1.6491194.

Число, отвечающее этому логарифму, равно 44 58/100.

Отсюда я заключаю, что отношение вероятности, что среди 14 000 детей число мальчиков не будет ни бóльшим чем 7363, ни меньшим, чем 7037, к вероятности, что число мальчиков окажется вне этих границ, будет по меньшей мере больше, чем 43 58/100:1. И можно с выгодой держать пари, что из 82 раз число мальчиков не выйдет трижды за эти границы. Между тем, при исследовании списка количества детей, рожденных в течение 82 лет в Лондоне, Вы обнаружите, что число мальчиков 11 раз превышало 7363, а именно в 1629, 39, 42, 46, 49, 51, 59, 60, 61, 69 и 76 гг. Вы также легко найдете, что можно держать пари более чем 226:1, что за 82 года число мальчиков не выйдет 11 раз за эти границы. Вы также должны будете заметить, что, приняв границы, более широкие чем 163, но все же менее широкие, чем наибольшие из тех, которые даны в списке, я получу намного более высокую чем 43:1 вероятность, что числа детей каждого пола будет скорее находиться каждый год внутри, а не вне их. Поэтому нет никакого повода удивляться, что, как я и хотел доказать, число детей каждого пола не более отличны друг от друга.

Я вспоминаю, что мой покойный дядя доказал нечто подобное в своем трактате *Искусство предположений*, который сейчас печатается в Базеле. А именно, если мы хотим определить по часто повторенным опытам число случаев, в соответствии с которыми некоторое событие может произойти или нет, то можно увеличить число наблюдений таким образом, что наконец вероятность, что мы определим истинное отношение между числами этих случаев, будет выше заданной. Когда эта книга выйдет, мы увидим, нашел ли я для подобных тем такое же хорошее приближение, как он.

Честь имею быть с совершеннейшим почтением, Сударь,

Ваш покорнейший слуга Н. Бернулли

К письму приложен список количества рождений (точнее, крещений) в Лондоне с 1629 по 1710 гг. включительно. Он совпадает со списком Арбутнота за исключением одного случая: число крещений девочек в 1687 г. у Арбутнота было равно 7214, а у Н.Б. – 7114.

Примечания

1. См. Прим. 7 и 34 к разделу *Муавр*.

2. Общее ежегодное число крещений в Лондоне достигло (и превысило) 14 тысяч лишь в 1683 г., а в начале рассматриваемого периода оно сотавляло менее 10 тысяч и длительное время еще меньше (в 1644 – 1660 гг. – 6 – 8 тысяч). Отношение *s/n* (см. комментарий) соответственно возрастало.

Библиография

Шейнин О.Б. (1968), On the early history of the law of large numbers. *Biometrika*, vol. 55, pp. 459 – 467. Замечание о появлении нормального распределения у Н.Б. только на с. 232 перепечатки: Pearson E.S., Kendall M.G. (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability.* London, pp. 231 – 239.

--- (1970), К истории предельных теорем Муавра – Лапласа. *История и методология естественных наук*, вып. 9, с. 199 – 211.

--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин.

Юшкевич А.П. (1986), Н. Бернулли и издание “Искусства предположений” Я. Бернулли. *Теория вероятностей и ее применения*, т. 31, с. 333 – 352.

Bernoulli J. (1975), *Werke*, Bd. 3. Basel. Книга содержит перепечатки *Искусства предположений* Якоба Бернулли (на латинском же языке), ряда смежных мемуаров и комментарии.

Bernoulli N. (1709), *De usu artis conjectandi in jure*. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 289 – 326).

Kohli K. (1975), Kommentar zur Dissertation von Niklaus Bernoulli. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 541 – 556).

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

7. Абрахам де Муавр

В теории вероятностей Муавр (1667 – 1754) известен в первую очередь как автор *Учения о шансах* (1718, 1738 и посмертное издание 1756) и мемуара 1733 г., в котором он ввел нормальное распределение и доказал первый вариант центральной предельной теоремы. Сто́ит, впрочем, заметить, что это распределение косвенно появилось уже у Николая Бернулли, см. раздел, посвященный ему в этом сборнике. Муавр также ввел в практику страхования жизни непрерывный равномерный закон смертности (для всех возрастов, начиная с 12-ти лет).

По ряду причин его мемуар 1733 г. длительное время оставался по существу неизвестным. Появился он в немногих экземплярах на латинском языке, однако был переведен самим Муавром на английский язык и включен в последующие издания *Учения.* Но Тодхантер (Todhunter 1865,pp. 192 – 193) описал его чисто формально, упустив нормальный закон; его математический аппарат (не включающий явного применения интегрального исчисления) был чужд *континентальным* математикам; английский язык не был распространен в Европе; а само *Учение о шансах* было все-таки непривлекательно как написанное в основном для игроков. Первым, кто упомянул о появлении нормального распределения у Муавра, был Eggenberger (1894).
Теоретико-вероятностные работы Муавра комментировали Шейнин (1968, 1970), см. Библиографию к разделу 6, и Hald (1990; 1998), а о его творчестве в целом см. Schneider (1968).

Учение о случае

De Moivre (1718, 1738, 1756), *Doctrine of Chances*. Перепечатка последнего издания: Нию Йорк, 1967

Предисловие (написано в 1717 г.), с. i – xi

Около семи лет [в 1712 г.]назад я опубликовал в *Philosophical Transactions* [*of the Royal Society*] образчик того, что я теперь более подробно рассматриваю в этой книге. Я в то время занялся этим предметом в основном ввиду пожелания и поощрения Достопочтенного эсквайра Френсиса Робартеса[1], которому в связи с недавно опубликованным французским трактатом (Montmort 1708) было угодно предложить мне несколько задач, гораздо более трудных, чем любая, найденная им в этой книге. После того, как я решил их удовлетворительным для него образом, он убедил меня привести эти задачи в систему и сформулировать правила, которые привели меня к успеху. И когда я с этим справился, Королевское общество попросило меня (enjoined me) представить им мои находки по указанной теме и предложило мне опубликовать их в [*Philosophical*] *Transactions* не столько, как относящиеся к [азартным] играм, сколько как содержащие некоторые общие рассуждения не недостойные [т.е. достойные] внимания любителей истины.

В то время я не видел ничего, относящегося к этой теме, кроме книги [трактата] м-ра Гюйгенса [1657] и небольшого английского сочинения (в сущности, ее перевода), выполненного весьма остроумным джентльменом[2], который, хоть и мог существенно продвинуть этот предмет, удовольствовался следованием оригиналу и лишь добавил к нему вычисление преимущества банкира в игре *Hazard* [3] и еще немногое. Что же касается французской книги, я лишь бегло просмотрел ее, потому что заметил, что ее автор в основном придерживался метода Гюйгенса[4], который я безусловно решил отвергнуть, поскольку, как мне представляется, он не был действительно естественным для решения задач такого рода.

В своем Образчике [1712] я указал, что м-р Гюйгенс был первым, кто опубликовал правила такого вычисления, желая тем самым воздать должное человеку, который имел большие заслуги перед обществом. Но сказанное мной было неверно истолковано как будто бы я хотел обидеть некоторых лиц, рассматривавших эту тему еще раньше. И против меня цитировали отрывок из предисловия Гюйгенса (1757, с. 58 – 59):

> *В течение какого-то времени некоторые лучшие математики Франции* [Паскаль и Ферма] *занимались этим видом исчисления, так что никто не должен приписывать мне честь первого открытия. Оно мне не принадлежит.*

Но то, что следовало [у Гюйгенса] непосредственно после этого, будь оно принято во внимание, могло бы оправдать меня от всякого подозрения в несправедливости:

> *Но эти ученые, хоть они испытывали друг друга, предлагая друг другу трудные задачи, скрыли свои методы. Поэтому мне пришлось исследовать и глубоко вникать в этот предмет начиная с самого начала.*

Из этого следует, что, хотя м-р Гюйгенс не был первым, кто обратился к задачам такого рода, он тем не менее оказался первым, опубликовавшим правила для их решения и это было всё, что я утверждал.

Трактат, подобный этому [моему], может быть полезен в нескольких направлениях. Первое, в обществе имеются пытливые люди, которые хотят знать, на чем они основываются, когда занимаются игрой; желая выиграть или только развлечься, они могут при помощи этого или подобного сочинения удовлетворить свое любопытство, либо взяв за труд понять, что здесь доказано, либо посчитав, что доказательства верны и воспользоваться следствиями[5].

Второе применение этого учения о шансах состоит в том, что оно может служить в сочетании с другими частями математики в качестве подходящего введения в искусство рассуждения. Известно по опыту, что ничто не может лучше способствовать постижению этого искусства, чем исследование длинной цепи следствий, верно выведенных из неоспоримых принципов и эта книга содержит много соответствующих примеров. Здесь можно добавить, что некоторые задачи о шансах действительно кажутся простыми, и разум с легкостью начинает верить, что их решение может быть достигнуто просто лишь силой естественного здравого смысла. Обычно, однако, оказывается иначе, и, поскольку вызванные этим [мнением] заблуждения нередки, мы предполагаем, что книга такого рода, которая учит нас отличать истину от того, что кажется столь близким к ней, будет воспринята как средство, способствующее верному рассуждению.

Из заблуждений, совершаемых по поводу шансов, одно из наиболее распространенных и наименее подозреваемых относится к лотерее. Так, предположив лотерею, в которой соотношение пустых билетов к выигрышным равно 5:1, весьма естественно заключить, что для шанса[6] выиграть необходимы 5 билетов. Можно, однако, наглядно доказать, что для этого более чем достаточно четырех и это подтвердится многократным опытом. Аналогично, предположив лотерею с соотношением тех же билетов 39:1 (такова была лотерея 1710 г.), можно доказать, что при 28 билетах выигрыш и проигрыш равновероятны. Хотя этот вывод может показаться противоречащим обычным понятиям, он все же основан на непогрешимом доказательстве.

В то время, когда в обычае была игра *Royal Oak*, некоторые проигрывали в нее значительные суммы, в основном ввиду довода, ошибочность которого они не смогли усмотреть. Шансы против любого заданного числа очков были 31:1, так что рискующие в случае выигрыша получали [бы] право на возврат 32 ставок включая свою собственную. Вместо этого они [в действительности] получали всего 28 ставок, так что было весьма понятно, что уже ввиду невыгодности игры они теряли 1/8 часть всех денег, которые они ставили на кон [(32 – 28):28 = 0.125]. Но банкир утверждал, что у них нет причин для жалоб, так как он предлагал сам ставить на то, что любой исход произойдет при 22 бросках и действительно ставил на это когда это требовалось [игроками]. Кажущееся противоречие между шансами 31:1 и 22 бросками в пользу любого исхода настолько запутывало авантюристов, что они начинали думать, что преимущество было на их стороне, играли дальше и продолжали проигрывать [$1 - (31/32)^{22} = 0.5004$; $1 - (31/32)^{21} = 0.4844$].

Учение о шансах может также помочь излечиться от одного вида суеверия, которое давно укоренилось в обществе, а именно от веры в существование удачи или неудачи в игре. Я признаю, что очень многие здравомыслящие люди только лишь по собственному разумению убеждены, что понятие *удачи* всего-навсего химера, и все-таки я представляю себе, что основания для подобной точки зрения можно все-таки еще более укрепить, используя некоторые нижеследующие соображения.

Если, говоря, что человек удачен, мы не имеем в виду ничего, кроме того, что он при игре обычно выигрывает, то такое выражение можно допустить как весьма подходящее при краткой речи. Но если *удача* понимается как означающее некоторое преобладающее качество, настолько присущее человеку, что он должен выигрывать во всех играх, в которых он участвует, или по крайней мере выигрывать чаще, чем проигрывать, то можно отрицать, что в природе существует что-то подобное.

Отстаивающие [понятие] *удачи* весьма уверены по своему собственному опыту, что иногда они были очень удачливы, а в иные времена испытывали невероятную полосу *неудач*, которая, пока она продолжалась, заставляла их быть весьма осторожными имея дело со счастливчиками. Но, чего они не могут представить себе, так это способности шанса привести к подобным необычным событиям. Они были бы рады узнать, например, что их проигрыш 15 партий *пикета* подряд не был вызван странным образом преследовавшей их *неудачей*. Но если им будет угодно рассмотреть правила, указанные в этой книге, они убедятся, что, хотя шансы против их проигрыша так много раз подряд очень велики, а именно 32 767:1, все же подобная возможность не исключается этим перевесом и существует 1 шанс из 32 768, что такой исход может произойти. Отсюда следует, что он был все-таки возможен без вмешательства того, что они называют *неудачей*.

Кроме того, этот случай 15 проигрышей подряд при игре в *пикет* не должен приписываться *неудаче* в большей степени чем отнесение за счет *удачи* получения наибольшего выигрыша владельцем одного билета в лотерее из 32 768 билетов, поскольку шансы в обоих случаях совершенно одинаковы. Но если скажут, что выигрыш в лотерее был обусловлен *удачей*, ответ будет прост: Допустим, что *удача* не существует или, по крайней мере, что ее влияние приостановлено. Наибольший выигрыш все же должен был достаться одному или другому не ввиду удачи (которая по предположению осталась в стороне), а по самой необходимости этого.

Те, кто верит в удачу, могут, если им угодно, указать и другие примеры, осуществление которых намного менее вероятно, чем выигрыш или проигрыш 15 игр подряд, и все же их мнение никогда не будет подкреплено подобными предположениями. Ибо, в соответствии с законами шанса, можно определить такой момент, в который наступление подобных случаев окажется столь же вероятным как и их ненаступление. Нет, не только: может быть определен момент, в который соотношение шансов в пользу их наступления окажется каким угодно большим.

Но предположим, что выигрыши и потери чередуются так, что всегда остаются распределенными равным образом, так что удача оказывается достоверно исключенной. Будет ли разумно в этом случае приписывать события в игре одному лишь шансу? Я полагаю, что дело обстоит, напротив, совсем иначе, ибо больше оснований подозревать, что здесь господствует какая-то необъяснимая неизбежность[7]. Так, если двое играют в *орла и решку* и предположено, что лишь шанс сам по себе управляет падением монеты, окажется ли вероятным, что количества обоих исходов будут одни и те же? Против этого будут соотношения 5:3 в четырех играх, 11:5 в шести, 95:35 в восьми и около 12:1 в 100 играх. Таким образом, по своей сущности шанс сам по себе приводит к неравенствам в игре и нет нужды объяснять их удачей.

Далее, те самые доводы, которые подрывают понятие удачи, могут с другой стороны быть полезными в некоторых случаях для того, чтобы установить должное сравнение шанса и Промысла. Мы действительно можем представить себе состязание шанса и Промысла при наступлении событий некоторого рода и вычислить, какова вероятность, что эти события вызваны скорее одним чем другим.

Чтобы предоставить обыкновенный пример, допустим, что расположение карт в двух полученных нами колодах для игры в пикет оказалось одним и тем же, сверху донизу. Предположим также, что, поскольку по этому поводу возникло некоторое сомнение, был задан вопрос, следует ли этот случай приписать случаю или Промыслу Творца. Этот вопрос решает учение о соединениях. В соответствии с его правилами можно доказать, что соотношение шансов в пользу преднамеренно установленного расположения карт будет большим чем 263 130 830 000 миллионов миллионов миллионов миллионов к одному.

Исходя из этого последнего рассуждения, мы сможем во многих случаях понять, как различать события, вызванные шансом, от тех, которые наступили в результате Промысла. То самое учение, которое обнаруживает шанс там, где он действительно есть, может доказать, руководствуясь постепенным повышением вероятности и переходя затем к доказательству, что там, где находятся единообразие, порядок и постоянство, там также пребывают Выбор и Промысл.

Наконец, одно из основных возможных применений этого *учения о шансах* это обнаружение таких истин, которые не могут не радовать ум своими общностью и простотой. Замечательные связи между их последствиями увеличат наслаждение открытием, а кажущиеся парадоксы, которыми оно изобилует, представят любознательным существенный повод для удивления и развлечения.

Весьма примечательный пример подобного рода можно усмотреть в невероятной выгоде, происходящей от повторения соотношений шансов. Так, допустим, что я играю с противником при соотношении шансов 43:40 в мою пользу пока кто-либо из нас не выиграет или не проиграет 100 ставок, при условии, что я уплачу ему сумму, равную тому выигрышу, на которую я имею право [рассчитывать] ввиду благоприятных условий игры. Спрашивается, сколько я должен уплатить при ставке в 1 гинею? Ответ: 99 гиней и более 18 шиллингов[8], что представляется почти невероятным ввиду небольшого соотношения 43:40. Пусть теперь соотношение шансов будет каким угодно, а число ставок всегда невелико, и все-таки одно общее следствие будет относиться ко всем возможным случаям и его можно будет применить к конкретным числам менее чем в минуту.

В своем *Введении* я объяснил основные правила, от которых зависит все приложение шансов и я сделал это насколько мог в самом простом виде, чтобы оно могло быть возможно наиболее общим. Смею думать, что те, кто знакомы с арифметичесими действиями, смогут при помощи одного только *Введения* решить весьма разнообразные задачи, зависящие от шансов. Ради тех джентльменов, которым было угодно подписаться на издание моей книги[9], я желал бы быть таким же понятным по всей книге. Это оказалось вряд ли возможным, поскольку открытие большей части правил целиком основывалось на алгебре, но я постарался как только мог извлечь из алгебраических вычислений несколько практических правил, на истинность которых можно положиться и которые могут быть весьма полезны тем, кто удовлетворился изучением одной лишь обыкновенной арифметики.

По этому случаю я должен известить тех своих читателей, которые опытны в обычной арифметике, что им будет нетрудно одолеть не только все практические правила, содержащиеся в этой книге, но и более полезные открытия, если они приложат немного усилий лишь для ознакомления с *алгебраическими* обозначениями, что может быть сделано за сотую долю того времени, которое тратится на обучение *стенографии*.

Один из основных методов, которые я применял в последующем изложении, это [метод] учения о *соединениях*, понимаемого несколько более широко чем в обычном смысле. Понятие о соединениях так хорошо приспособлено к вычислению шансов, что оно естественным образом приходит на ум каждый раз, когда пытаешься решить любую задачу этого рода. Именно это понятие привело меня к рассмотрению степеней мастерства игры у рискующих и я воспользовался им в большей части этой книги в качестве составной части исходных данных.

Он вовсе не усложняет вычисления; напротив, он скорее помогает им и украшает их. Правда, упомянутая степень мастерства может стать известной только из наблюдения, но если одно и то же наблюдение постоянно повторяется, следует решительно предположить, что ее можно хорошо оценить. Однако, чтобы уточнить вычисления и избежать возникновения ненужных сомнений у тех, кто любит геометрическую точность, нетрудно заменить слово *мастерство* большим или меньшим соотношением шансов [в пользу выигрыша в игре] любителей приключений, так чтобы про каждого из них можно было бы сказать, что он имеет определенное число шансов выиграть одну игру.

Общая теорема, открытая Сэром *Исааком Ньютоном* о возведении бинома в любую данную степень[10], бесконечно облегчает метод сочетаний, представляя зараз сочетания всех шансов, которые могут произойти любое число раз. Именно при помощи этой теоремы, соединенной с некоторыми другими методами, мне удалось отыскать практические правила для решения громадного разнообразия трудных вопросов и свести трудность лишь к арифметическому умножению, несколько примеров чего можно увидеть на с. 46 этой книги[11].

Другой примененный мной метод это метод *бесконечных рядов*, который во многих случаях решает задачи о шансах более естественно, чем [метод] соединений. Чтобы дать читателю понятие о нем, мы можем предположить двух человек, по очереди бросающих игральную кость. Если победителем считается тот, кто первым выбросит одно очко, то ясно, что процесс решения этой задачи не может быть должным образом сведен к соединениям, которые в основном служат для определения соотношения шансов между игроками без всякого учета очередности в игре. Удобно поэтому иметь возможность применять какой-либо другой метод, подобный следующему.

Предположим, что первый игрок желает договориться со своим противником по поводу преимущества, которым он обладает ввиду права на первый бросок. Сколько, спрашивает он, тот согласен уплатить за изменение очередности игры[12]. Естественно полагать, что противник предложит 1/6 часть ставки, поскольку [соотношение шансов] против него составляет всего 5:1 и что подобный расчет представлялся бы справедливым возмещением [первому игроку] за уступку первенства в броске. Предположим аналогично, что второй игрок в свою очередь потребует 1/6 часть оставшейся ставки как возмещение за свою очередь и что, согласившись с этим, первый вернул себе право на первый бросок. И снова этот первый игрок может претендовать на 1/6 часть остатка и так по очереди пока вся ставка не будет исчерпана. Но этого не произойдет пока каждый не возьмет себе бесконечное число частей и соотношение между их долями ставки, в точном соответствии с ее *бесконечным* воображаемым делением, следует назначить по методу *бесконечных рядов*. При помощи этого метода обнаружится, что ставка должна быть разделена между соперничающими игроками пропорционально числам 6 и 5.

Аналогичным методом можно определить, что при трех или более рискующих, которые играют друг с другом на указанных выше условиях, каждый из них, в зависимости от своей очередности в игре, может получить как свое должное долю ставки, выраженную соответствующим членом продолженной пропорции 6:5. Например, при трех игроках пропорция будет иметь вид 6:5:4 1/6 = 36:30:25.

Другое преимущество метода бесконечных рядов состоит в том, что каждый член ряда учитывает какое-то обстоятельство, в котором могут находиться игроки и что несколько шагов ряда [уже] достаточны, чтобы установить закон его движения. Единственная сопутствующая трудность этого метода состоит в суммировании стольких членов ряда, сколько требуется для решения предложенной задачи. Но опыт показывает, что члены рядов, возникающих при рассмотрении большинства случаев, относящихся к шансам, либо составляют геометрическую прогрессию, легко суммируемую по известным методам, либо какую-нибудь иную прогрессию, каждый член которой в соответствии со своей сущностью состоит в некотором постоянном отношении с определенным числом взятых по порядку предшествующих членов[13]. Для последнего случая я сумел отыскать несколько нетрудных теорем не только для определения закона указанного отношения, но и для вычисления требуемых сумм и это можно усмотреть в разных местах этой книги, но особенно на с. 220 – 230.

Третье преимущество метода бесконечных рядов состоит в том, что решения, полученные при его помощи, обладают определенными общностью и изяществом, которых вряд ли может достичь любой иной метод. Эти последние всегда усложнены различными неизвестными, так что решения, полученные при их помощи, обычно ограничиваются частными случаями.

Существуют и другие виды рядов, которые, хоть и не являются, строго говоря, бесконечными, все же называются рядами[14] ввиду закономерности своих членов, следующих один за другим с определенной единообразностью, которую всегда требуется отыскать. Такова сущность теоремы Сэра *Исаака Ньютона* в пятой *лемме* третьей книге его *Начал*[15] о проведении кривой через любое заданное число точек. И она, и другие теоремы, относящиеся к той же теме, могут быть выведены при помощи первого предложения его *Methodus Differentialis* [1711], опубликованного с некоторыми другими его трактатами попечением моего близкого друга и весьма искусного математика м-ра *У. Джонса* [1675 – 1749].

Упомянутая выше теорема очень полезна для суммирования любого числа членов, последние разности которых постоянны (таковы числа, называемые треугольными, тетраэдическими и т. д., а также квадраты, кубы и другие степени чисел, находящихся в арифметической прогрессии друг с другом). Я показал во многих местах этой книги как она может быть применена к этим случаям.

После некоторого размышления над вопросами, зависящими от общего принципа соединений, указанного в моем Введении, и над некоторыми другими, зависящими от метода бесконечных рядов, я приступил к методу соединений в строгом смысле. Я показываю, что он легко выводится из этого более общего принципа, который был разъяснен раннее.

Здесь можно заметить, что хотя он приложен к частным случаям, манера рассуждения и выведенные следствия являются общими, притом метод обсуждения общего, исходящий из частных примеров, весьма удобен по моему мнению, чтобы облегчить воображение у читателей.

После разъяснения общих правил соединений и приведения теоремы, которая может быть полезна для решения некоторых задач, относящихся к этой теме, я указываю новую теорему, в сущности являющуюся сжатой формой предыдущей и позволяющей удивительно просто решить некоторые, на первый взгляд быть может непреодолимо трудные вопросы шансов.

Именно при помощи этой последней теоремы мне удалось впервые полностью решить задачи об играх *фараон* и *Bassette* [см. также Montmort (1708, pp. 77 – 104; 144 – 156)]. Я признаю, что некоторые крупные математики уже потрудились вычислить преимущества *банкира* при любых обстоятельствах, относящихся либо к картам, которые остаются в его руках, либо к числу раз когда карта находится у *понтирующего игрока* в колоде. И все же любознательность пытливых [читателей] оставалась неудовлетворенной. Вот важнейший вопрос, и притом намного более трудный, чем остальные: Каков процент всех денег, поставленных на кон, достается банкиру в этих играх? Теперь я могу определенно ответить: очень близко к 3% в *фараоне* и 3/4% в *Bassette* как это усматривается в моей Задаче 33, где точно подсчитана его выгода.

В задачах 35 и 36 я разъяснил новый вид *алгебры*, при помощи которой решение некоторых вопросов, относящихся к соединениям, настолько просто, что в известной степени является немедленным следствием метода обозначений[16]. Я не позволяю себе сказать, что эта новая *алгебра* совершенно необходима для решения тех задач, для которых я применил ее, поскольку м-р *Монмор* (1708) и м-р *Николай Бернулли* решили многие случаи, рассмотренные в указанной книге, другим методом. Но я надеюсь, что меня не посчитают виновным в излишней уверенности, если я заявлю читателей, что метод, которому я следовал, обладает такой степенью простоты, не говоря уже об общности, которых вряд ли можно достичь иными путями.

Задача 39, которую среди прочих мне предложил Достопочтенный м-р *Френсис Робартес*, я решил в своем трактате 1712 г. Она, как и задачи 35 и 36, относится к методу соединений, который я представил зависящим от того же принципа[17]. Пытаясь решить ее в первый раз, я не мог руководствоваться ничем иным, кроме обычных правил соединений, как их представили д-р *Валлис* и другие. И, попытавшись применить их, я с удивлением обнаружил, что мои вычисления постепенно распухли до невыносимого объема. По этой причине я был вынужден обратиться к иному пути и постараться выяснить, нельзя ли вывести искомое решение из каких-либо более простых рассуждений. После этого я по счастью напал на упоминаемый мной метод и, поскольку он привел меня к весьма существенной простоте решения, я считаю его усовершенствованием метода соединений.

Задача 40 обратна предыдущим[18]. Метод ее решения весьма примечателен и выдумка состоит в нем в переходе от числовой арифметической прогрессии к геометрической. Так всегда следует поступать при больших числах с малыми промежутками между ними. Я открыто признаю, что обязан этой полезной идеей моему уважаемому другу, превосходному математику, секретарю Королевского общества д-ру *Галлею*, который очень давно, как я видел, применил ее по другому поводу. За это, и за иные поучительные представления, которые он охотно сообщал мне на протяжении нашей непрерывной 25-летней дружбы, я приношу ему чистосердечную благодарность.

Задачи 44 и 45, использующие [при решении] смесь методов соединений и бесконечных рядов, могут быть предложены для [получения] образца решения некоторых из наиболее трудных случаев, могущих встретиться в области шансов. Здесь я должен воздать должное м-ру *Николаю Бернулли*, признав, что он прислал мне решение этих задач до того, как я опубликовал свое. Я тотчас же направил его решение *Королевскому обществу* и представил его как достижение, которое следует горячо рекомендовать. После этого Общество указало, что это решение должно быть опубликовано, что и было сделано через некоторое время в *Philosophical Transactions* [*of the Royal Society*], куда было включено и мое решение [N. Bernoulli 1717; De Moivre 1717].

Следующие далее задачи относятся в основном к продолжительности игры или к методу определения вероятного числа партий при игре двух противников до выигрыша или проигрыша обусловленного числа ставок одним из них. Эта тема предоставляет громадное разнообразие любопытных вопросов, каждый из которых обладает своей собственной степенью трудности, и я посчитал необходимым разделить ее на несколько отличающихся друг от друга задач и пояснить их решение подобающими примерами.

Хотя эти вопросы могут с первого взгляда показаться исключительно трудными, у меня имеются некоторые основания полагать, что обладающие достаточным мастерством в алгебре смогут легко повторить те шаги, которые я предпринял, чтобы подойти к их решению, и что лица, лишь едва знакомые с элементами этого искусства, поймут основной метод подхода к решению.

Когда я впервые постарался отыскать общее решение задачи о продолжительности игры, не существовало ничего, что могло бы пролить мне какой-нибудь свет. М-р *Монмор*, в первом издании своей книги [1708] представил решение задачи о продолжительности игры при числе ставок не более трех и дополнительном ограничении равенством мастерства рискующих. Но он не обосновал своего решения. [Мало того.] Доказательство, будучи найдено, оказалось весьма малополезным для отыскания общего решения задачи и я был вынужден выяснить, к чему приведет меня мое собственное исследование, которое оказалось успешным и найденный мной результат был впоследствии опубликован в моем *Образчике* [1712].

Все задачи, которые там относились к продолжительности игры, здесь полностью воспроизведены, но метод их решения несколько улучшен моими новыми открытиями о природе тех рядов, которые появляются при рассмотрении этой темы. Однако, поскольку принципы этого метода были установлены в моем *Образчике*, мне не оставалось ничего другого как сформулировать следствия, которые естественным образом выводились из них.

Сэру Исааку Ньютону, Президенту *Королевского общества*

Опубликовано в первом издании *Учения о случае*; перепечатано в третьем его издании, с. 329

Сэр, посокольку наибольшую помощь по этой теме я получил от Ваших несравненных работ, и особенно от Вашего метода рядов, я полагаю своим долгом публично признать, что улучшения, которые я сделал в рассматриваемом в этой книге предмете, выведены главным образом исходя из Ваших трудов. Огромная польза, которая в этом смысле выпала на мою долю, требует моей доли в общей дани благодарности, положенной Вам от ученого мира. Но одно преимущество, являющееся моим собственным, есть часто оказываемая мне честь быть допущенным к Вашим частным беседам, в ходе которых сомнения, имевшиеся у меня относительно любой темы, относящейся к *математике*, разрешались Вами с наибольшими возможными человечностью и снисходительностью.

Эти знаки Вашей благосклонности тем более ценны для меня, так как я не имел для нее никакого другого основания, кроме ревностного желания понять Ваши величественные и универсально полезные размышления. Я должен буду полагать себя весьма счастливым, если, дав своим читателям метод вычисления влияний шансов, поскольку они являются результатами игры, и тем самым установив определенные правила для оценки того, в какой степени некоторые виды событий могут быть вызваны Предначертанием а не шансами, я смог бы этим небольшим очерком возбудить в других желание продолжать эти исследования и изучать, исходя из Вашей философии, способ сбора, при помощи обоснованных вычислений, свидетельств утонченной Мудрости и Предначертания, которые выявляются в *явлениях* природы по всей вселенной.

Остаюсь, с наибольшим уважением, Сэр,

Ваш смиреннейший и покорнейший слуга А. Де Муавр

Введение

Учение о случае, 1756, с. 1 – 33. Неполный перевод

1. Вероятность события выше или ниже в соответствии с числом шансов для его наступления по сравнению с общим числом шансов его появления или непоявления.

2. Если, следовательно, мы образуем дробь, числитель которой будет числом шансов, в соответствии с которыми событие может иметь место, а знаменатель – число всех шансов для его наступления или ненаступления, эта дробь должным образом укажет вероятность появления [события]. Так, если событие имеет 3 шанса наступить и 2 шанса не наступить, дробь 3/5 подходяще представит вероятность его появления и может быть принята как ее мера[19].

То же можно сказать о вероятности ненаступления [события], которая таким же образом измеряется дробью [...]

3. При сложении дробей, представляющих вероятности наступления и ненаступления [события] сумма всегда окажется равной единице так как [...]. И, поскольку достоверно, что событие либо появится, либо нет, достоверность, которую можно мыслить как понятие бесконечно большой степени вероятности, подходяще представлена единицей. [...]

4. Если после появления события я получаю право на некоторую сумму денег, мое ожидание этой суммы перед наступлением события имеет определенное значение. [...]

5. Во всех случаях ожидание некоторой суммы оценивается ее умножением на дробь, представляющую вероятность ее получения. [...]

Следствие. Из предыдущего необходимо следует, что если даны цена ожидания и стоимость ожидаемой вещи, частное от деления первого на второе выразит вероятность получения ожидаемой суммы. Так, если [...]

6. Риск потерять какую-либо сумму противоположен ожиданию и его истинная мера есть произведение суммы, подверженной риску, на вероятность потери.

7. Выгода или невыгода в игре слагается из сочетания ожиданий игроков и их риска.

Так, если А играет с В и их ставки 5 фунтов и 3 фунта и число их шансов на выигрыш 4 и 2 соответственно и если при таких обстоятельствах требуется определить их выгоды и невыгоды, мы можем рассуждать следующим образом [...]

8. Если для получения какой-либо суммы требуется появление некоторых независимых друг от друга событий, значение ожидания этой суммы определяется умножением вероятностей наступления событий и затем умножением произведения на значение ожидаемой суммы.

Так, допустим, что два события должны произойти для получения 90ф. Первое имеет 3 шанса за свое появление и 2 – против, второе, соответственно, 4 шанса и 5 шансов. […] Вероятности появления первого [события] – 3/5, второго – 4/9. […]

Доказательство этого утверждения станет очень простым, если учесть, что, допустив, что первое событие имело место, ожидание будет полностью зависеть от появления второго и до его наступления или ненаступления оно сто́ит в точности 4/9 ·90ф = 40ф. […] Но вероятность наступления первого [события] по предположению равна 3/5 и поэтому искомое ожидание оценивается произведением 3/5 ·4/9 ·90. […] И то же самое правило применимо для появления или непоявления любого числа событий.

Следствие. Если отвлечься от значения получаемой суммы, то просто лишь вероятность ее получения будет произведением вероятностей появления [соответствующих событий]. […]

До сих пор я ограничивался рассмотрением независимых событий. Но, ввиду опасения, что термины *независимый* и *зависимый*, которые упоминаются ниже, могут вызвать некоторую неясность, необходимо уже сейчас полностью определиться с их пониманием. Два события независимы если они не соединены друг с другом и появление одного из них не способствует и не препятствует появлению другого. Два события зависимы, если они соединены таким образом, что вероятность появления одного из них изменяется при появлении другого[20].

Для пояснения этого недурно предложить две следующие простые задачи. […]

Отсюда можно заключить, что вероятность появления двух зависимых событий равна произведению вероятности появления одного из них на вероятность наступления другого, которую оно [другое] будет иметь после того, как первое событие будет считаться наступившим. То же самое правило распространяется на появление любого числа событий.

9. Но чтобы определить вероятность появления нескольких зависимых событий самым простым путем, удобно различать их в уме друг от друга по порядку, допустив, что одно из них – первое, другое – второе и т. д.

После этого вероятность появления первого события можно считать независимой [величиной], вероятность второго определится в предположении, что первое произошло, вероятность третьего – в предположении, что имели место первые два и т. д. Вероятность наступления всех событий окажется равной произведению этих вероятностей, определенных как указано выше. […] Бóльшую степень трудности представляет исследование вероятности появления одних зависимых событий и непоявление других и поэтому удобнее перенести его в другое место.

10. Если я ожидаю несколько выплат, то весьма ясно, что мое ожидание равно сумме ожиданий частных выплат. Так, предположим два события, первое из которых имеет 3 шанса за свое появление и 2 шанса – против, а второе, соответственно, 4 шанса и 5 шансов, и что я получу право на 90ф. при наступлении первого события и на столько же при появлении обоих событий. Я желаю определить значение своего ожидания всей выплаты.

Я говорю […]. Ожидание в соответствии с первым случаем стóит 90 ·3/5 = 54. […] Ожидание второй суммы – 90 ·4/9 = 40 и ожидание всего стóит 54ф. + 40ф. = 94ф. Но если я получаю 90ф. за появление либо первого, либо второго из указанных событий, метод определения значения моего ожидания несколько изменится. Хоть мое ожидание первого события стоит 54ф., […] я все же учитываю, что ожидание второго исчезнет после появления первого события и что оно останется лишь если первое событие не произойдет. Вероятность последнего равна 2/5; и если первое событие не произойдет, мое ожидание будет 40, а потому […] мое ожидание (до того, как первое событие либо наступит, либо нет) стóит 40 ·2/5 = 16, а ожидание всего стóит 54ф. + 16ф. = 70ф. Если второе событие будет считаться первым, а первое – вторым, вывод останется тем же. […]

11. Пусть […] a и b – числа шансов появления и непоявления события. Тогда вероятность его однократного наступления при любом количестве испытаний будет выражена рядом

$$\frac{a}{a+b} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{ab^2}{(a+b)^3} + \ldots,$$

который должен быть продолжен, чтобы иметь число членов, равное числу испытаний. […]

В тех же предположениях вероятность двукратного появления события будет выражена рядом

$$\frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{2a^2b}{(a+b)^3} + \frac{3a^2b^2}{(a+b)^4} + \frac{4a^2b^3}{(a+b)^5} + \ldots,$$

который должен быть продолжен, чтобы иметь число членов на единицу меньшее числа испытаний. […]

Но все эти частные ряды [случаи] можно охватить общим. Пусть a и b – числа шансов появления и непоявления события, l – требуемое число раз наступления события при любом числе испытаний n. Обозначим a +

$b = s$, тогда вероятность появления события l раз в n испытаниях будет выражена рядом

$$(a/s)^{l}[1 + \frac{lb}{s} + \frac{l\,(l+1)b^2}{1\cdot 2s^2} + \frac{l\,(l+1)\,(l+2)b^3}{1\cdot 2\cdot 3s^3} + \frac{l\,(l+1)\,(l+2)\,(l+3)b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4s^4} + \ldots]^{\mathbf{21}}.$$

Этот ряд должен быть продлен, чтобы, без учета общего множителя $(a/s)^{l}$, он имел $(n - l + 1)$ членов. По той же причине, если обозначить $n - l + 1 = p$, вероятность противоположного, т.е. появления события иное число раз, будет выражена рядом

$$(b/s)^{p}[1 + \frac{pa}{s} + \frac{p\,(p+1)a^2}{1\cdot 2s^2} + \frac{p\,(p+1)\,(p+2)a^3}{1\cdot 2\cdot 3s^3} + \ldots],$$

который должен быть продолжен, чтобы иметь, без учета общего множителя, l членов. […]

Первый ряд при циклической замене l на $(n - l + 1)$ и a на b переходит во второй. […]

12. При любом числе партий, недостающих игрокам A и B для выигрыша, игра закончится не позже чем после общего числа этих партий без единицы. […]

Случай [Пример] 10. Допустим, что игроку A нехватает для выигрыша трех очков, а игроку B – семи и что соотношение их шансов выиграть партию равно 3:5. Найти вероятности их выигрыша. […]

13. Представим себе игральную кость с заданным числом одинаковых граней и другую кость с тем же самым или иным числом одинаковых граней. […] Я говорю, что число всех исходов при броске этих костей равно произведению количеств этих граней. […]

14. Пусть теперь грани каждой кости различаются по цвету на белые и черные и число белых граней на первой и второй костях равно A и a, число черных граней соответственно, B и b. […] Умножение $(A + B)$ на $(a + b)$ дает произведение $Aa + Ab + Ba + Bb$, которое указывает все исходы при броске этих костей. […] [После пояснений следует обобщение на случай трех костей с заменой A, a и B, b на A, a, α и B, b, β соответственно и возвращение к предыдущему случаю при $A = a$ и $B = b$.]

15. Исходя из предыдущих рассуждений, можно сформулировать следующее общее правило. Пусть имеется любое число n костей одного и того же вида, грани которых отличаются по цвету на белые и черные числом a и b на каждой. Тогда, возведя бином $(a + b)$ в n-ю степень, будем иметь […].

16. Мы, стало быть, можем сформулировать следующий общий принцип [о вероятности появления события l раз в n испытаниях].

17. Если игрокам A и B нехватает для выигрыша l и p очков соответственно и их шансы выиграть одну партию находятся в соотношении $a:b$, то числа шансов для их выигрыша будут находиться в том же соотношении как сумма p первых членов бинома $(a + b)^{l+p-1}$ к сумме l его последних членов. […]

Прежде, чем окончить это Введение, не будет неуместно [т.е. будет уместно] показать, как некоторые действия часто можно сократить только лишь появлением одной буквы вместо двух или трех для обозначения вероятности наступления события.

18. Пусть, стало быть, x – вероятность события, y и z – вероятности второго и третьего событий. Исходя из сказанного в начале Введения, будем иметь вероятности их ненаступления $(1 - x)$, $(1 - y)$ и $(1 - z)$. Теперь будет легко ответить на вопросы о шансах, которые могут возникнуть по поводу этих событий. [Следует пояснение и соответствующие записи вероятностей типа xyz, $[1 - (1 - x)(1 - y)(1 - z)]$, $xy(1 - z)$ и т. д.]

Замечание. […] Если отношение шансов $R:S$ выражено бóльшими числами чем желательно, оно может быть приведено к *наименьшим наиболее точным* членам по методу, предложенному д-ром *Валлисом, Гюйгенсом* и другими как указано ниже. [Для $S < R$ следует разложение дроби S/R в непрерывную дробь и соответствующие примеры.]

Объявление (без подписи)

Учение о случае, 1756, с. xi

Ввиду потери зрения в преклонном возрасте автор этой работы был вынужден поручить выпуск настоящего издания одному из своих друзей, которому он дал экземпляр книги [предыдущего издания] с некоторыми собственноручными поправками и дополнениями на полях. К ним редактор добавил несколько других в тех случаях, в которых они представлялись необходимыми и расположил все в большем порядке, возвратив на свое надлежащее место то, что было случайно переложено, и собрав воедино задачи, относящиеся к рентам, таким же образом, как они располагались в предыдущем исправленном издании трактата по этой теме. Приложено также Добавление, состоящее из нескольких полезных частей, причем все это сделано в соответствии с планом, согласованным с автором более чем за год до его смерти [в 1754 г.].

Метод аппроксимирования суммы членов бинома $(a + b)^n$, разложенного в ряд, с выводом некоторых практических правил для оценки степени одобрения, которое должно быть придано испытаниям

De Moivre (1733), см. Библиографию

Хотя решение задач на шансы часто требует сложения нескольких членов бинома $(a + b)^n$, при очень больших показателях степени, вычисления оказываются настолько тяжелыми и трудными, что лишь немногие производили их. Ибо, кроме *Якоба* и *Николая Бернулли*[22], двух великих математиков, я не знаю никого, кто бы пытался это сделать. И, хотя они выказали громадное мастерство и удостоились похвалы за их трудолюбие, все же еще требовались некоторые вещи. Действительно, то, что они осуществили, было не столько аппроксимированием, сколько определением весьма широких пределов, внутри которых, как они доказали, содержалась сумма членов.

Метод, которому они следовали, кратко описан в моей книге (1730) и с ней читатель может справиться коли пожелает, если только они [читатели?] не решат, что возможно будет лучше всего, проверить, что они сами написали на эту тему. Что до меня, то я принялся за это исследование не ввиду мнения, что я должен превзойти других, в чем меня можно было бы извинить, но исполняя желание весьма достойного джентльмена и хорошего математика, который поощрил меня в этом. Я теперь добавлю некоторые новые мысли к прежним; но, чтобы сделать более понятным связь между ними, я должен воспроизвести кое-что, опубликованное мной довольно давно.

1. Прошло 12 лет или больше с тех пор, как я обнаружил следующее[23]. Если бином (1 + 1) возвести в очень высокую степень, обозначенную через n, отношение среднего члена к сумме всех членов, т.е. к 2^n, можно выразить дробью

$$\frac{2A(n-1)^n}{n^n\sqrt{n-1}},$$

где A представляет число, гиперболический логарифм которого равен

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} + \ldots$$[24]

Но поскольку величина

$$\frac{(n-1)^n}{n^n} = [1 - (1/n)]^n$$

почти точно задана при больших значениях показателя степени n, что нетрудно доказать, оказывается, что при бесконечной степени эта величина полностью задана и представляет собой число, гиперболический логарифм которого равен – 1. Отсюда следует, что если B – число, гиперболический логарифм которого

$$-1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} + \ldots,$$

написанное выше выражение станет равным $2B/\sqrt{n-1}$ или почти $2B/\sqrt{n}$. И что поэтому, если поменять знаки у [членов] этого ряда и теперь предположить, что B – число, гиперболический логарифм которого равен

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \ldots,$$

это выражение изменится на $2/B\sqrt{n}$.

Когда я впервые взялся за это исследование, я удовлетворился общим определением значения B, прибавив несколько членов к ряду, указанному выше. Но поскольку я усмотрел, что этот ряд сходится лишь медленно, и чувствуя в то же время, что сделанное мной достаточно хорошо отвечало моей цели, я отказался от дальнейших усилий пока мой достойный и ученый друг м-р *Джеймс Стирлинг*, который занялся этим [же] исследованием после меня, не обнаружил, что величина B

действительно означала корень из окружности единичного круга. Таким образом, если окружность обозначить через c, отношение среднего члена ко сумме всех членов оказывается равным
$2/\sqrt{nc}$ [$= 2/\sqrt{2\pi n}$].

Но, хотя знание связи числа B с окружностью круга не является необходимым, если только его значение получено либо продолжая вышеуказанный логарифмический ряд, либо любым другим путем, я с удовлетворением признаю, что это открытие не только избавило [меня] от хлопот, но и обеспечило решению особую изящность.

2. Я также обнаружил, что логарифм отношения среднего члена бинома, возведенного в высокую степень, к любому члену, отстоящему от него на промежуток, обозначенный через l, окажется при $m = n/2$ с весьма хорошим приближением равным

$$[m + l - (1/2)] \log (m + l - 1) + [m - l + (1/2)] \log (m - l + 1) - 2m \log m + \log[(m + l)/m].$$

Следствие 1. Приняв это, я заключаю, что если m или $n/2$ бесконечно большая величина, логарифм отношения члена, удаленного на l от среднего, к этому среднему будет равен $-2l^2/n$.

Следствие 2. Поскольку число, соответствующее гиперболическому логарифму $-2l^2/n$, равно

$$1 - \frac{2l^2}{n} + \frac{4l^4}{2n^2} - \frac{8l^6}{6n^3} + \ldots,$$

сумма членов между средним и тем, расстояние которого от него обозначено через l, будет

$$\frac{2}{\sqrt{nc}}\ [l - \frac{2l^3}{1\cdot 3n} + \frac{4l^5}{2\cdot 5n^2} - \frac{8l^7}{6\cdot 7n^3} + \frac{16l^9}{24\cdot 9n^4} - \ldots].$$

Предположим теперь, что $l = s\sqrt{n}$, тогда указанная сумма будет выражена рядом

$$\frac{2}{\sqrt{c}}\ [s - \frac{2s^3}{3} + \frac{4s^5}{2\cdot 5} - \frac{8s^7}{6\cdot 7} + \frac{16s^9}{24\cdot 9} - \ldots].$$

Более того, если под s понимать 1/2, этот ряд примет вид

$$\frac{2}{\sqrt{c}}\ [\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5\cdot 8} - \frac{1}{6\cdot 7\cdot 10} + \frac{1}{24\cdot 9\cdot 32} - \ldots].$$

Он сходится так быстро, что лишь с учетом семи или восьми членов требуемая сумма может быть вычислена до шести или семи знаков. Можно установить, что без учета общего множителя $2/\sqrt{c}$ она равна 0.427812. Поэтому, прибавляя к табличному [десятичному] логарифму этого числа, т.е. к $\overline{9}.6312529$, логарифм $2/\sqrt{c}$, т.е. $\overline{9}.9019400$, получим сумму $\overline{1}\overline{9}.5331929$[25], которому соответствует число 0.341344.

Лемма. Если событие таким образом зависит от шанса, что вероятности его наступления и ненаступления совпадают; если проделано некоторое заданное число n испытаний, чтобы увидеть, как часто оно происходит или нет и если [наконец] l – другое данное число, $l < n/2$, то вероятность того, что событие не наступит ни чаще чем $[(1/2)n + l]$ раз, ни реже чем $[(1/2)n – l]$ раз, можно определить следующим образом.

Пусть L и L – два члена, удаленных с обеих сторон от среднего члена разложенного в ряд бинома $(1 + 1)^n$ на одно и то же расстояние l и s – сумма членов между L и L включительно, то требуемая вероятность будет должным образом выражена дробью $s/2^n$. Основанное на обычных принципах учения о шансах, это утверждение не нуждается здесь в доказательстве.

Следствие 3. И поэтому, будь бесконечное число испытаний возможно, вероятность событию, имеющему равное число шансов наступить или нет, не появиться ни чаще чем $[(n/2) + (\sqrt{n}/2)]$ раз, ни реже чем $[(n/2) – (\sqrt{n}/2)]$ раз, будет выражена удвоенным числом, указанным в Следствии 2, т.е. числом 0.682688, и, следовательно, вероятность противоположного, т.е. наступление события либо чаще, либо реже чем указано выше, будет равна 0.317312; сумма этих вероятностей равна единице, которая является мерой достоверности. В малых числах отношение этих вероятностей [2.152] очень близко к 28:13 [= 2.154].

Следствие 4. Хотя бесконечное число испытаний нереально, предыдущие заключения можно очень неплохо приложить к конечным числам если они велики. Так, если произведено 3600 испытаний, мы возьмем $n = 3600$, $n/2 = 1800$ и $\sqrt{n}/2 = 30$ и вероятность событию не наступить ни чаще чем 1830 раз, ни реже чем 1770 раз, будет 0.682688.

Следствие 5. И поэтому мы можем установить следующий основной принцип (maxim): при больших показателях степени отношение суммы членов, заключенных между двумя крайними, находящимися по обе стороны от среднего члена на расстояниях $\sqrt{n}/2$, к сумме всех членов должным образом выражается десятичной дробью 0.682688, т.е. почти дробью 28/41 [= 0.682927].

И все же не следует представлять себе, что есть какая-то необходимость, чтобы число n было безмерно большим. Предположив, что оно не превышает 900, – нет, даже 100, – данное здесь правило будет достаточно точным, что я подтвердил испытаниями [пробными вычислениями]. Но сто́ит отметить, что столь небольшая доля n как $\sqrt{n}/2$, которая настолько убывает по отношению к n при возрастании этого n, очень скоро представит вероятность 28/41 или соотношение шансов 28:13.

Исходя из этого, мы естественно подводим себя к вопросу, каковы границы, внутри которых содержится соотношение равенства?[26] Я отвечаю, что эти границы должны быть установлены на расстоянии от среднего члена, весьма близко выраженным числом $\sqrt{2n}/4$. Так что в указанном случае, в котором было предположено, что $n = 3600$, $\sqrt{2n}/4$ окажется близким к 21.2, т.е. по отношению к 3600 не бо́льшим чем 1/169. Таким образом, существует почти один и тот же шанс, или скорее немного больше шансов, что в 3600 испытаниях, в каждом из которых событие может равным образом иметь место или нет, избыток его наступления или ненаступления свыше 1800 раз не будет больше чем примерно 21.

Следствие 6. Если l истолковать (interpret) как $\sqrt{n}$, ряд не будет сходиться так быстро, как в предыдущем случае, когда было $l = \sqrt{n}/2$, ибо здесь удовлетворительное приближение будет обеспечено не менее чем 12 или 13 членами ряда и потребуется тем большее их число, чем l будет больше чем $\sqrt{n}$. По этой причине я сейчас использую прием механических квадратур, впервые изобретенный Сэром *Исааком Ньютоном* и впоследствии примененный м-ром *Котсом*, м-ром *Джеймсом Стирлингом*, мной и быть может другими.

Он состоит в приблизительном вычислении площади [ограниченной] кривой по известному определенному числу ее ординат A, B, C, D, E, F, … расположенных на одном и том же расстоянии друг от друга, притом чем больше ординат, тем точнее квадратура. Но здесь я ограничусь четырьмя, что достаточно для моей цели. Предположим поэтому, что A, B, C, D – эти четыре ординаты и что расстояние между первой и последней обозначено через l. Тогда площадь, содержащаяся между ними, будет равна

$$\frac{1(A+D)+3(B+C)}{8}\,l.$$

Возьмем теперь расстояния $0\sqrt{n}$, $(1/6)\sqrt{n}$, $(2/6)\sqrt{n}$, …, $(5/6)\sqrt{n}$, $(6/6)\sqrt{n}$, каждое из которых больше предыдущего на $(1/6)\sqrt{n}$, притом последняя из них равна $\sqrt{n}$. Четыре последних это $(3/6)\sqrt{n}$, $(4/6)\sqrt{n}$, $(5/6)\sqrt{n}$, $(6/6)\sqrt{n}$. Вычислим их квадраты, удвоим их, разделим каждый удвоенный квадрат на n и поставим перед всеми ими знак минус. Мы получим – 1/2, – 8/9, – 25/18 и – 2/1 и эти числа следует рассматривать как гиперболические логарифмы. Соответствующие им числа 0.60653, 0.41111, 0.24935 и 0.13534 будут обозначать ординаты A, B, C, D. Поскольку мы истолковали l как $\sqrt{n}/2$, площадь окажется равной $0.170203\sqrt{n}$. Удвоенная площадь, умноженная на $2/\sqrt{nc}$, даст произведение 0.27160. Прибавим его к площади [!], найденной раньше, т.е. к 0.682688, и сумма 0.95428 укажет вероятность, что после n испытаний событие не произойдет ни чаще, чем $[(n/2) + \sqrt{n}]$ раз, ни реже, чем $[(n/2) - \sqrt{n}]$ раз. Вероятность противоположного события будет, следовательно, 0.04572, что показывает, что соотношение шансов, что событие не произойдет ни чаще, ни реже, чем указано назначенными границами, равно почти 21:1.

Рассуждая таким же образом, можно обнаружить, что вероятность событию не произойти ни чаще, чем $[(n/2) + (3/2)\sqrt{n}]$ раз, ни реже, чем $[(n/2) - (3/2)\sqrt{n}]$ раз, будет равна 0.99874 [0.99730], так что соотношение шансов в этом случае окажется почти равным 369:1[27]. Чтобы приложить [все] это к конкретным примерам, необходимо оценить частость появления и непоявления события по квадратному корню из числа, которое обозначает сколько испытаний сделано или задумано. И этот корень, в соответствии с намеком в Следствии 4, будет поистине *модулем*, при помощи которого следует соразмерять нашу оценку. Предположим поэтому, что сделано 3600 испытаний. Если требовалось установить вероятность, что событие не произойдет ни чаще, чем 1850 раз, ни реже чем 1750 раз, причем эти числа можно изменять как только угодно, лишь бы они оставались на раном удалении от среднего 1800, следует полуразность между указанными числами, т.е. 50, приравнять к $s\sqrt{n}$. При $3600 = n$, $\sqrt{n} = 60$, так что $50 = 60s$ и $s = 50/60 = 5/6$. Поэтому, если взять пропорцию, which in an infinite power, the double sum of the terms corresponding to the interval $(5/6)\sqrt{n}$ bears to the sum of all the terms, мы чрезвычайно точно получим искомую вероятность[28].

Лемма 2. В разложении $(a + b)^n$ при любом n наибольший член тот, в котором показатели степени чисел a и b находятся в том же соотношении друг к другу, как сами величины a и b. Так, взяв

$$(a + b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120\,a^7b^3 + 210\,a^6b^4 + 252\,a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120\,a^3b^7 + 45\,a^2b^8 + 10\,ab^9 + b^{10}$$

и полагая, что $a/b = 3/2$, получим наибольший член $210\,a^6b^4$ […]. Но если $a/b = 4/1$, то наибольшим окажется член $45a^8b^2$.

Лемма 3. Пусть событие так зависит от шанса, что вероятности его наступления и ненаступления находятся в любом назначенном соотношении, обозначенном как a/b и пусть намечено сделать некоторое число испытаний, чтобы установить, как часто будет появляться и не появляться событие. Тогда вероятность, что оно не наступит ни чаще, чем $[an/(a + b) + l]$ раз, ни реже, чем $[an/(a + b) – l]$ раз[29], найдется следующим образом. Пусть [члены] L и R удалены от наибольшего члена на одно и то же расстояние l и S – сумма членов между ними включительно. Тогда требуемая вероятность будет должным образом выражена величиной $S/(a + b)^n$.

Следствие 8. При бесконечном показателе степени n отношение наибольшего члена к сумме всех остальных должным образом выражается дробью $(a + b)/\sqrt{abnc}$, в которой c, как и раньше, означает окружность единичного круга.

Следствие 9. Пусть при бесконечном показателе степени n некоторый член удален от наибольшего на расстояние l. Тогда гиперболический логарифм отношения этого члена к наибольшему выражается дробью $– [(a + b)^2/2abn]l^2$. Так будет, если только отношение l/n не конечно, а может быть представлено как находящееся между любым данным числом p и $\sqrt{n}$, так что l можно выразить как $p\sqrt{n}$. В этом случае члены L и R будут равны друг другу.

Следствие 10. Если вероятности наступления и ненаступления [события] находятся в любом отношении неравенства [не равны друг другу], задачи, относящиеся к сумме членов бинома $(a + b)^n$, будут решены с той же легкостью, как те, в которых указанные вероятности находятся в отношении равенства.

Замечание 1. Из сказанного следует, что шанс очень мало нарушает [ход] событий, которые при своем естественном установлении были замыслены наступать или не наступать в соответствии с некоторым детерминированным законом. Ибо, чтобы облегчить понимание, представим себе круглую металлическую монету с двумя противоположными отполированными гранями, не отличающимися друг от друга ничем кроме цвета; одну из них мы предположим белой, другую – черной. Ясно, что обе грани этой монеты могут с равной легкостью оказаться сверху и можно даже предположить, что она была отчеканена именно так, чтобы показывать иногда одну грань, а иногда другую[30]. Следовательно, если подбросить монету, исход будет решаться шансом. В Задаче 72 мы видели, что, хотя шанс может привести к неравенству появлений [граней] и к еще большему неравенству в соответствии со временем, в течение которого он проявляется, все же эти появления так или иначе будут постоянно стремиться к отношению равенства.

Но мы видели, кроме того, при рассмотрении задачи этого мемуара, что при большом числе испытаний, как, например, при 3600, соотношение шансов будет бóльшим чем 2:1, что одна из граней (предположим, белая) не появится ни чаще чем 1830 раз, ни реже, чем 1770 раз. Иными словами, что ее появление не будет отклоняться от точного равенства более чем на 1/120 часть всего количества появлений [от 1/3600]. В соответствии с тем же правилом, при 14 400 испытаниях вместо 3600 соотношение шансов все еще будет больше чем 2:1, что эти уклонения не превысят 1/ 260 часть всего числа [испытаний], а при миллионе испытаний то же соотношение шансов будет иметь место для уклонений, не превышающих 1/2000 части всего числа [т.е. миллиона].

Но это соотношение будет возрастать с громадной быстротой, если, взамен столь узких пределов по обе стороны от равенства, представленного числом $\sqrt{n}/2$, мы удвоим или утроим их. Ибо в первом случае соотношение шансов станет равным 21:1, а во втором – 369:1 и окажется еще бóльшим, если мы учетверим расстояние между границами и, наконец, станет бесконечным. И все же, станем ли мы удваивать, утраивать или учетверять их и т. д., расширение этих границ будет иметь лишь незначительное соотношение со всем и никакого соотношения, если это *все* бесконечно. Математики легко усмотрят причину этого, они знают, что квадратный корень из любого показателя степени тем меньше относительно этой степени, чем она больше. То, что мы сказали, относится также к отношению неравенства, что можно усмотреть из нашего Следствия 9 и таким образом во всех случаях оказывается, что, *хотя шанс приводит к неправильностям, все же соотношение шансов окажется неограниченно большим в пользу того, что с течением времени эти неправильности не окажут никакого влияния на восстановление того Порядка, который естественно вызывается* ***первоначальным Замыслом***[31].

Замечание 2. Предположим некоторый детерминированный закон, в соответствии с которым должно произойти любое событие. Мы доказываем, что отношение наступлений события [к его ненаступлению] постоянно приближается к этому закону по мере умножения числа испытаний или наблюдений. Таким же образом, *обратно*, если из бесконечного множества наблюдений мы устанавливаем, что соотношение событий стремится к определенному количеству, как например к отношению P/Q, то мы заключаем, что это отношение выражает детерминированный закон, в соответствии с которым событие должно происходить[32].

Ибо пусть этот закон выражен не отношением P/Q, а каким-либо иным, например отношением R/S. Будет ли тогда соотношение событий стремиться к последнему, а не к первому? Это противоречит нашему предположению. И аналогичная, если не бóльшая нелепость возникнет, если мы предположим, что событие происходит не в соответствии с каким-либо законом, а полностью беспорядочно и неопределенно, ибо тогда события не будут стремиться ни к какому неизменному соотношению[33].

Опять же, поскольку таким образом доказывается, что в устройстве вещей существуют определенные законы, в соответствии с которыми происходят события, не менее очевидно из наблюдений, что эти законы служат мудрым, полезным и благодетельным целям сохранения непоколебимого порядка во вселенной, размножения видов живых существ и обеспечения таких степеней счастья способному на ощущения роду [человеческому], какие соответствуют его состоянию.

Но все подобные законы, равно как и первоначальные Замысел и Цель их установления, должны были быть привнесены *извне*. *Инерция* материи и природа всех созданных существ делают невозможным, чтобы какая-то вещь видоизменяла свою сущность или придала либо самой себе, либо иной вещи первоначальное установление или склонность. Стало быть, если не ослепляться метафизической пылью, мы подойдем кратким и очевидным путем к признанию великого **Творца** всего и **Правителя** над всеми, *всемудрого, всесильного и доброжелательного*.

Не соединив последней части нашего рассуждения с его первой частью, м-р *Николай Бернулли*, весьма ученый и добрый человек, пришел к отказу и даже к поношению этого довода, исходящего из *конечной цели* и столь настойчиво утверждаемого нашими лучшими писателями[34]. В первую очередь [мы имеем в виду] примерно равное число мужских и женских рождений [крещений], рассмотренных этим превосходным человеком, покойным д-ром *Арбутнотом* (1712). Из таблиц наблюдений, продолжавшихся 82 года, т.е. с 1629 по 1711 [1710] гг., м-р *Бернулли* делает вывод, что число ежегодных рождений в Лондоне было в среднем примерно 14 000; и также, что число мужских рождений относилось к числу женских почти как 18:17. Но он полагает, что подход от этого к какому-либо доводу против влияния *шанса* на производство обоих полов является величайшей слабостью мысли. Ибо он говорит:

> *Пусть подкидываются 14 000 костей, каждая с 35-ю гранями, 18 из которых белые и 17 черные. Существует громадное соотношение шансов в пользу того, что отношение чисел появившихся белых и черных граней окажется столь же близким* [к 18:17] *или более близким* [к нему]*, чем отношение мальчиков и девочек в таблицах* [наблюдений].

Краткий ответ на это таков.

> *Д-р Арбутнот никогда не говорил этого в предположении, что соотношение легкости производства мальчиков и девочек уже <u>установлено</u> близким к отношению равенства или к 18:17. Он был <u>поражен</u>, что соотношение родившихся мальчиков и девочек в течение многих лет должно было оставаться в столь тесных границах.*

И это единственное предложение, против которого рассуждение м-ра *Бернулли* имеет какой-то смысл. Но он [Арбутнот] мог бы сказать, и мы все еще настаиваем на том, что, *Поскольку из наблюдений мы можем, вместе с м-ром Бернулли, заключить, что легкость производства обоих полов близка к отношению равенства, и, раз уж определив это отношение, которое явно благоприятствует мудрой цели, мы заключаем, что оно само, или, если угодно, форма игральной кости, является следствием Рассудка и Замысла.*

Если нам покажут некоторое число костей, каждая, как предположил м-р *Бернулли*, с 18-ю белыми и 17-ю черными гранями, мы не должны будем сомневаться, что эти кости изготовил какой-то Мастер и что не шанс определил их форму, которая была приспособлена для определенной им предусмотренной цели.

Столь много было необходимо сказать, чтобы стереть всякое предубеждение к нашему доводу, которое мог произвести авторитет такого великого имени. Все это, в конце-концов, находится на уровне самого обычного понимания и соответствует здравому смыслу рода человеческого и потому не нуждалось бы в формальном доказательстве, не будь возможным замешательство схоластическими тонкостями и злоупотребление некоторыми словами и фразами, которые, как иногда полагают, имеют смысл лишь потому, что их часто произносят.

Шанс, как мы понимаем, предполагает *существование* вещей и их всеобще известных *свойств*. Так, при броске некоторого числа игральных костей, каждая устанавливается на каком-либо из своих оснований. После этого *вероятность* требуемого шанса, т.е. какого-нибудь определенного расположения костей, становится такой же подходящей темой исследования, как и любое другое количество или отношение.

Но в атеистических писаниях или рассуждениях *шанс* это совершенно бессодержательный звук[35]. Он не придает никакой определенности никакому *образу существования*, ни даже самому *существованию* в большей степени чем *не-существованию*. Его нельзя ни определить, ни понять; и нельзя также ни подтвердить, ни отрицать никакого утверждения о нем кроме как сказав, что *это не более чем* [пустое] *слово*.

Аналогичное может быть сказано о некоторых других часто употребляемых словах как *судьба, необходимость, природа, течение* [событий] *в природе*, [произносимых] в противоположность *Божественной энергии*. Употребляемые в некоторых случаях, все они не более чем звуки. И тем не менее, путем ловкого использования, они служат для обоснования правдоподобных заключений. Однако, коль скоро скрытая обманчивость такого [какого-нибудь подобного] *термина* выявлена, эти выводы оказываются не менее нелепыми сами по себе чем, как правило, вредными для общества.

Я только добавлю, что этот метод рассуждений [?] можно с пользой применить в некоторых иных очень интересных исследованиях, если не для того, чтобы принудить к согласию других путем строгого доказательства, то по крайней мере для удовлетворения самого исследователя. И я закончу это **Замечание** отрывком из главы 4-й части 4-й *Искусства предположений* м-ра *Якоба Бернулли*, в которой этот проницательный и здравомыслящий писатель следующим образом представил решение задачи *установления границ, внутри которых после* *повторения испытаний вероятность события может сколь угодно близко* (indefinitely) *приближаться к заданной вероятности*[36]. Hoc igitur est illud Problema &c.

> *Вот,* говорит он, *какова задача, которую я сейчас обнародую после того, как в течение двадцати лет владел ее решением. Она нова и трудна, но столь превосходна ее польза, что придает высокую цену и достоинство всем остальным главам этого учения*[37].

И все же имеются такие писатели, поистине весьма отличного от *Якоба Бернулли* толка, которые внушают, будто *учению о вероятностях*[38] нет места ни в каких серьезных исследованиях и что исследования подобного [вероятностного] рода, будучи простыми и незначительными, скорее лишают человека способности рассуждать о каком-либо другом предмете. Пусть читатель выбирает.

Примечания

1. Ныне граф Раднор. *Анонимное примечание, видимо принадлежащее редактору книги*. Френсис Робартес (1650 ? – 1718), политик и музыкант, член Королевского общества. О.Ш.

2. Todhunter (1865, p. 23) упоминает два перевода. Один из них он склонен приписать Дж. Арбутноту (которого Муавр упоминает в своем мемуаре 1733 г., см. ниже). О.Ш.

3. Об этой игре см. также Montmort (1708, pp. 73 – 77). О.Ш.

4. Гюйгенс определял математические ожидания выигрыша игроков, Муавр же вычислял соответствующие вероятности. В своих дальнейших работах (после 1657 г.), опубликованных лишь в 20-м веке, Гюйгенс рассматривал игры, ожидания игроков в которых оказывались переменными и это привело его к необходимости применять уравнения в конечных разностях (Sheynin 1977, p. 250). О.Ш.

5. В то время Муавр еще не интересовался приложением теории вероятностей к статистике населения. О.Ш.

6. Шанс здесь, видимо, следует понимать как половинную вероятность. О.Ш.

7. Муавр здесь затрагивает фундаментальный вопрос о разграничении случайного и необходимого в конечных числовых последовательностях. Известной по этому поводу стала задача Даламбера – Лапласа (Шейнин, 2005, с. 28, прим. 5): случайно ли расположение кубиков-букв, составивших слово *Константинополь*? Мы лишь повторим, что Лаплас (1814, с. 837) разумно решил (так же, как по существу и Муавр), что случайное, т.е. бесцельное составление такого слова маловероятно. О.Ш.

8. Гинея тогда стоила 21 шиллинг и 6 пенсов. *Анонимное примечание, видимо принадлежащее редактору*. Ср. прим. 1. О.Ш.

9. Издание 1738 г. (и, видимо, первое издание 1718 г., которое мы не видели), равно как и *Аналитические этюды* (1730), содержат списки лиц, заранее подписавшихся на эти книги. О.Ш.

10. Ньютон обобщил разложение бинома $(a + b)^n$ на любые действительные значения n, для натуральных же значений n оно было известно намного раньше. Можно добавить, что указанное обобщение вовсе не требовалось Муавру. О.Ш.

11. С. 46 видимо относилась к изданию 1718 г. О.Ш.

12. Описываемый метод решения указанной задачи восходит к Паскалю и Ферма. О.Ш.

13. Муавр имеет в виду возвратные последовательности и, чуть ниже, суммирование соответствующих рядов. О.Ш.

14. Конечные ряды, стало быть, в то время не назывались рядами. О.Ш.

15. В соответствии с этой леммой (Newton 1687, vol. 2, pp. 333 – 335) ординаты искомой кривой равны суммам некоторых конечных рядов. О.Ш.

16. В более общей Задаче 36 требовалось определить вероятность, что при случайном расположении букв *a*, *b*, *c*, …, каждая из которых повторялась *n* раз, некоторые окажутся на своем месте по алфавиту, остальные же нет. О.Ш.

17. В Задаче 39 требовалось определить вероятность исхода некоторого числа граней *n*-гранной кости в определенном порядке. О.Ш.

18. В Задаче 40 требовалось определить вероятное число бросков *n*-гранной кости для выпадения ее определенных граней в любом порядке. О.Ш.

19. Таким образом, именно Муавр, а не Лаплас (как иногда полагают) ввел так называемое классическое определение вероятности. Впрочем, оно же, хоть и не в формальной записи, встречается у Якоба Бернулли (1713, гл. 4 части 4-й), а фактически употреблялось задолго до этого. О.Ш.

20. Именно Муавр ввел в теорию вероятностей зависимые события. О.Ш.

21. Следует заметить, что здесь и в иных местах точки поставлены взамен знаков умножения. *Анонимное примечание*, ср. прим. 1 и 8. В 1733 г., см. ниже, Муавр все-таки применил прежний знак умножения (крестик). Вообще же новое обозначение впервые применил Лейбниц. О.Ш.

22. Муавр имеет в виду *Искусство предположений* Якоба Бернулли (1713, гл. 5 части 4-й) и письмо Николая Бернулли Монмору 23 янв. 1713 г. (Montmort 1708/1713, pp. 388 – 394). О.Ш.

23. Муавр, видимо, опубликовал *обнаруженное* им лишь в своих *Аналитических этюдах* (1730), см. Шейнин (1970).

24. Члены этого ряда связаны с числами Бернулли B_i. Так,

$$(1/12) = (1/1 \cdot 2)B_1, \; -(1/360) = (1/3 \cdot 4)B_2. \text{ О.Ш.}$$

25. При вычислениях при помощи компьютера подобные записи не нужны; так, вместо $\overline{9}.63$ проще иметь дело с (тем же) числом – 0.37. Запись типа $\overline{1}\,\overline{9}.53$ чисто формальна, фактически она означала $\overline{9}.53$ (= – 0.47). О.Ш.

26. Термины *отношение равенства* или *неравенства* были приняты в то время. Так, вместо записи $a = b$ иногда говорилось, что a/b находится в отношении равенства. О.Ш.

27. Число 0.99874 ошибочно, верное число 0.99730 (Hald 1990, p. 487), однако соотношение 369:1, которое Муавр указал чуть ниже, соответствовало последнему. О.Ш.

28. Перевод этих строк затруднителен, по существу же все примеры Муавра могут быть переведены на язык определенных интегралов, см., например Hald (1990). О.Ш.

29. Муавр не указал смысла *n*, однако он не вызывает сомнения. О.Ш.

30. Это слишком слабое утверждение. По контексту Муавр наверняка имел в виду что-то подобное фразе "показывать каждую грань одинаково легко". О.Ш.

31. Ср. Лаплас (1814, с. 842):

> *В ряду событий, неопределенно продолженном, действие регулярных и постоянных причин должно со временем перевешивать действие причин нерегулярных* и т. д. О.Ш.

32. Муавр здесь (и уже в самом заглавии своего мемуара) ссылается на ту задачу, которую решил Бейес, и для конечного числа испытаний следует все-таки предпочитать более точные результаты последнего (Шейнин 2005, с. 73 – 74). О.Ш.

33. По существу Муавр отрицает возможность хаотической случайности, что для его времени было естественно. Употребление и единственного, и множественного числа (событие – события) не лишает его утверждения определенности. О.Ш.

34. См. два его письма м-ру де Монмору (Лондон, 11 окт. 1712 г. и Париж, 23 янв. 1713 г. (Montmort 1708, pp. 371 – 375, 388 – 394). *Муавр*. По существу Муавр ссылается на с. 374 указанного источника. Представляется, что его тирада не обоснована: Николай Бернулли прямо заявил во втором письме (с. 388), что соотношения мужских и женских рождений (точнее, крещений) в Лондоне не могло быть обусловлено случаем. Конечно же, его можно было упрекнуть в противоречивости: он объяснил статистические данные биномиальным распределением (ни слова не сказав о его происхождении). В предыдущем письме Н.Б. указал на словах, что данные можно объяснить вероятностно. Он, видимо, не ответил на критику, хотя и умер в 1759 г., т.е. примерно через три года после публикации расширенного варианта мемуара Муавра.

Муавр был глубоко религиозен. Человеку, который заметил, что у математиков нет религии, он ответил, что прощает ему это оскорбление и тем самым доказывает ему, что он, Муавр, христианин (Walker 1934, p. 363). И тем не менее он сам (De Moivre 1724, pp. 262 – 263), предложив на основе классического мемуара Галлея 1694 г., равномерный закон смертности, ничего не сказал о происхождении этого закона. О.Ш.

35. Можно пожалеть, что Муавр не привел никаких примеров. О.Ш.

36. Эти строки Муавра напечатаны курсивом, но они не являются цитатой. О.Ш.

37. Муавр перевел эту выдержку с латинского языка. Обращаем внимание читателей, что наш русский текст (фактически равносильный тексту Муавра) несколько отличается от предложенного Я.В. Успенским в 1913 г. (Я. Бернулли 1986, с. 44). О.Ш.

38. Снова (ср. прим. 35) нет никаких примеров. Термин *учение о вероятностях*, который, впрочем, Муавр нигде больше не применил, близок современному выражению *теория вероятностей*. О.Ш.

Библиография

Лаплас П.С. (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей*. В книге Прохоров Ю.В., редактор (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.
Шейнин О.Б. (Sheynin O.B.) (1977), Early history of the theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci*., vol. 17, pp. 201 – 259.
--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин.
Arbuthnot J. (1712), Мемуар, переведенный в этом сборнике.
Bernoulli J. (1713, латинск.), *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1899). Thun – Frankfurt/Main, 1999. Русск. перевод части 4-й (1913) в книге автора *О законе больших чисел*. М., 1986, с. 23 – 59.
Bernoulli N. (1717), Solutio generalis problematis XV propositi à D. de Moivre, in tractatu de Mensura sortis. *Phil. Trans. Roy. Soc*., vol. 29 for 1714 – 1716, pp. 133 – 144.
De Moivre A. (1712, латинск.), De mensura sortis, or, The measurement of chance. *Intern. Stat. Rev*., vol. 52, 1984, pp. 236 – 262. Комментарий (A. Hald): там же, с. 229 – 236.
--- (1717), Solutio generalis altera praecedentes problematis [N. Bernoulli (1717)] ope combinationem et serierum infinitarum. *Phil. Trans. Roy. Soc*., vol. 29 for 1714 – 1716, pp. 145 – 158.
--- (1718), *Doctrine of Chances*. Последующие издания: 1738 и посмертное 1756. Перепечатка последнего: Нью Йорк, 1967.
--- (1724), *Treatise of Annuities on Lives*. В книге автора *Doctrine …* (1756), pp. 261 – 328.
--- (1730), *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*. London.
--- (1733, латинск.), Авторский перевод: *A method of approximating the sum of the terms of the binomial* $(a + b)^n$ *expanded into a series from whence are deduced some practical rules to estimate the degree of ascent which is to be given to experiments*. Включено в два последних издания *Doctrine …*; в издании 1756 г., с дополнением, – с. 243 – 254.
Eggenberger J. (1894), Darstellung des Bernoullischen Theorems etc. *Mitt. Naturforsch. Ges. Bern*, NNo. 1305 – 1334 für 1893, pp. 110 – 182.
Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* New York.
--- (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930.* New York.
Huygens C. (1657, латинск.), Трактат, переведенный в этом сборнике.
Montmort P.R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hasard*. Во второе издание 1713 г. (перепечатка: Нью Йорк, 1980) включена переписка автора с Николаем Бернулли. Прижизненные издания вышли в свет анонимно.
Newton I. (1678, латинск.), *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, vols 1 – 2 (1729), London, 1968.
Schneider I. (1968), Der Mathematiker A. De Moivre. *Arch. Hist. Ex. Sci*., vol. 5, pp. 177 – 317.
Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1965.
Walker Helen M. (1934), A. De Moivre. В книге Муавра *Doctrine …* (1756, pp. 351 – 368).

8. Томас Симпсон

Первым, кто в 1756 и 1757 гг. приложил теорию вероятностей к (еще не существовавшей) теории ошибок был Симпсон (1710 – 1761), и объединенный перевод этих двух вариантов его работы мы приводим ниже. Возможно, правда, что его опередил Р.И. Бошкович в неизвестно когда написанной рукописи, в которой он подсчитывал шансы погрешности суммы ошибок (а не их среднего) в одном весьма элементарном случае. Он же в 1757 г. предложил метод уравнивания градусных измерений (Шейнин 1973а).

Симпсон, как читатель непременно увидит, применил производящие функции и по существу впервые рассматривал ошибку наблюдения как некоторое значение случайной величины. В 1757 г., изучая случай непрерывного распределения ошибок наблюдения, он упустил возможность доказать соответствующий вариант центральной предельной теоремы, притом и кривая распределения среднего из бесконечного числа наблюдений, показанная на его чертеже, не имеет характерной формы нормальной кривой.

Основной вывод Симпсона о неограниченном возрастании точности среднего вместе с числом наблюдений был сомнителен и Бейес (Dale 2003, pp. 385 – 386) возразил против него в письме, написанном, видимо, до появления второго варианта статьи, т.е. в 1756 г. По существу Бейес заметил, что вывод Симпсона несостоятелен ввиду наличия систематических ошибок. Быть может узнав об этой критике, Симпсон в 1757 г. дополнительно предположил, что такие ошибки отсутствуют. Впрочем, Бейес мог бы добавить, что некоторая вполне возможная зависимость между наблюдениями также воспрепятствует неограниченному возрастанию точности. И, наконец, мы полагаем, что если инструмент обеспечивает точность однократного измерения угла, скажем, в 1”, то сотые и тем более тысячные доли секунды никогда не будут зафиксированы и могут появиться лишь в процессе вычислений, т.е. фиктивно. Иначе говоря, после некоторого числа наблюдений их результаты начнут повторяться. Так сколько же наблюдений неизвестной константы следует производить? Определенного ответа нет, все зависит от порядка случайных погрешностей и их распределения, величины систематических влияний, требуемой точности результата (в отдельности в смысле тех и иных ошибок) и стоимости наблюдений.

Второй вариант мемуара озаглавлен несколько иначе и мы приводим его вслед за первым заглавием и выделяем его курсивным шрифтом. Также курсивом мы отделили начало второго варианта от первоначального текста, а остальные добавленные куски оговорены.

Подробный комментарий к сочинению Симпсона см. Shoesmith (1985) и Hald (1998).

Письмо Достопочтенному графу Джорджу Макклсфильду, Президенту Королевского общества, О пользе выбора среднего из нескольких наблюдений в практической астрономии

Попытка показать пользу выбора среднего из нескольких наблюдений в практической астрономии

Simpson T. (1756), A letter to the Right Honourable George Earl of Macclesfield, President of the Royal Society, On the advantage of taking the mean of a number of observations. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 49, pp. 82 – 93

Simpson T. (1757), An attempt to show the advantage arising by taking the mean of a number of observations in practical astronomy. В книге автора *Miscellaneous Tracts on Some Curious and Very Interesting Subjects in Mechanics, Physical Astronomy and Speculative Mathematics*. London, pp. 64 – 75.

Прочтено 10 апреля 1755 г.

Милорд, Вашей Светлости хорошо известно, что метод вычисления среднего из нескольких наблюдений, практикуемый астрономами, чтобы уменьшить погрешность, возникающую ввиду несовершенства инструментов и органов чувств, не был воспринят единодушно. Некоторые весьма известные лица считали, и даже публично утверждали, что одному единственному наблюдению, выполненному с должными предосторожностями, следует доверять настолько же, насколько среднему из большого числа наблюдений[1].

Так как этот вопрос представлялся мне весьма важным, я почувствовал сильное желание испробовать, нельзя ли будет несколько прояснить его, применив математические принципы, так, чтобы выявить выгоду и пользу практикуемого метода с более высокой степенью очевидности.

Исполняя свое намерение (о результатах чего я ныне имею честь сообщить Вашей Светлости), я был действительно вынужден воспользоваться предположением, а именно допустить, что некоторый ряд чисел выражает соответствующие шансы различных ошибок, которым подвержено каждое данное наблюдение[2]. Выбранный ряд не казался мне плохо подходящим, но это я целиком представляю на рассмотрение суждению Вашей Светлости, которая выполнила столь много наблюдений в своей усадьбе в Ширбарне. Там Ваша Светлость добавила к наилучшему собранию математических книг более полный набор астрономических приборов, чем, возможно, найдется у любого другого дворянина в Европе.

Если предположение, которое я ввел, не покажется Вашей Светлости столь хорошо выбранным, как, быть может, иные, оно все же будет достаточным, чтобы соответствовать желаемой цели. И после вычислений Ваша Светлость обнаружит, что, какой бы ряд ни принять для шансов появления различных ошибок, результат окажется в большой степени в пользу ныне практикуемого метода среднего значения[3]. Но я не стану дольше задерживать Вашу Светлость общими соображениями, а перейду к предложенной теме, которую рассмотрю в следующих предложениях.

Для уменьшения погрешности, появляющейся ввиду несовершенства инструментов и органов чувств,астрономы практикуют выбор среднего из нескольких наблюдений. Этот метод исключительно полезен и применяется почти всеми, но, насколько мне известно, он еще не подвергался никакому виду обоснования.

В этом наброске, исходя из математических принципов, мы попытались пролить некоторый свет на указанную тему. Для этой цели представлялось необходимым установить следующие предположения.

1. Ни в устройстве инструмента, ни в его положении нет ничего, что бы постоянно направляло погрешности в одну и ту же сторону, так *что соответствующие шансы появления положительных и отрицательных ошибок либо в точности, либо почти одинаковы.*

2. Существуют некоторые устанавливаемые границы, между которыми располагаются все эти ошибки. Эти границы зависят от добротности инструмента и мастерства наблюдателя.

Предпослав эти [*существенные*] *подробности, я сообщу то, что имею предложить по данной теме, в следующих предложениях.*

Предложение 1. Пусть шансы различных ошибок, которые могут быть допущены каждым наблюдением, выражаются членами прогрессии

$$r^{-v}, \ldots, r^{-3}, r^{-2}, r^{-1}, r^0, r^1, r^2, r^3, \ldots, r^v, \qquad (1)$$

где показатели степени обозначают количества и свойства отдельных ошибок, а сами члены, – соответствующие шансы их появления. Предложено определить вероятность или сотношение шансов, что ошибка при выборе среднего из заданного числа n наблюдений не превзойдет заданного количества m/n.

Из законов шанса явствует, что если данный ряд (1), выражающий все шансы для одного наблюдения, возвести в n-ю степень, члены полученного ряда точно укажут все различные шансы всех предложенных n наблюдений. Чтобы легче всего осуществить возведение в степень, можно свести наше данное выражение к

$$r^{-v}\ \frac{1-r^{2v+1}}{1-r},$$

так что, полагая $w = 2v + 1$, его n-я степень будет равна

$$r^{-nv}(1-r^{w})^n\,(1-r)^{-n}. \qquad (2)$$

Теперь, чтобы, исходя из этого, определить сумму всех шансов, в соответствии с которыми избыток положительных ошибок над отрицательными мог бы в точности составить данное число m, достаточно вместо умножения первого ряда на весь последующий умножить [его] только на такие члены последующего ряда, которые необходимы для появления требуемого показателя степени m. Так, первый член r^{-nv} первого ряда следует умножить на тот член второго ряда, показатель степени которого $nv + m$, так чтобы степень r в произведении могла быть r^m. Но, если обозначить $nv + m = q$, станет ясно по закону образования ряда, что коэффициент этого члена будет

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \{q\},$$

где число сомножителей равно q. И, следовательно, искомое произведение будет

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \{q\}r^m.$$

Опять же, поскольку второй член первого ряда, $-nr^{w-nv}$, показатель степени соответствующего члена второго ряда будет равен $-w+nv+m$ $(=q-w)$, а сам член

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\{q-w\}r^{q-w}.$$

Умножив его на $-nr^{w-nv}$, мы получим требуемый второй член в виде

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\{q-w\}(-nr^{m}).$$

Подобным же образом, третий член произведения, чей показатель степени равен m, окажется равным[4]

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\{q-2w\}\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}r^{m},$$

а сумма всех членов с одним и тем же данным показателем m будет, следовательно, равна

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\{q\}r^{m}-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\{q-w\}nr^{m}+$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\{q-2w\}\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}r^{m}-$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\{q-3w\}\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}r^{m}+\ldots \qquad (3)$$

Из этого общего выражения, последовательно полагая $m = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$, мы найдем сумму всех шансов, в соответствии с которыми разность положительных и отрицательных ошибок может оказаться внутри установленных границ. Разделив ее на (2), мы получим верную меру требуемой вероятности и это может показать пользу выбора среднего арифметического. Но это я установлю на примерах в следующем предложении, которое лучше подойдет для указанной цели. Оно предваряется данным [первым] предложением, которое служит в качестве леммы.

Замечание. Если принять $r = 1$, т.е. предположить, что шансы ошибок, приводящих к избытку и недостатку, в точности совпадают, то после вычеркивания степеней r наше выражение окажется в точности тем, которое указывает шансы выпадения $n+q$ очков при броске n костей, каждая из которых имеет столько граней w, сколько результатов возможно у любого данного наблюдения[5].

Это может быть установлено и иначе, без всякого вычисления, просто заметив, что шансы выпадения в точности m очков при броске n костей, если грани каждой из них пронумерованы

$$-v, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, v,$$

должны совпадать с шансами для положительных ошибок превысить отрицательные как раз на это число. И упомянутые выше шансы выпадения m очков очевидно равны шансам выбрасывания $(v+1)n+m$ (или $n+q$) очков теми же костями, пронумерованными обычным образом членами натурального ряда 1, 2, 3, 4, 5, ... Действительно, если число, указанное в этом последнем случае, увеличить на каждой грани на $v+1$, полное увеличение на всех n гранях выразится как $(v+1)n$, так что теперь шанс выпадения числа $(v+1)n+m$ будет в точности тем же, каким он был раньше для числа m.

Предложение 2. Предположим, что соответствующие шансы для различных ошибок, возможных в каждом отдельном наблюдении, выражены членами ряда

$$r^{-v}, 2r^{1-v}, 3r^{2-v}, \ldots, (v+1)r^0, \ldots, 3r^{v-2}, 2r^{v-1}, r^v, \tag{4}$$

коэффициенты которого, начиная со среднего $(v+1)$, убывают в каждую сторону в соответствии с членами арифметической прогрессии. Предлагается определить вероятность или соотношение шансов того, что ошибка при выборе среднего арифметического из данного числа t наблюдений не превысит данного количества m/t.

Следуя методу, указанному в предыдущей задаче, мы получим сумму ряда (4), равную

$$\frac{r^{-v}(1-r^{v+1})^2}{(1-r)^2}$$

и совпадающую с квадратом суммы геометрической прогрессии

$$r^{-v/2}(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^v). \tag{5}$$

Если возвести (5) в степень t и принять $n=2t$ и $w=2v+1$, то окажется, что

$$r^{-w}(1-r^w)^n(1-r)^{-n} = [r^{-w} - n\,r^{-w-tv} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} r^{2w-tv} - \ldots]\cdot$$

$$[1 + nr + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} r^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} r^3 + \ldots].$$

Полученные два ряда совпадают с рядами в предыдущей задаче если только перейти от t к n и ясно, что при $q=tv+m$ вместо $q=nv+m$ прежний вывод останется в равной мере в силе. Следовательно, сумма всех шансов, в соответствии с которыми положительные ошибки в точности превысят отрицательные на данное число m, и здесь будет верно выражена как (3).

Поскольку, однако, некоторые сомножители в числителях и знаменателях взаимно уничтожатся, это общее выражение может быть преобразовано в более удобное. Так, после выделения двух частей и в числителе, и в знаменателе первого члена он окажется равным

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\dots q\,(q+1)\,(q+2)\,(q+3)\dots(q+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\dots q} =$$

$$\frac{(q+1)\,(q+2)\,(q+3)\dots(q+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)} =$$

$$\frac{(q+n-1)\,(q+n-2)\,(q+n-3)\dots(q+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)} = \frac{(p-1)\,(p-2)\,(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \{n-1\}$$

если $p = q + n = tv + m + n$.

Точно так же, полагая $q_1 = q - w$ и $p_1 = q_1 + n$ $(= p - w)$, мы получим

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \{q-w\} = \frac{(p_1-1)\,(p_1-2)\,(p_1-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \{n-1\} \text{ и т.д.}$$

Следовательно, все наше выражение преобразуется в

$$\frac{(p-1)\,(p-2)\,(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \{n-1\}r^m - \frac{(p_1-1)\,(p_1-2)\,(p_1-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\{n-1\}nr^m +$$

$$\frac{(p_2-1)\,(p_2-2)\,(p_2-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\{n-1\}\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}r^m -$$

$$\frac{(p_3-1)\,(p_3-2)\,(p_3-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\{n-1\}\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\ r^m + \dots,$$

где $p_2 = p - 2w$, $p_3 = p - 3w$ и т. д.

Полученная сумма должна быть продолжена до тех пор, пока некоторые члены не окажутся нулями или отрицательными[6]. И при $r = 1$ она совпадет с выражением для числа шансов выпадения в точности p очков при броске n костей с w гранями каждая.

И в этом случае, когда шансы ошибок, приводящие к избытку и недостатку, совпадают, решение оказывается настолько простым, насколько это возможно. Ибо, исходя из полученных шансов, соответствующих в точности числу p, можно легко получить по методу приращений[7] сумму шансов для всех чисел, меньших p:

$$\frac{(p-1)\,(p-2)\,(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \{n\} - \frac{(p_1-1)\,(p_1-2)\,(p_1-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\{n\}n +$$

$$\frac{(p_2-1)\,(p_2-2)\,(p_2-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\{n\}\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2} -$$

$$\frac{(p_3-1)\,(p_3-2)\,(p_3-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\{n\}\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots \qquad (6)$$

Разность D между этой суммой и половиной суммы всех шансов w^n будет поэтому верным числов шансов, в соответствии с которыми ошибки, приводящие к избытку или недостатку, могут оказаться внутри заданной границы m, так что

$$D \div (1/2)w^n \qquad (7)$$

окажется истинной мерой требуемой вероятности, что ошибка при выборе среднего из t наблюдений не превзойдет предложенного количества m/t.

Для пояснения сказанного примером, который ясно покажет выгоду практикуемого метода [среднего арифметического], необходимо в первую очередь установить какое-то значение для v, чтобы выразить пределы ошибок, которым подвержено каждое наблюдение. Эти пределы, разумеется, зависят от качества инструментов и мастерства наблюдателя, но я предположу здесь, что каждому инструменту можно доверять до 5”, так что шансы возможных ошибок

– 5, – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5”,

находящихся в установленных таким образом границах, пропорциональны соответствующим членам ряда

1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Этот ряд представится намного лучше подходящим, чем ряд с совпадающими членами, так как весьма разумно предположить, что шансы ошибок убывают по мере возрастания самих ошибок.

Пусть после установления этих подробностей требуется определить вероятность или шанс ошибки в 1, 2, 3, 4 или 5” когда, вместо того, чтобы полагаться на одно наблюдение, выбирается среднее арифметическое. В этом случае $v = 5$, $t = 6$ и n $(= 2t) = 12$, w $(= v + 1) = 6$, p $(= v + n + m) = 42 + m$. Но значение m, если мы вначале отыскиваем шансы ошибке не превысить 1”, определится из уравнения $m/t = \pm 1$. Оба знака могут быть приняты во внимание, но более удобен знак минус. Мы имеем, следовательно, m $(= -t) = -6$ и поэтому $p = 36$, $p_1 = 30$, $p_2 = 24$, $p_3 = 18$ и т. д. При подстановке этих значений в общее выражение, полученное выше, оно станет равным

$$\frac{36\cdot 35\cdot 34}{1\cdot 2\cdot 3}\{12\} - \frac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3}\{12\}12 + \frac{24\cdot 23\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3}\{12\}66 -$$

$$\frac{18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3}\{12\}220 = 299\ 576\ 368^{\mathbf{8}}.$$

Вычитая это из 1 088 391 168 [= (1/2) 6^{12}], мы получим 788 814 800 для соответствующего значения D. Поэтому требуемая вероятность, что погрешность при выборе среднего из шести наблюдений не превысит одной секунды, будет верно выражена дробью 788 814 800/1 088 391 168. Следовательно, соотношение шансов в пользу этого будет 788 814

800/299 576 368 или почти 2½ :1 [2 2/3 в варианте 1757 г.]. Но соотношение тех же шансов, если учитывается только одно наблюдение, будет лишь 16:20 или 8/10:1.

Чтобы определить теперь вероятность, что результат окажется верным в пределах 2”, примем $m/t = -2$, так что m $(= -2t) = -12$ и потому $p = 30$, $p_1 = 24$, $p_2 = 18$ и т. д. Наше общее выражение окажется равным 36 079 407 и D = 1 052 311 761. Следовательно, 1 052 311 761/1 088 391 168 окажется истинной мерой искомой вероятности, а соответствующее соотношение шансов 1 052 311 761/36 079 407 или почти 29:1. Но соотношение тех же шансов, если учтено только одно наблюдение, будет лишь 2:1. Таким образом, шанс погрешности превысить 2” будет меньше 1/10 при выборе среднего из шести наблюдений, чем тот, который соответствует учету одного единственного наблюдения.

И таким же образом можно найти, что шанс погрешности превысить 3” при выборе среднего будет меньше 1/1000 того же шанса при учете одного наблюдения.

В общем, оказывается, что выбор среднего арифметического из некоторого числа наблюдений в большой степени уменьшает шансы всех небольших ошибок и отсекает почти всякую возможность любых крупных ошибок. Одно это последнее обстоятельство представляется достаточным, чтобы рекомендовать применение метода среднего арифметического не только астрономам, но вообще всем, имеющим дело с опытами [или наблюдениями; добавлено в 1757 г.] любого рода (к которым приведенные рассуждения равным образом применимы). И чем больше сделано наблюдений или опытов, тем меньше наше заключение будет ошибочно. [В 1757 г. последнее предложение отсутствует, но предпоследнее дополнено следующим образом: которые могут быть повторены при тех же самых обстоятельствах.]

Следует текст, содержавшийся только в более позднем варианте 1757 г.

В предыдущих вычислениях различные ошибки, которым каждое наблюдение по предположению подвержено, были заданы лишь целыми числами или [иначе] в точности определенным числом секунд, поскольку даже при помощи самых лучших инструментов мы не в состоянии измерить угол с *геометрической точностью*. Но теперь я покажу, как можно вычислить шансы, если в пределах предположенных границ возможны ошибки любых значений, целых или дробных, или если по предположению результат каждого наблюдения известен *в точности.*

Пусть, следовательно, отрезок AB [см. Рис. 1] указывает все протяжение заданного интервала, внутри которого по предположению располагаются все наблюдения. Представим себе, что этот отрезок разделен на чрезвычайно большое число очень маленьких и равных друг другу частичек перпендикулярами, которые заканчиваются на сторонах AD и BD равнобедренного треугольника ABD с основанием AB. Допустим, что вероятность или шанс склонности результату каждого наблюдения попасть в любой из этих весьма малых интервалов Nn пропорциональна (пропорционален) соответствующей площади $NMmn$ или перпендикуляру NM. Тогда, поскольку эти шансы (или площади), считая от крайних точек A и B возрастают как члены арифметической прогрессии 1, 2, 3, 4, ..., ясно, что этот случай совпадает со случаем второй части Предложения 2. Правда, так как число v (выражающее [количество] частичек в AC или BC) бесконечно велико, все (конечные) количества, добавленные со знаками сложения или вычитания к v или к его кратным, здесь исчезнут, поскольку по сравнению с v они [просто] нули. Таким образом, общее выражение (6) выведенное раннее, сейчас оказывается

$$\frac{p}{1}\,\frac{p}{2}\,\frac{p}{3}\{n\} - \frac{p_1}{1}\,\frac{p_1}{2}\,\frac{p_1}{3}\{n\}n \text{ etc} =$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 ...\cdot n}[p^n - np_1^n + n\frac{n-1}{2}p_2^n - n\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}p_3^n \text{ etc}].$$

Здесь $p = tv \mp m$, $p_1 = p - v$, $p_2 = p - 2v$, $p_3 = p - 3v$,… Поэтому, коль скоро в этом случае [ср. (7)]

$$D = \frac{1}{2}v^n - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 ...\cdot n}[p^n - n\,(p-v)^n + n\frac{n-1}{2}(p-2v)^n \text{ etc}],$$

ясно, что вероятность $D/[(1/2)v^n]$ погрешности не превзойти m/t при выборе среднего арифметического из t наблюдений будет верно определена как

$$1 - \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3 ...\cdot n}[(\frac{p}{v})^n - n\,(\frac{p}{v}-1)^n + n\frac{n-1}{2}(\frac{p}{v}-2)^n \text{ etc}].$$

Это может быть представлено криволинейной площадью [криволинейной трапецией] $CNFE$, соответствующей данному значению или данной абсциссе CN (= m/t). Далее, хоть все числа v, p и m здесь предположены неопределенно большими, их можно исключить и значение полученного выражения определить по известным соотношениям между ними. Ибо если заданное отношение m/t к v или CN/CA выразить как $x/1$, или, что то же самое, если предположить, что искомая погрешность составляет x-ю часть от наибольшей ошибки, тогда, поскольку $m = tvx$, p (= $tv \mp m$) = $tv \mp tvx$, будет $p/v = t(1 \mp x)$, что мы обозначим через y. Подставив это y, получим общее выражение в виде

$$1 - \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3 ...\cdot n}\;[y^n - n(y-1)^n + \frac{n}{1}\;\frac{n-1}{2}\;(y-2)^n -$$
$$\frac{n}{1}\;\frac{n-1}{2}\;\frac{n-2}{3}\;(y-3)^n + \ldots],$$

причем этот ряд следует продолжать пока величины y, $y-1$, $y-2$, … не станут отрицательными.

В качестве примера пусть теперь требуется найти вероятность или соотношение шансов, что при выборе среднего из шести наблюдений погрешность не превысит 1”, предполагая, как и в предыдущем примере, что наибольшая ошибка, которая возможна в любом наблюдении, ограничена пятью секундами.

Здесь $t = 6$, n $(= 2t) = 12$ и $x = 1/5$. Имеем $y = [t(1 - x)] = 4.8$. Следовательно, мера искомой вероятности будет равна

$$1 - \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3\{12\}}[4.8^{12} - 12\cdot 3.8^{12} + 66\cdot 2.8^{12} - 220\cdot 1.8^{12} + 495\cdot 0.8^{12}],$$

что примерно составляет 0.7668. Так что соотношение шансов в пользу того, что погрешность не превысит одной лишь секунды, будет равно 0.7668/0.2332, что больше чем 3:1. Но если учитывается одно единственное наблюдение, это соотношение составит лишь 36:64 = 9:16.

Таким же образом, приняв $x = 2/5$, можно найти аналогичные соотношения шансов равными соответственно примерно 0.985/0.015 или 65 2/3:1 и всего лишь 64:36 = 1 7/9:1. Иначе говоря, в первом случае шанс погрешности в 2" не составит даже 1/20 шанса во втором случае. И далее окажется, если принять $x = 3/5$, что для вероятности погрешности в 3" указанное соотношение 1/20 становится 1/1400.

Таким образом, при новом предположении [непрерывного треугольного распределения], так же, как и при прежнем, отсекается почти всякая возможность крупной погрешности. И это остается в силе какое бы предположение мы ни приняли для выражения шансов ошибок одного наблюдения.

Из того же общего выражения, из которого были получены приведенные выше отношения, нетрудно определить соотношение шансов того, что среднее из данного числа наблюдений ближе к истине, чем любое единственное наблюдение. Ибо, если принять, что z $(= 1 - x) = y/t$ и $s = 1/t$; то, поскольку $y = tz$, величина

$$\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3\{n\}}[y^n - n(y-1)^n + \frac{n(n-1)}{2}(y-2)^n - \ldots],$$

которая выражает вероятность, что результат оказывается в пределах z, здесь будет равна

$$\frac{2t^n}{1\cdot 2\cdot 3\{n\}}[z^n - n(z-s)^n + \frac{n(n-1)}{2}(z-2s)^n - \ldots].$$

Для случая одного наблюдения, когда $t = 1$ и $n = 2$, это просто равно z^2, а ее флюента $2z\dot{z}$. Поэтому, умножив последнее выражение на $2z\dot{z}$, получим произведение

$$\frac{4t^n}{1\cdot 2\cdot 3\{n\}}[z^{n+1}\dot{z} - n(z-s)^n z\dot{z} + \frac{n(n-1)}{2}(z-2s)^n z\dot{z} - \ldots],$$

равное флюксии вероятности, что результат t наблюдений будет дальше от истины и ближе к границам, чем одно любое наблюдение. И поэтому флюента указанного выражения, равная

$$\frac{4t^n}{1\cdot 2\cdot 3\{n\}}\left[\frac{z^{n+2}}{n+2}-\frac{n}{1}\left(\frac{s\,(z-s)^{n+1}}{n+1}+\frac{(z-s)^{n+2}}{n+2}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{n\,(n-1)}{2}\left(\frac{2s\,(z-2s)^{n+1}}{n+1}+\frac{(z-2s)^{n+2}}{n+2}\right)+\ldots\right],$$

окажется при $z = 1$ истинной мерой самой вероятности. В предложенном выше случае когда $t = 6$ и $n = 12$ она будет равна 0.245 и, следовательно, соотношение шансов в пользу того, что среднее из шести наблюдений ближе к истине чем одно единственное наблюдение, равно 755/245 или 151/49.

Примечания

1. Мы не смогли отыскать подобных утверждений, см. Шейнин (1973а, с. 109 – 110).

2. Вот высказывание, фактически объявляющее случайную ошибку случайной величиной. Соответствующее формальное определение появилось лишь у Васильева (1885, с. 133): “Случайные ошибки имеют все свойства случайных величин ... и свои специальные свойства”.

3. Эта экстраполяция неверна. Для распределения Коши среднее не лучше отдельного результата, а при еще более “плохих” распределениях даже хуже. Впрочем, в обычных случаях, когда распределение погрешностей близко к нормальному, утверждение Симпсона справедливо.

4. Здесь и ниже отсутствует символ числа сочетаний, который в то время еще не применялся.

5. Шансы подобных событий раннее подсчитывал и сам Симпсон, и другие ученые до него, например Монмор (Montmort 1708, p. 46).

6. Слово *некоторые* появилось лишь в 1757 г.

7. Симпсон имеет в виду формулу (см., например, Чебышев 1879 – 1880, с. 109)

$$\sum_{x=0}^{x} x\,(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n+1) = \frac{x\,(x-1)\ldots(x-n)}{n+1}.$$

8. Это выражение можно записать в виде

$$C_{36}^{12} - 12\,C_{30}^{12} + 66\,C_{24}^{12} - 220\,C_{18}^{12}.$$

В 1757 г. Симпсон привел иное выражение, а именно

$$C_{35}^{12} - 12\,C_{29}^{12} + 66\,C_{23}^{12} - 220\,C_{17}^{12},$$

но оставил его прежнее численное значение, 299 576 368. Нетрудно видеть, что верно новое выражение, а его значение, недостаточно тщательно проверенное нами, видимо 299 584 178.

Библиография

Васильев А.В. (1885), *Теория вероятностей*. Казань. Литография.

Чебышев П.Л. (1879 – 1880, лекции), *Теория вероятностей.* М. – Л., 1936.
Шейнин О.Б. (Sheynin O.B.) (1973a), Boscovich's work on probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 9, pp. 306 – 324.
--- (1973b), Mathematical treatment of observations. Там же, vol. 11, pp. 97 – 126.
Dale A.I. (2003), *Most Honourable Remembrance. The Life and Work of Thomas Bayes.* New York.
Hald A. (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930.* New York.
Montmort P.R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Второе издание 1713 перепечатано: Нью Йорк, 1980. Прижизненные издания изданы анонимно.
Shoesmith E. (1985), T. Simpson and the arithmetic mean. *Hist. Math.*, vol. 12, pp. 352 – 355.

9. Томас Бейес

Бейес (прим. 1701 – 1761) решил *обратную* задачу, – определил теоретическую вероятность случайного события по известной статистической вероятности его появления в серии бернуллиевых испытаний, и по этой причине мы (Шейнин 2003) полагаем. что его основной мемуар 1764 г. с дополнениями 1765 г. завершил построение первой, до-лапласовой теории вероятностей. Кроме того, его предположение о существовании априорных распределений оказало громаднейшее влияние на развитие математической статистики. Мы оставляем в стороне все споры о подоплеке бейесовских рассуждений, равно как и историю *бейесовского подхода* в статистике и лишь повторим образное выражение Корнфильда (Cornfield 1967, с. 41): [после нескольких десятилетий] теория Бейеса "вернулась с кладбища" (но не с поля битвы!).

Основными комментаторами мемуара Бейеса можно считать Тимердинга, который перевел его на немецкий язык (Bayes 1908), Уишарта (Wishart 1927) и Хальда (Hald 1998, глава 8), но первым из них был, конечно же, Ричард Прайс (1723 – 1791). Именно он существенно дополнил мемуар своего покойного друга и снабдил его предисловием (но, к сожалению, не сохранил предисловия самого Бейеса).

Задача Прайса о вероятности последующего восхода Солнца, которую он сформулировал и решил в своем Приложении к мемуару Бейеса, стала классическим примером рассуждения о событии, про которое ничего. помимо статистических данных, не известно (Zabell 1989). Прайс четко заявил, что его задача являлась чисто методической, но вот Чебышев (1879 – 1880, с. 158) все-таки предпочел сформулировать ту же задачу на обыденном уровне: студент успешно ответил на несколько вопросов; какова вероятность, что он так же ответит на следующий?

Из иных математических работ Бейеса известна лишь одна (также посмертная) заметка 1764 г. В ней автор, пожалуй впервые, явно обратил внимание на опасность применения оборванных расходящихся рядов.

Читатель увидит, что, следуя Ньютону, Бейес облекал интегральное исчисление в геометрическую одежду. Далее, в соответствии с обычаями того времени. Он рассматривал не числа, а их отношения и даже упоминал *отношение равенства* вместо *равны друг другу*. Словом *ряд* он обозначал его сумму, и, наконец, вместо *ожидания*, как писал Гюйгенс, пользовался термином *цена ожидания*.

Очерк решения задачи из учения о шансах

Покойного преподобного м-ра Бейеса, члена Королевского общества
Представлено м-ром Прайсом в письме Джону Кантону,
магистру искусств, члену Королевского общества

Bayes T. (1764), An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. В книге Pearson E.S., Kendall M.G., редакторы (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability*. London, pp. 134 – 154.

Прочитано 23 дек. 1763 г.

Дорогой Сэр, При сем я посылаю Вам Очерк, который нашел в бумагах нашего покойного друга м-ра Бейеса и который, по моему мнению, обладает крупными достоинствами и вполне заслуживает быть сохраненным [опубликованным]. Вы увидите, что экспериментальная философия очень заинтересована в теме Очерка и что, по-видимому, существует [и] особая причина полагать, что его представление Королевскому обществу не может быть неуместным.

Вам известно, что Бейес имел честь состоять в этом прославленном Обществе и что многие его члены весьма почитали его как очень способного математика. Во Введении, написанном к этому Очерку [не сохранился], он говорит, что вначале, размышляя о его предмете, он имел целью отыскать метод для суждения о вероятности появления события, про которое не известно ничего, кроме того, что при тех же обстоятельствах оно имело место некоторое число раз и не произошло некоторое иное число раз. Он добавляет, что вскоре заметил, что это нетрудно сделать, если только удастся установить какое-нибудь правило для оценки шанса, что вероятность совершенно неизвестного события должна заключаться, [еще] до всяких опытов, произведенных для ее определения, между любыми названными степенями вероятности. И он представил себе, что это правило должно было состоять в предположении, что шанс будет тем же самым для нахождения вероятности между любыми двумя равноразличными [equidifferent][1] степенями. Будь это предположено, все остальное может быть легко вычислено по обычному методу действий в учении о шансах. И действительно, я нашел среди его бумаг весьма остроумное решение этой задачи указанным путем.

Впоследствии, однако, Бейес рассудил, что возможно не все посчитали бы разумным тот *постулат*, на котором он основывался. Поэтому он предпочел установить предложение, содержавшее, по его мнению, решение задачи в иной форме и дополнительно указать в *пояснительном комментарии* причины, почему он так полагал, а не стал вносить в свои математические рассуждения что-либо, могущее допустить споры.

Каждый здравомыслящий человек заметит, что упомянутая задача ни в коем случае не является только лишь любопытным исследованием в области учения о шансах, что ее необходимо решить, чтобы надежно обосновать все наши рассуждения об имевших место фактах и о том, что вероятно случится в будущем. Уже здравый смысл действительно убеждает нас, что прошлые наблюдения следствий определенной причины или определенного действия позволяют судить о ее правдоподобных следствиях в другое время и что чем больше число наших опытов для подкрепления некоторого вывода, тем обоснованнее мы считаем его доказанным.

Очевидно, однако, что без особого обсуждения упомянутой задачи мы не можем определить, во всяком случае не можем ни с какой точностью, в какой степени повторные опыты подтверждают вывод. Каждый, кто хотел бы представить ясный отчет о прочности *рассуждения по аналогии*, или, иначе, *индуктивного рассуждения*, должен, следовательно, рассмотреть эту задачу. В настоящее время мы, однако, по-видимому знаем о таких рассуждениях немногим больше, чем что иногда они действительно убеждают нас, а в других случаях нет. И, являясь средством для нашего ознакомления со многими истинами, о которых мы должны были бы без их помощи оставаться несведущими, подобные рассуждения по всем вероятиям оказываются источником многих быть может избегаемых ошибок, будь их сила более отчетливо и ясно понята.

Эти наблюдения доказывают, что задача, исследуемая в настоящем Очерке, столь же важна как любопытна или еще важней. Можно уверенно добавить, как я представляю, что она кроме того и не была решена. М-р Муавр, действительно в громадной степени усовершенствовал эту [?] часть математики. В своем *Учении о шансах*[2] он, после [Якоба] Бернулли и с большей степенью точности, сформулировал правила определения вероятности того, что, если сделано очень большое число испытаний по поводу какого-либо события, то пропорция числа случаев, когда оно произойдет в них к числу противоположных случаев должна будет отличаться менее чем на малые и наперед заданные величины от пропорции вероятностей его наступления и ненаступления в одном единичном испытании. Но я не знаю никого, кто показал бы, как решить обратную задачу, а именно, при заданных числах появления и непоявления неизвестного события определить шанс, что вероятность его наступления должна будет находиться где-то между любыми двумя названными степенями вероятности.

То, что сделал м-р Муавр, нельзя поэтому считать достаточным для того, чтобы рассмотрение этого вопроса оказалось ненужным; и особенно потому, что его правила не притязают на строгую точность кроме как в предположении бесконечного числа сделанных испытаний. Неясно поэтому, сколь велико должно быть их число для обеспечивания точности, достаточной, чтобы полагаться на них на практике.

М-р Муавр называет решенную им таким образом задачу наиболее трудной из тех, которые могут быть предложены на предмет шансов[3]. Он применил свое решение для очень важной цели и тем самым показал, как сильно ошибаются те, кто намекает, что значение учения о шансах в математике незначительно и что оно не может иметь места ни в каком серьезном исследовании. Его цель состояла в том, чтобы показать, на чем основана наша вера в существовании неизменных законов устройства вещей, в соответствии с которыми происходят события; убедиться, что строение мира должно быть следствием мудрости и могущества разумной причины и тем самым подтвердить вывод о существовании божества, опирающийся на конечные причины[4]. Легко видеть, что обратная задача, решенная в этом Очерке, более непосредственно применима к указанной цели, ибо она ясно и точно показывает нам в каждом случае любого заданного порядка или повторения событий, какое имеется основание полагать, что подобное повторение или подобный порядок является следствием устойчивых причин или закономерностей в природе, а не любой нерегулярности шанса.

Последние два правила этого Очерка даны без выводов. Я решил сделать так потому, что они занимают много места и слишком раздули бы изложение, а также ввиду того, что эти выводы, имея существенное приложение все же не отвечают цели, с которой они даны, так безупречно, как можно было бы желать. Они, однако, могут сразу быть приведены коль скоро их представление будет признано подходящим. В некоторых местах я вставил краткие замечания, а к Очерку в целом добавил приложение его правил к некоторым частным случаям, чтобы яснее выразить идею о сущности задачи и показать насколько было осуществлено ее решение.

Сознавая насколько Вы заняты, я не могу разумно ожидать, что Вы будете подробно исследовать каждую часть того, что я теперь посылаю Вам. Никто не смог бы проделать некоторые вычисления, особенно содержащиеся в приложении, без существенного труда. Я уделил им так много внимания, что полагаю, что ни в одном из них не может быть серьезных ошибок; в противном же случае я единственный, кого должно считать ответственным за них.

М-р Бейес решил предпослать своему труду краткое доказательство общих законов шанса. Причиной тому, как он говорил в своем Введении, было не только желание избавить читателя от хлопот по поиску принципов, на которых он основывался, но и незнание где именно читатель найдет их ясное доказательство. Он также защитил свое особое определение слова *шанс* или *вероятность*. Бейес намеревался здесь отсечь все споры о его значении, которое в обычном языке применяется людьми различных мнений в различных смыслах и к *прошедшим* и к *будущим* фактам соответственно. Но какие бы различные значения оно не имело, все (как он отмечает) согласятся, что ожидание, зависящее от истинности любого *прошедшего* факта или от появления любого *будущего* события, должно считаться тем более ценным, чем истинность этого факта более вероятна или появление этого события более правдоподобно. Поэтому, вместо собственного смысла слова *вероятность* он привел то, которое все согласятся считать его должной мерой в каждом случае его употребления.

Но время заканчивать это письмо. Экспериментальная философия обязана Вам несколькими открытиями и усовершенствованиями[5] и поэтому я не могу не думать, что представление Вам этого Очерка и приложения особо уместна. Чтобы Ваши исследования были вознаграждены многими дальнейшими успехами и чтобы Вы могли наслаждаться каждым бесценным благословением искренне желает Ваш, Сэр, покорнейший слуга

Ричард Прайс

Ньюингтон-Грин, 10 ноября 1763 г.

Задача

Дано число раз появления и непоявления неизвестного события. *Требуется определить* шанс того, что вероятность его наступления в единичном испытании находится где-то между двумя заданными степенями вероятности.

Раздел 1-й

Определение 1. Несколько событий *несовместны*, если, при появлении одного из них, ни одно из остальных не может произойти.

2. Два события *противоположны* если либо одно, либо другое должно наступить, но оба вместе произойти не могут.

3. Говорят, что событие *не наступило*, если оно не может произойти; или, что то же, если появилось противоположное событие.

4. Говорят, что событие определено, если оно либо имело место, либо нет.

5. *Вероятность любого события* есть отношение между ценой, которой должно быть измерено его ожидание, зависящее от его появления, и ценой вещи, ожидаемой при его наступлении.

6. Под *шансом* я понимаю то же самое, что вероятность.

7. События независимы, если появление одного из них не повышает и не снижает вероятностей остальных.

Предложение 1. Если несколько событий несовместны, вероятность появления либо одного, либо других равна сумме вероятностей каждого из них.

Допустим, что таких событий три, и пусть я получу N если наступит любое из них и что их вероятности равны соответственно a/N, b/N и c/N Тогда, по определению вероятности, цена моего ожидания от первого события равна a, от второго, b, и от третьего, c. Следовательно, цена моего ожидания от появления их всех будет равна $(a + b + c)$. Но в этом случае сумма моих ожиданий от всех трех событий равна ожиданию N от появления любого из них. Поэтому, по Определению 5, вероятность наступления любого события равна $(a + b + c)/N$ или $(a/N + b/N + c/N)$, т.е. сумме вероятностей каждого из них.

Следствие. Если какое-то одно из этих трех событий должно появиться наверняка, то $(a + b + c) = N$. Ибо в этом случае все ожидания совместно составляют достоверное ожидание получить N и их совместное значение должно быть равно N. И поэтому ясно, что вероятность события, сложенная с вероятностью его непоявления (или с вероятностью противоположного события) является отношением равенства (ratio of equality) [= 1]. Ибо эти события несовместны и одно из них необходимо происходит. Следовательно, если вероятность события равна P/N, то вероятность его непоявления равна $(N – P)/N$.

Предложение 2. Если кто-то имеет ожидание, зависящее от наступления события, вероятность события относится к вероятности его непоявления как потеря этого человека к его выгоде если оно произойдет.

Пусть ожидание человека получить N зависит от появления события, вероятность которого равна P/N. Тогда, по Определению 5, цена его ожидания равна P и, следовательно, если событие не наступит, он теряет то, цена чего равна P. Если же событие произойдет, он получит N, но его ожидание пропадет. Поэтому его выгода равна $(N – P)$. Аналогично, поскольку вероятность события равна P/N, вероятность его непоявления, по Следствию из Предложения 1, равна $(N – P)/N$. Но P/N относится к $(N – P)/N$ как P к $(N – P)$, т.е. вероятность события относится к вероятности его непоявления как потеря человека, если оно не происходит, к его выгоде в противном случае.

Предложение 3. Вероятность наступления двух последовательных событий является произведением (ratio)[6] вероятности первого на вероятность второго в предположении, что первое событие имеет место.

Предположим, что если оба события происходят, я получу N; что вероятность этого равна P/N, что вероятность первого события равна a/N, – и, следовательно, его непоявление имеет вероятность $(N – a)/N$, – и что вероятность второго в предположении, что первое имеет место, равна b/N. Тогда, по Определению 5, P окажется значением моего ожидания, которое будет равно b если произойдет первое событие. Следовательно, если это случится, моя выгода будет равна $(b – P)$, в противном же случае моя потеря P. Таким образом, по предыдущему предложению, a/N так относится к $(N – a)/N$, или a так относится к $(N – a)$, как P к $(b – P)$. Следовательно (*componendo inverse*), a относится к N как P к b. Но отношение P к N состоит из отношений P к b и b к N и потому также состоит из отношений a к N и b к N, т.е. вероятность, что произойдут оба последовательных события, состоит из вероятности первого и вероятности второго в предположении, что первое имело место.

Следствие. Если вероятность первого из двух последовательных событий равна a/N, а вероятность обоих вместе P/N, то вероятность второго в предположении, что первое имело место, равна P/a.

Предложение 4

Пусть ежедневно определяются два последовательных события и каждый раз вероятность второго равна b/N, а вероятность их обоих P/N и пусть я получу N если оба произойдут в тот день когда случится второе. Я говорю, что в соответствии с этими условиями моя вероятность получить N равна P/b. Ибо в противном случае пусть эта вероятность равна x/N и y относится к x как $(N – b)$ к b. Тогда, поскольку x/N есть моя вероятность получить N, по Определению 1 x есть цена моего ожидания. И, снова в соответствии с предыдущими условиями, поскольку в первый день мое ожидание получить N в зависимости от появления обоих событий вместе имеет вероятность P/N, цена моего ожидания равна P.

Равным образом, если это совпадение не наступит, мое ожидание быть восстановленным на прежних условиях, т.е. получить то, цена которого равна x, если только не произойдет второе событие, вероятность чего по Следствию из Предложения 1 равна $(N – b)/N$ или y/x, ибо y относится к x как $(N – b)$ к N. Следовательно, поскольку x есть ожидаемое, а y/x – вероятность его получения, цена этого ожидания равна y. Но два последних ожидания совместно очевидно совпадают с моим первоначальным ожиданием, цена которого x и потому $P + y = x$. Но y относится к x как $(N – b)$ к N и потому x относится к P как N к b и x/N (т.е. моя вероятность получить N) равно P/b.

Следствие. Допустим, что после ожидания, данного мне [в соответствии с] предыдущим предложением, и до того, как вообще стало известно, наступило ли первое событие или нет, я выяснил, что второе имело место. Отсюда я могу только заключить, что определилось событие, от которого зависело мое ожидание и у меня нет причин считать цену моего ожидания либо более высокой, либо более низкой чем раньше.

Ибо, имей я основание полагать ее более низкой, мне было бы разумно отдать что-то за свое восстановление на прежних условиях и поступать так все снова и снова как только мне скажут, что второе событие имело место, однако очевидно, что это нелепо. И подобная же нелепость явно последует если сказать, что я должен установить более высокую чем раньше цену своему ожиданию. Действительно, тогда мне было бы разумно отказаться от чего-то если это предлагается мне при условии, что я откажусь и буду восстановлен на прежних условиях. И так, равным образом, все снова и снова как только окажется (при неизвестности относительно первого события), что второе событие произошло. Таким образом, несмотря на обнаружившееся появление второго события, цена моего ожидания должна полагаться той же самой как раньше, т.е. равной x и, следовательно, моя вероятность получить N все еще равна (по Определению 5) x/N или P/b[7].

Но после того, как появление второго события стало известно, моя вероятность получить N есть вероятность, что первое из двух исследуемых событий имело место в предположении, что наступило второе, притом вероятность этих событий установлены как и раннее. Но вероятность появления события совпадает с моей вероятностью правильно предположить, что оно произошло. Ясным поэтому становится следующее

Предложение 5. Пусть имеются два последовательных события; вероятность второго равна b/N, а их совместная вероятность P/N и пусть установлено, что второе событие произошло. Если по этим данным я предполагаю, что первое событие также имело место, вероятность моей правоты равна P/b[8].

Предложение 6. Вероятность появления нескольких независимых событий равна произведению (ratio), составленному из вероятностей каждого.

Ибо по сути независимых событий вероятность любого из них не изменяется при появлении или непоявлении любого из остальных. Следовательно, вероятность, что второе имеет место в предположении, что первое произошло, совпадает с первоначальной вероятностью.

Но, по Предложению 3, вероятность наступления двух любых событий равна произведению (ratio), состоящему из вероятности первого и вероятности второго в предположении, что первое имело место. Поэтому вероятность, что произойдут любые два независимых события, равна произведению, состоящему из вероятностей первого и второго событий.

Равным образом, рассматривая первое и второе события совместно как единое событие, вероятность появления трех независимых событий мы получим как произведение (ratio), состоящее из вероятности, что произойдут перве два и вероятности третьего. И так можно продолжать при любом числе подобных событий, так что [наше] предложение становится очевидным.

Следствие 1. Пусть имеются несколько независимых событий. Вероятность появления первого и непоявления второго; непоявления третьего и наступления четвертого и т.д. равна произведению (ratio), составленному из вероятностей наступления первого, непоявления второго, непоявления третьего, вероятности наступления четвертого и т.д. Ибо непоявление события можно всегда рассматривать как появление ему противоположного.

Следствие 2. Пусть имеются несколько независимых событий и вероятность каждого равна a, а его непоявления b. Тогда вероятность появления первого и непоявления второго, непоявления третьего и наступления четвертого и т.д. будет равна $abba$ и т.д. Ибо, в соответствии с методом алгебраических обозначений, если a обозначает любое отношение, а b – другое, то $abba$ обозначает отношение, составленное из отношений a, b, b, a. Это следствие таким образом является лишь частным случаем предыдущего.

Определение. Если вследствие некоторых данных возникает вероятность, что произойдет определенное событие, то его появление или непоявление вследствие этих данных я буду называть появлением или непоявлением в первом испытании. И если те же данные повторятся, появление или непоявление события вследствие этого я назову появлением или непоявлением во втором испытании. И так каждый раз как только повторятся те же данные.

И поэтому ясно, что появление или непоявление одного и того же события при некотором числе различных испытаний фактически является наступлением или ненаступлением стольких же отдельных независимых событий в точности похожих друг на друга.

Предложение 7. Если в каждом испытании вероятность события a, а вероятность его непоявления b, то вероятность его наступления p раз и ненаступления q раз в $(p + q)$ испытаниях равна Ea^pb^q если E – коэффициент того члена разложения бинома $(a + b)^{p+q}$, в котором появляется [член] a^pb^q.

Ибо появление и непоявление события в различных испытаниях представляют собой независимые события, взятые тем же числом. Отсюда, по Следствию 2 к Предложению 6, вероятность событию иметь место в первом испытании, не наступить ни во втором, ни в третьем, произойти в четвертом, появиться в пятом испытании и таким образом происходить и не происходить до тех пор, пока оно не появится p раз и не будет иметь места q раз, окажется равной $abbab$ и т.д., пока a не будет выписано p раз а b – q раз, т.е. равной a^pb^q. Так же само, если рассматривать наступление события p раз и его непоявление q раз в любом ином заданном порядке, вероятность этого будет [как и раньше] a^pb^q.

Но число различных случаев, при которых событие может произойти или нет, чтобы только оно наступило p раз и не имело места q раз, равно количеству сочетаний, допускаемых [произведением] $aaaabbb$ когда число [сомножителей] a равно p, а число [сомножителей] b равно q. И это число равно E, коэффициенту члена, в котором появляется a^pb^q при разложении $(a + b)^{p+q}$. Поэтому событие может появиться p раз и не иметь места q раз в $(p + q)$ испытаниях E различными способами но не более, и эти наступления и ненаступления указанным числом способов являются независимыми событиями числом E. Вероятность каждого равна a^pb^q, и потому, по Предложению 1, вероятность подобного исхода каким-либо способом равна Ea^pb^q.

Раздел 2

Постулат 1. Пусть квадратный стол или [ограниченная] плоскость *ABCD* изготовлен(а) и выравнен(а) так, что при броске любого из мячей O или W на него (на нее) вероятность, что он остановится на любой из равных друг другу частей плоскости, окажется одной и той же и что он необходимо остановится где-либо на плоскости [см. Рис. 1].

2. Я предполагаю, что вначале бросается мяч W. Через точку его остановки проводится прямая *os* параллельно *AD*, пересекающая *CD* и *AB* в *s* и *o* [соответственно]. И что затем мяч O бросается $(p + q)$ или n раз и что его остановки между *AD* и *os* при единичном броске будет называться появлением события *M* при одном испытании. Предположив это, мы имеем:

Лемма 1. Вероятность, что точка *o* окажется между любыми двумя точками на прямой *AB*, равна отношению расстояния между ними ко всей прямой *AB*.

Пусть выбраны две любые точки, как например *f* и *b* на прямой *AB*. Проведем через них *fF* и *bL* параллельно *AD*, пересекающие *CD* в *F* и *L*. Тогда, если прямоугольники *Cf*, *Fb* и *LA* соизмеримы друг с другом, каждый из них может быть разделен на одинаковые равные части. Сделав это, бросим мяч W. Вероятность, что он остановится на любом числе этих равных частей будет суммой вероятностей, что он остановится на каждой из них, ибо его остановки на любой из различных частей плоскости *AC* представляют собой столько же несовместимых событий. И эта сумма, поскольку вероятность, что он остановится на любой из равных частей одна и та же, равна вероятности, что он остановится на любой из них, умноженной на число частей.

Следовательно, вероятность, что мяч W остановится где-то на *Fb* есть вероятность, что он должен остановиться на одной из равных частей, умноженная на их число в *Fb.* И вероятность, что он остановится где-то в *Cf* или *LA*, т.е. что он не остановится на *Fb* (ибо он должен остановиться где-то на *AC*) равна вероятности, что он остановится на одной из равных частей, умноженной на их число в *Cf* и *LA* взятых вместе. Следовательно, вероятность, что он остановится на *Fb* относится к вероятности противного случая как число равных частей в *Fb* к их общему числу в *Cf* и *LA*, или как *Fb* совместно к *Cf* и *LA*, или как *fb* к *Bf* и *Ab* совместно.

И (*componendo inverse*) вероятность, что он остановится на *Fb* относится к вероятности, что он остановится там или нет, как *fb* к *AB* или как отношение *fb* к *AB* к отношению *AB* к *AB* [к единице]. Но вероятность любого события, сложенная с вероятностью его непоявления, равна отношению равенства; следовательно, вероятность, что он остановится на *Fb* относится к отношению равенства как отношение *fb* к *AB* относится к отношению *AB* к *AB*, т.е. к отношению равенства.

И поэтому вероятность, что он остановится на *Fb* равна отношению *fb* к *AB*. Но, *по гипотезе*, при падении мяча W на *Fb* или вне этого прямоугольника, точка *o* окажется соответственно между *f* и *b* или вне *fb* и, следовательно, вероятность, что точка *o* находится между *f* и *b* равна отношению *fb* к *AB*.

Пусть теперь прямоугольники *Cf*, *Fb* и *LA* несоизмеримы. Но последняя упомянутая вероятность не может быть ни больше, ни меньше чем отношение *fb* к *AB*. Ибо, если меньше, пусть она будет равна отношению fc к AB; выберем точки p и t на fb так, чтобы pt было длиннее fc, а три отрезка, Bp, pt и tA – соизмеримы. Очевидно, что этого всегда можно достичь делением AB на равные части, меньшие половины cb и выбором в качестве p и t точек деления, ближайших к f и c, лежащих на fb.

Тогда, поскольку Bp, pt и tA соизмеримы, таковыми же будут прямоугольники Cp, Dt и тот, построенный на pt, который завершает квадрат AB. Таким образом, в соответствии со сказанным, вероятность, что точка o лежит между p и t, будет равна отношению pt к AB. Но раз она лежит между p и t, она должна находиться между f и b. Итак, вероятность, что она должна лежать между f и b не может быть меньше, чем отношение pt к AB и потому должна быть больше, чем отношение fc к AB (ибо pt длиннее чем fc). И точно так же можно доказать, что упомянутая вероятность не может быть больше отношения fb к AB и, следовательно, она должна быть равна этому отношению.

Лемма 2. После броска мяча W и проведения отрезка os вероятность события M в единичном испытании равна отношению Ao к AB.

Ибо, тем же самым образом как в Лемме 1, вероятность, что брошенный мяч O остановится где-либо на Do, т.е. между AD и so, равна отношению Ao к AB. Но остановка мяча O между AD и so после единичного броска есть появление события M в единичном испытании. Таким образом, лемма становится очевидной.

Предложение 8

Построим фигуру $BghikmA$ на AB [следующим образом]. Основание BA делится на две любые части, как например Ab и Bb, и в точке деления b восставляется перпендикуляр, пересекающий фигуру в m; y, x и r представляют собой отношения bm, Ab и Bb к AB; E – коэффициент члена, содержащего $a^{p}b^{q}$ в разложении бинома $(a + b)^{p+q}$.

По свойству этой фигуры $y = Ex^{p}r^{q}$. Я говорю, что до броска мяча W вероятность точке o находиться между любыми двумя точками f и b на AB и событию M произойти p раз и не иметь места q раз при $(p + q)$ испытаниях есть отношение $fghikmb$, части фигуры $BghikmA$, расположенной между перпендикулярами fg и bm, восставленными к отрезку AB, к CA, – к квадрату, построенному на AB.

Доказательство. В противном случае пусть вначале эта вероятность будет отношением D, фигуры, большей чем $fghikmb$, к CA; через точки e, d, c проведем перпендикуляры к fb, встречающие кривую $AmigB$ в h, i, k. Точка d выбрана так, что di окажется наиболее длинным из перпендикуляров, ограниченных отрезком fb и кривой $AmigB$, а точек e, d, c должно быть так много и расположены они должны быть так, чтобы прямоугольники bk, ci, ei, fh совместно отличались от $fghikmb$ меньше, чем отличается D.

Всего этого легко достичь при помощи уравнения кривой и заданной разности между D и фигурой $fghikmb$. Тогда, коль di – длиннейший из перпендикулярных ординат, которые заканчиваются на отрезке fb, остальные будут постепенно убывать, поскольку все они расположены все дальше и дальше от него с каждой стороны как это видно по построению фигуры и, следовательно, eh длиннее чем gf или чем любая другая ордината, заканчивающаяся на ef.

Теперь. Будь Ao равно Ae, то по Лемме 2 вероятность события M в единичном испытании была бы равна отношению Ae к AB и, по

Следствию к Предложению 1, вероятность, что оно не произойдет, будет отношением *Be* к *AB*. Поэтому, если обозначить упомянутые отношения соответственно через x и r, вероятность событию M наступить p раз и не произойти q раз в $(p + q)$ испытаниях будет, по Предложению 7, $Ex^{p}r^{q}$. Но x и r это, соответственно, отношения *Ae* и *Be* к *AB* и если y это отношение *eh* к *AB*, то, по построению фигуры *AiB*, $y = Ex^{p}r^{q}$. Следовательно, если *Ao* равно *Ae*, вероятность событию M произойти p раз и не иметь места q раз в $(p + q)$ испытаниях будет равна y или отношению *eh* к *AB*. И если *Ao* было бы равно *Af* или какому-нибудь среднему значению между *Ae* и *Af*, то последняя упомянутая вероятность по тем же причинам будет отношением *fg* или какой-либо иной ординаты, заканчивающейся на отрезке *ef*, к *AB*. Но *eh* – наибольшая из таких ординат. Поэтому, если точка [*o*] должна находиться где-то между *f* и *e*, вероятность, что событие M произойдет p раз и не наступит q раз в $(p + q)$ испытаниях не может быть больше отношения *eh* к *AB*.

Итак, имеются два последовательных события, первое, что точка *o* лежит между *e* и *f* и второе, что событие M произойдет p раз и не наступит q раз в $(p + q)$ испытаниях. Вероятность первого, по Лемме 1, есть отношение *ef* к *AB* и, в предположении, что оно произошло, и на основе доказанного сейчас, вероятность второго события не может быть больше отношения *eh* к *AB*.

Отсюда очевидно следует, по Предложению 3, что вероятность наступления обоих событий не может быть больше отношения, состоящего из отношений *ef* к *AB* и *eh* к *AB*, т.е. отношения *fh* к *CA*. Поэтому вероятность точке *o* находиться между *f* и *e*, а событию M произойти p раз и не иметь места q раз в $(p + q)$ испытаниях не больше отношения *fh* к *CA*. И подобным же образом вероятность точке *o* лежать между *e* и *d*, а событию M произойти и не произойти как и раньше, не может быть больше отношения *ei* к *CA*. И, снова, вероятность точке *o* лежать между *d* и *c*, а событию M наступить и не наступить как и раньше, не может быть больше отношения *ci* к *CA*. И, наконец, вероятность точке *o* лежать между *c* и *b*, а событию M как и раньше иметь место или нет, не может быть больше отношения *bk* к *CA*. Сложим теперь все эти вероятности и их сумма по Предложению 1 будет вероятностью, что точка *o* находится где-то между *f* и *b*, а событие M произойдет p раз и не наступит q раз в $(p + q)$ испытаниях.

Сложим равным образом соответствующие отношения и их сумма будут отношением суммы предыдущих к их общему последующему, т.е. отношением *fh*, *ei*, *ci* и *bk*, взятых совместно к *CA*. Это отношение будет меньше отношения D к *CA*, потому что D больше *fh*, *ei*, *ci* и *bk* взятых совместно. И потому вероятность, что точка *o* лежит между *f* и *b* и, кроме того, что событие M наступит p раз и не произойдет q раз при $(p + q)$ испытаниях будет меньше отношения D к *CA*. Было, однако, предположено, что она равна этому отношению, что нелепо. Таким же образом, вписывая прямоугольники, такие как, например, *eg*, *dh*, *dk*, *cm*, в фигуру, можно доказать, что последняя упомянутая вероятность *больше* отношения любой фигуры меньшей чем *fghikmb* к *CA*. Таким образом, эта вероятность должна быть отношением *fghikmb* к *CA*.

Следствие. До броска W вероятность точке *o* лежать между *A* и *B*, т.е. где-то на отрезке *AB*, и, кроме того, событию M произойти p раз и не наступить q раз при $(p + q)$ испытаниях, равна отношению всей фигуры

AiB к CA. Но точка o необходимо лежит где-то на AB. Поэтому, перед броском мяча W, вероятность событию M иметь место p раз и не наступить q раз в $(p + q)$ испытаниях есть отношение AiB к CA.

Предложение 9

Пусть до выяснения чего-либо о местоположении точки o окажется, что событие M наступило p раз и не произошло q раз в $(p + q)$ испытаниях. Исходя из этого, я полагаю, что точка o находится между любыми двумя точками, например, f и b, на отрезке AB и что, следовательно, вероятность события M в единичном испытании была равна чему-то между отношениями Ab и Af к AB. Вероятность справедливости моего предположения равна отношению той части фигуры AiB, которая была определена выше, и расположена между перпендикулярами, восставленными к AB в точках f и b, ко всей фигуре AiB.

Ибо имеют место два последовательных события; первое, что точка o лежит между f и b и второе, что событие M должно произойти p раз и не наступить q раз в $(p + q)$ испытаниях. И, по Следствию к Предложению 8, первоначальная вероятность второго события равна отношению AiB к CA и (по Предложению 8) вероятность обоих есть отношение $fghimb$ к CA. Следовательно (по Предложению 5), поскольку обнаружено, что второе событие произошло, я полагаю, что первое также имело место и вероятность моей правоты равна отношению $fghimb$ к AiB, что и требовалось доказать.

Следствие. В том же предположении, если я полагаю, что вероятность события M находится где-то между 0 и отношением Ab к AB, шанс моей правоты равен отношению Abm к AiB.

Пояснительный комментарий

Из предыдущего предложения ясно, что в случае события, подобного тому, которое я здесь обозначил через M, и зная сколько раз оно имеет место или нет при некотором числе испытаний, и не зная о нем ничего больше, можно предположить где [в каких границах] расположена его вероятность и, вычислив обычным методом величины упомянутых там площадей, определить шанс, что это предположение верно. Что то же самое правило и надлежит применять в случае события, про вероятность которого мы совершенно ничего не знаем до проведения каких-либо соответствующих испытаний, по-видимому следует из такого соображения: По поводу подобного события у меня нет основания полагать, что в некотором количестве испытаний оно появится скорее определенное число раз а не другое из возможных. Ибо, тут я могу обоснованно заключить, что его вероятность вначале была будто бы неопределенной, а затем установлена таким образом, что не давала мне никакого повода считать, что при некотором числе испытаний оно появится скорее любое заданное число раз нежели другое из возможных. Но это в точности совпадает со случаем события M. Ибо до броска мяча W, который по Следствию из Предложения 8 определяет его вероятность в единичном испытании, вероятность, что оно появится p раз и не наступит q раз в $(p + q)$ или n испытаниях есть отношение AiB к CA, которое остается прежним после известных $(p + q)$ или n испытаний каково бы ни было p. Это станет ясным при вычислении величины AiB по методу флюксий[9]. И, следовательно, прежде чем определено место точки o или число появлений события M в n испытаниях, у меня нет оснований полагать, что оно наступит скорее определенное число раз а не другое из возможных.

Ниже я поэтому приму, что правило, относящееся к событию *M* в Предложении 9, следует также применять ко всякому событию, которое касается вероятности того, о чем перед соответствующими произведенными или наблюденными испытаниями совершенно ничего не известно. И такое событие я буду называть неизвестным.

Следствие. Предполагая ординаты фигуры *AiB* сжатыми в отношении *E* к одному, что не изменяет соотношений между частями фигуры, содержащимися между ними, и применяя сказанное о событии *M* к неизвестному событию, мы приходим к следующему предложению, которое дает нам правило для отыскания вероятности события по числу раз его фактического появления и ненаступления.

Предложение 10

Если на любом основании *AH* (см. Рис. 2) построить фигуру [кривую] с уравнением $y = x^p r^q$, где *y, x, r* это соответствующие отношения ее ординаты, пересекающей основание под прямым углом; отрезка основания между [концом] этой ординаты и начальной точкой основания *A*; и остальным отрезком основания между концом ординаты и точкой *H*, к основанию. И я говорю, что если неизвестное событие имело место *p* раз и не наступило *q* раз в $(p + q)$ испытаниях, и если, выбрав на основании любые две точки *f* и *t*, восставить ординаты *fC* и *tF* под прямыми углами к нему, то шанс, что вероятность события расположена где-то между отношениями *Af* и *At* к *AH*, равна отношению *tFCf*, т.е. той части описанной раннее фигуры, которая заключена между двумя указанными ординатами, ко всей фигуре *ACFH*, опирающейся на основание *AH.*

Это очевидно вытекает из Предложения 9 и замечаний, сделанных в предшествующих Пояснительном комментарии и Следствии. Теперь. Чтобы представить предыдущее правило в виде, удобном для практики, мы должны найти значение площади описанной нами фигуры и ее нескольких частей, отделенных друг от друга ординатами, перпендикулярными ее основанию. Для этой цели предположим, что $AH = 1$ и *HO*, квадрат, построенный на *AH*, также равен 1; *Cf* будет $= y$, $Af = x$, $Hf = r$ потому что *y*, *x* и *r* обозначают соответственно отношения *Cf*, *Af* и *Hf* к *AH.* И уравнение кривой будет $y = x^p r^q$ и $r + x = 1$ так как $Af + fH = AH$. Следовательно,

$$y = x^p(1-x)^q = x^p - qx^{p+1} + \frac{q(q-1)x^{p+2}}{2} - \frac{q(q-1)(q-2)x^{p+3}}{2\cdot 3} + \text{etc.} \quad (1)$$

Поскольку *x* это абсцисса, ординате x^p соответствует площадь $[x^{p+1}/(p+1)]$ (по Предложению 10, случай 1, Ньютон, Quadrat[10]), а ординате qx^{p+1} – площадь $[qx^{p+2}/(p+2)]$. И аналогично для всех остальных ординат. Следовательно, площадь, соответствующая абсциссе *x* и ординате *y* или (1), равна

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)x^{p+3}}{2(p+3)} - \frac{q(q-1)(q-2)x^{p+4}}{2\cdot 3(p+4)} + \text{etc.} \qquad (2)$$

Поэтому, если $x = Af = Af/AH$ и $y = Cf = Cf/AH$,

$$ACf = \frac{ACf}{HO} = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \frac{q\,(q-1)\,x^{p+3}}{2\,(p+3)} - \text{etc.} \qquad (3)$$

Из этого уравнения, если q – небольшое число, легко отыскать значение отношения ACf к HO. Подобно тому, что было найдено, оказывается, что отношение HCf к HO равно

$$\frac{r^{q+1}}{q+1} - \frac{pr^{q+2}}{q+2} + \frac{p\,(p-1)\,r^{q+3}}{2\,(q+3)} - \frac{p\,(p-1)\,(p-2)\,r^{q+4}}{2\cdot 3\,(q+4)} + \text{etc.}$$

Этот ряд будет состоять из немногих членов и потому применим при небольших значениях p.

2. [Параграф 1 не отмечен.] В предположении того же, что и раньше, отношение ACf к HO будет равно

$$\frac{x^{p+1}r^{q}}{p+1} + \frac{q\,x^{p+2}r^{q-1}}{(p+1)\,(p+2)} + \frac{q\,(q-1)\,x^{p+3}r^{q-2}}{(p+1)\,(p+2)\,(p+3)} +$$

$$\frac{q\,(q-1)\,(q-2)\,x^{p+4}r^{q-3}}{(p+1)\,(p+2)\,(p+3)\,(p+4)} + \text{etc} + \frac{x^{n+1}q\,(q-1)\ldots 1}{(n+1)\,(p+1)\,(p+2)\ldots n}, \qquad (4)$$

где $n = p + q$. Ибо этот ряд совпадает с (3), установленным в §1 в качестве значения отношения ACf к HO, что легко заметить если в предыдущий ряд (2) вместо r подставить его значение $(1 - x)$, затем разложить его члены и расположить его по степеням x. Или, проще, сравнивая флюксии [производные] обоих рядов и подставляя в (2) $-\dot{x}$ вместо $\dot{r}$ **[11]**.

3. Подобным же образом получим, что отношение HCf к HO равно

$$\frac{r^{q+1}x^{p}}{q+1} + \frac{p\,r^{q+2}x^{p-1}}{(q+1)\,(q+2)} + \frac{p\,(p-1)\,r^{q+3}x^{p-2}}{(q+1)\,(q+2)\,(q+3)} + \text{etc.}$$

4. Если E – коэффициент члена, содержащего $a^{p}b^{q}$ в разложении бинома $(a + b)^{p+q}$, отношение всей фигуры $ACFH$ к HO равно $[(n + 1)E]^{-1}$, где $n = p + q$. Ибо при $Af = AH$ мы имеем $x = 1$, $r = 0$. Следовательно, все кроме последнего члены ряда (4), указанного в §2 и выражающего отношение ACF к HO исчезнут и он окажется равным

$$\frac{q\,(q-1)\ldots 1}{(n+1)\,(p+1)\,(p+2)\ldots n}.$$

Но E, как оно определено выше, равно

$$\frac{(p+1)\,(p+2)\ldots n}{q\,(q-1)\ldots 1}.$$

И поскольку предположено, что Af становится равным AH, $ACf = ACH$. Этот параграф теперь очевиден.

5. По §§1 и 4 отношение ACf ко всей фигуре $ACFH$ равно

$$(n+1)E\left[\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)x^{p+3}}{2(p+3)} - \text{etc}\right]. \qquad (5)$$

И, если x выражает отношение Af к AH, X должно будет выразить отношение At к AH и отношение AFt к $ACFH$ будет равно [предыдущему выражению с заменой x на X]. Следовательно, отношение $tFCf$ к $ACFH$ равно $(n + 1)E$, умноженному на разность между двумя рядами. При сравнении этого с Предложением 10 мы получим следующее практическое правило.

Правило 1

Если про событие не известно ничего кроме того, что оно имело место p раз и не наступило q раз в $(p + q)$ или n испытаниях, и если я поэтому предполагаю, что вероятность его появления в единичном испытании лежит где-то между любыми двумя степенями вероятности X и x, то шанс моей правоты равен $(n + 1)E$, умноженному на разность между [рядом в (5) и самим этим рядом с заменой x на X], где E – коэффициент при $a^p b^q$ в разложении $(a + b)^n$

Это правило надлежит применять при небольших q. Но если q велико, а p мало, следует всюду в указанных рядах поменять p на q, q на p, x на r или $(1 - x)$ и X на $R = (1 - X)$. Это не изменит разности между рядами.

На этом кончается Очерк м-ра Бейеса.

В связи с данным здесь правилом следует еще заметить, что когда и p, и q очень велики, его нельзя будет применять ввиду множества членов, содержащихся в соответствующих рядах. Поэтому м-р Бейес вывел из этого правила другое при помощи исследования, повторять которое здесь было бы слишком утомительно. Вот оно:

Правило 2

Если про событие ничего не известно кроме того, что оно имело место p раз и не наступило q раз в $(p + q)$ или n испытаниях и если я поэтому предполагаю, что вероятность его появления в единичном испытании лежит где-то между $[(p/n) + z]$ и $[(p/n) - z]$; если $m^2 = n^3/pq$[12], $a = p/n$, $b = q/n$, E – коэффициент члена, содержащего $a^p b^q$ в разложении $(a + b)^n$ и

$$\sum = \frac{(n+1)\sqrt{2pq}}{n\sqrt{n}} Ea^p b^q, \qquad (6)$$

умноженное на ряд

$$mz - \frac{m^3z^3}{3} + \frac{(n-2)m^5z^5}{2n\cdot 5} - \frac{(n-2)(n-4)m^7z^7}{2n\cdot 3n\cdot 7} +$$

$$\frac{(n-2)(n-4)(n-6)m^9z^9}{2n\cdot 3n\cdot 4n\cdot 9} - \text{etc}, \qquad (7)$$

то шанс моей правоты больше и меньше чем соответственно

$$\frac{2\sum}{1+2Ea^pb^q+2Ea^pb^q/n}\text{ [13] и }\frac{2\sum}{1-2Ea^pb^q-2Ea^pb^q/n}\qquad(8;\,9)$$

Если же $p = q$, то мой шанс в точности равен $2\sum$.

Чтобы это правило сделать пригодным для применения во всех случаях, необходимо лишь знать как с достаточной точностью определить Ea^pb^q равно как и ряд (7). По поводу первой величины м-р Бейес доказал, что если K – отношение дуги прямого угла к ее радиусу [$K = \pi/2$], она будет равна

$$(1/2)\sqrt{\frac{n}{Kpq}},$$

умноженноu̇j на отношение (h), *гиперболический* логарифм которого равен

$$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{360}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)+\frac{1}{1260}\left(\frac{1}{n^5}-\frac{1}{p^5}-\frac{1}{q^5}\right)-$$

$$\frac{1}{1680}\left(\frac{1}{n^7}-\frac{1}{p^7}-\frac{1}{q^7}\right)+\frac{1}{1188}\left(\frac{1}{n^9}-\frac{1}{p^9}-\frac{1}{q^9}\right)-\text{etc}^{\mathbf{14}}.\qquad(10)$$

Числовые коэффициенты этого ряда (назовем их *A, B, C, D, E* и т.д.) могут быть найдены следующим образом. Коэффициентами *B, C, D, E, F*, … в выражениях для *D, E, F*, … являются наибольшие биномиальные коэффициенты в разложениях $(a + b)^7$, $(a + b)^9$, $(a + b)^{11}$ и.т.д.[15]

Что касается значения [суммы] ряда (7), Бейес заметил. что она может быть вычислена непосредственно если mz меньше 1 или даже не болеее $\sqrt{3}$; но при намного большем mz так поступать становится нецелесообразно. Для этого случая он указывает метод легкого вычисления двух ее почти равных друг другу значений, между которыми должно находиться ее истинное значение. Теорема, которую он для этой цели приводит, такова.

Пусть K, как и раньше, означает отношение дуги прямого угла к ее радиусу, а H – отношение, гиперболический логарифм которого равен

$$\frac{2^2-1}{2n}-\frac{2^4-1}{360n^3}+\frac{2^6-1}{1260n^5}-\frac{2^8-1}{1680n^7}+\text{etc.}$$

Тогда сумма ряда (7) окажется больше или меньше ряда

$$\frac{Hn\sqrt{K}}{(n+1)\sqrt{2}}-\frac{n\alpha^{s+1}}{(n+2)\,2mz}+\frac{n^2\alpha^{s+2}}{(n+2)\,(n+4)\,4m^3z^3}-$$

$$\frac{3n^3\alpha^{s+3}}{(n+2)\,(n+4)\,(n+6)\,8m^5z^5} + \frac{3\cdot 5n^4\alpha^{s+4}}{(n+2)\,(n+4)\,(n+6)\,(n+8)\,16m^7z^7} - \text{etc}$$

[где в наших обозначениях $\alpha = 1 - 2m^2z^2/n$ и, только в показателях степеней, $s = n/2$], продолженного до вычисления любого числа членов в соответствии с тем, положительный или отрицательный знак предшествует последнему члену. При подстановке этого значения Ea^pb^q и ряда (7) в формулу Правила 2 мы получаем третье правило, которое следует применять если mz значительно.

Правило 3

Если про событие не известно ничего кроме того, что оно имело место p раз и не наступило q раз в $(p + q)$ или n испытаниях, и если я поэтому предполагаю, что вероятность его появления в единичном испытании лежит где-то между $[(p/n) + z]$ и $[(p/n) - z]$, шанс моей правоты *превышает*

$$\frac{(1/2)\sqrt{Kpq}\,h}{\sqrt{Kpq} + h\sqrt{n} + h/\sqrt{n}}\left(2H - \frac{\sqrt{2}(n+1)\,(1-2m^2z^2/n)^{s+1}}{\sqrt{K}\,(n+2)\,mz}\right),$$

но он *меньше*, чем

$$\frac{(1/2)\sqrt{Kpq}\,h}{\sqrt{Kpq} - h\sqrt{n} - h/\sqrt{n}} \text{ умноженное на}$$

$$2H - \frac{\sqrt{2}(n+1)\,(1-2m^2z^2/n)^{s+1}}{\sqrt{K}\,(n+2)\,mz} + \frac{\sqrt{2}n\,(n+1)\,(1-2m^2z^2/n)^{s+2}}{\sqrt{K}\,(n+2)\,(n+4)\,2m^3z^3},$$

где обозначения m^2, K, h и H уже были разъяснены [и, снова в наших обозначениях и только в показателях степеней, $s = n/2$][16].

Приложение

предыдущих правил к некоторым частным случаям

Первое правило обеспечивает прямое и безупречное решение во всех случаях, а оба последующих представляют собой лишь частные методы аппроксимирования этого решения когда его применение становится слишком трудоемким.

Первое правило может быть применено во всех случаях, когда либо p, либо q равно нулю или невелико. Второе правило может быть применено во всех случаях, когда mz меньше $\sqrt{3}$, а третье – во всех случаях, когда m^2z^2 более 1и менее $n/2$ если n четное и очень большое число. Если n не велико, это последнее правило не может быть очень желательным, потому что m непрерывно убывает с убыванием n и значение z в этом случае может быть принято большим и интервал между $[(p/n) - z]$ и $[(p/n) + z]$ окажется большим, но вычисление все же могут быть проведены в соответствии со вторым правилом; или, если mz не превосходит $\sqrt{3}$.

Но чтобы показать четко и полностью суть данной задачи и в какой степени м-р Бейес ее решил, я приведу результат ее решения в нескольких случаях начиная с самого обычного и простого.

Пусть вначале мы предположим по поводу такого события, названного в Очерке M, т.е. события, относительно вероятности которого мы до испытаний ничего не знаем, что оно имело место *один* раз. Спрашивается, какое заключение мы можем отсюда вывести относительно вероятности его наступления при *втором* испытании.

Ответ: соотношение шансов окажется равным 3:1 в пользу того, что шанс его появления во втором испытании несколько превысит шанс его ненаступления. Ибо в этом случае и во всех остальных, в которых $q = 0$, выражение

$$(n+1)\left(\frac{X^{p+1}}{p+1}-\frac{x^{p+1}}{p+1}\right) \text{ или } X^{p+1}-x^{p+1}$$

дает решение, как это следует из рассмотрения первого правила. Подставим, стало быть, в это выражение $p + 1 = 2$, $X = 1$ и $x = 1/2$ и оно окажется равным $1 - (1/2)^2 = 3/4$. Это показывает, что существует шанс того, что вероятность события, которое произошло один раз, лежит где-то между 1 и 1/2, или, что то же самое, что однократное наблюдение события показывает соотношение шансов в пользу того, что оно скорее произойдет чем нет[17].

Таким же образом окажется, что если событие произошло дважды, то то же соотношение шансов будет равно 7:1; если трижды, то 15:1. И в общем случае, если событие произошло p раз, соотношение шансов окажется равным $(2^{p+1} - 1)$ к одному в пользу того, что в последующем оно *скорее* произойдет чем нет.

Опять-таки, пусть мне известно о событии только то, что оно имело место 10 раз подряд и требуется определить насколько мы правы, если полагаем, что вероятность его наступления в единичном испытании находится где-то между 16/17 и 2/3 или что соотношение причин его появления и непоявления находится где-то между 16:1 и 2:1. Здесь $p + 1 = 11$, $X = 16/17$ и $x = 2/3$, $X^{p+1} - x^{p+1} = (16/17)^{11} - (2/3)^{11} = 0.5013$ и т.д. Ответ, следовательно, таков: шанс нашей правоты почти равен шансу ошибки.

Таким образом, мы можем в любом случае определить, какой вывод мы должны сделать из данного числа испытаний, которым не противопоставлены иные испытания. Каждый видит, что, в общем, существует основание ожидать событие с большей или меньшей уверенностью в зависимости от большего или меньшего числа раз, в котором оно произошло подряд при данных условиях. Но здесь мы точно видим каково это основание, на каких принципах оно зиждется и как мы должны соизмерять свои ожидания.

Но на этом надлежит остановиться подробнее. Представим себе твердое тело или игральную кость, ни число граней, ни устройство которого (которой) нам не известно и что о них мы должны судить по его (ее) пробным броскам. Следует заметить, что в этом случае в высшей степени неправдоподобно, чтобы выпала указанная заранее грань. Известно ведь, что какая-то грань окажется сверху и что имеется бесконечное множество других или иначе обозначенных граней, которые могли бы выпасть с той же вероятностью[18]. Первый бросок только показывает, что у тела *имеется* оказавшаяся сверху грань, но нет никаких оснований полагать, что количество граней, тождественных появившейся, равно скорее одному числу а не другому. Поэтому получается так, что *после* первого броска, а не до него, мы должны будем находиться в условиях, которые требуются данной задачей, и что весь результат первого броска состоял в том, чтобы привести нас к этим условиям. Это означает: выпадение той же грани при любом последующем единичном испытании окажется событием, о степени вероятности которого мы не можем составить никакого суждения и о которой мы не должны знать ничего, кроме того, что она лежит где-то между нулем и достоверностью. Наши вычисления, стало быть, должны начинаться со второго испытания. И если при этом выпадет та же грань тела, то появится вероятность 3:1, что таких граней оно имеет больше, чем *всех* остальных; или, что сводится к тому же, что в строении тела существует что-то, наиболее часто склоняющее его к этому событию. И эта вероятность будет повышаться уже поясненным образом с беспрестанным появлением той же грани. Не следует, однако, представлять себе, что какое бы то ни было число подобных испытаний обеспечит достаточно оснований полагать, что никакая иная грань не появится *никогда*. Ибо, допустим, что та же грань выпала миллион раз подряд. При таких обстоятельствах появилась бы низкая вероятность, что тело имеет *менее* чем в $1.4 \cdot 10^6$ раз больше таких граней, чем всех остальных вместе взятых; но была бы также низкая вероятность, что их *более* чем в $1.6 \cdot 10^6$ раз больше[19]. Шанс последнего выражается разностью между единицей и $[1.6 \cdot 10^6 /(1.6 \cdot 10^6 + 1)]$ в миллионной степени и равен 0.4647, а шанс первого, $[1.4 \cdot 10^6/(1.4 \cdot 10^6 + 1)]$ в той же степени и равен 0.4895. Оба шанса менее 1/2, что и доказывает мое утверждение. Но, хотя таким образом не вероятно, что тело имеет *более* чем в $1.6 \cdot 10^6$ раз *больше*, или *меньше*, чем в $1.4 \cdot 10^6$ раз *больше* этих граней, чем всех остальных, отсюда никак не следует, что у нас есть какое-то основание полагать, что истинная пропорция находится в этом случае где-то между $1.6 \cdot 10^6$:1 и $1.4 \cdot 10^6$:1. Ибо тот, кто возьмет на себя труд проделать вычисления, обнаружит, что существует вероятность, близкая к 0.527 или немного превышающая половину, что пропорция находится где-то между $6 \cdot 10^5$:1 и $3 \cdot 10^6$:1. Стоит добавить, что более вероятно, что эта пропорция находится где-то между $9 \cdot 10^5$:1 и $1.9 \cdot 10^6$:1 чем между двумя любыми другими пропорциями, чьи предшествующие члены относятся друг к другу как $9 \cdot 10^5$ к $1.9 \cdot 10^6$, а последующие члены равны [как и раньше] единице[20].

Я привел эти замечания в основном потому, что все они в точности применимы к событиям и явлениям природы. До всякого опыта было бы невероятно в отношении бесконечности к единице [бесконечно невероятно], чтобы любое определенное и заранее воображенное событие следовало за приложением одного естественного объекта к другому, ибо существовал бы тот же шанс [?] для любого из бесконечного множества других событий. Но если мы один раз увидали любой определенный результат, как, например, горение дерева, положенного в огонь, или падение камня, отделенного от всех соприкасавшихся с ним объектов, то выводы, которые следует сделать из любого числа последующих событий того же вида, должны быть определены тем же способом, что и только что упомянутые заключения, относящиеся к структуре тела. Другими словами: Первое, как мы предполагаем, испытание, когда-либо произведенное с любым естественным объектом, только лишь укажет нам об одном событии, которое может последовать за некоторым изменением в обстоятельствах этих объектов. Оно, однако, не подскажет нам никаких идей о единообразии в природе и не предоставит нам ни малейшего основания заключить, что действия природы были, в этом ли случае или в любых иных случаях, закономерны скорее чем беспорядочны. Но если то же самое событие произошло во втором опыте или имело место подряд в большем числе последующих опытов, то будет замечена некоторая степень единообразия и появится основание ожидать такого же результата в следующих опытах и могут быть произведены вычисления, требуемые для решения этой задачи.

Недурно было бы привести пример. Представим себе человека, только что появившегося на свет и предоставленного самому себе, чтобы, исходя из своих наблюдений порядка и хода событий, заключить об имеющих место в мире силах и причинах. Первым объектом, который привлек бы его внимание, будет, вероятно, Солнце. Но после его исчезновения в первую ночь он совершенно не будет знать, увидит ли он Солнце когда-нибудь еще. Он, стало быть, окажется в условиях человека, производящего первый опыт о совершенно не известном для него событии. Но пусть только он увидит второе появление или одно *возвращение* Солнца и у него появится ожидание второго возвращения и он сможет узнать, что соотношение шансов в пользу *некоторой* вероятности этого равно 3:1. Это соотношение будет возрастать, как было представлено раннее, с числом увиденных им возвращений Солнца. Но никакое конечное число возвращений не будет достаточным для достижения совершенной или физической уверенности. Ибо пусть он наблюдал возвращение Солнца миллион раз через правильные и установленные промежутки времени. Это оправдает следующие заключения. Соотношение шансов в пользу того, что Солнце весьма вероятно снова возвратится в конце обычного промежутка времени, окажется равным миллионной степени двух к единице. Вероятность, что это соотношение не окажется *больше* чем $1.6 \cdot 10^6$:1 будет выражено числом 0.5352, но не меньше чем $1.4 \cdot 10^6$:1 с вероятностью, выраженной числом 0.5105.

Надлежит отчетливо помнить, что эти выводы предполагают полное предварительное незнание природы. После наблюдения хода событий в течение некоторого времени нельзя будет не заметить, что процессы в природе, вообще говоря, регулярны и что силы и законы, которые в ней преобладают, устойчивы и постоянны. Из этого соображения часто следует, что один или несколько опытов приводят к намного более сильному, чем было бы разумно в противном случае, ожиданию успеха в дальнейших опытах. Именно так частое наблюдение совместного расположения вещей некоторого рода указывает нам после обнаружения любого объекта определенного вида, что в том же месте находятся многие объекты того же вида. Ясно, что это, вовсе не противореча предыдущим заключениям, есть лишь частный случай, к которому они должны применяться.

Сказанное, видимо, достаточно, чтобы научить нас, какие выводы надо сделать из *единообразных* опытов. Оно наглядно показывает, что всегда существуют основания против заключения о том, что события *неизменно* происходят в соответствии с опытом. Другими словами, там, где действия природы наиболее постоянны, мы имеем повод полагаться на повторение события лишь в соответствии со степенью этого постоянства. Но у нас нет оснований рассчитывать, что в природе нет причин, которые *когда-либо* воспрепятствуют действиям, приведшим к этому постоянству или что в мире нет обстоятельств, нарушающих его.

Пусть это верно. Предполагая, что все наши *данные* получены только из опыта, мы будем иметь дополнительный довод считать именно так, если приложим для этого иные принципы или обратимся к рассуждениям, которые разум может подсказать независимо от опыта.

Но я пошел здесь дальше чем замышлял. И настало время направить нашу мысль на другую область этой темы, а именно к случаям, когда опыт иногда удается, а иногда нет. И снова, чтобы изъясниться как можно яснее и понятнее, будет уместно представить следующий, самый, как мне представляется, легкий и простой случай. Представим человека. присутствующего при тираже лотереи и не знающего ничего о ее устройстве, т.е. о соотношении *пустых* билетов к *выигрышным*. Предположим также, что он обязан заключить об этом сравнивая числа тех и других в ходе розыгрыша. Спрашивается, какие разумные выводы он сможет в этих условиях сделать.

Пусть он вначале услышит, что в тираж вышли 10 пустых билетов и один выигрышный. Каков шанс его правоты, если он предположит, что искомое соотношение находится где-то между 9:1 и 11:1? Полагая $X = 11/12$, $x = 9/10$, $p = 10$, $q = 1$, $n = 11$, $E = 11$, получим искомый шанс в соответствии с Правилом 1 равным $(n + 1)E$, умноженному на разность между

$$[\frac{X^{p+1}}{p+1} - \frac{qX^{p+2}}{p+2}] \text{ и } [\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2}], \qquad (11;\ 12)$$

т.е. равным

$$12 \cdot 11\ \{[\frac{(11/12)^{11}}{11} - \frac{(11/12)^{12}}{12}] - [\frac{(9/10)^{11}}{11} - \frac{(9/10)^{12}}{12}]\} = 0.07699.$$

Таким образом, соотношение шансов в пользу *ошибочности* его вывода равно 923:76 или почти 12:1 [1 – 0.07699 ≈ 0.923]. Предположи он лишь в общем, что на один выигрышный билет приходится менее девяти пустых, вероятность его правоты оказалась бы равной 0.6589, или соотношение шансов в его пользу равным 65:34[21].

Опять же, пусть этот человек услышит, что вышли 20 *пустых* билетов и 2 *выигрышных*; каков будет шанс правоты того же вывода? Здесь X и x остаются прежними, $n = 22$, $p = 20$, $q = 2$, $E = 231$ и искомый шанс равен $(n + 1)E$, умноженному на

.

$$\{[\frac{X^{p+1}}{p+1} - \frac{qX^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)X^{p+3}}{2(p+3)}] - [\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)x^{p+3}}{2(p+3)}]\} =$$

0.10843.

Здесь этот шанс, стало быть, выше чем в предыдущем случае; соотношение шансов против него теперь равно 892:108 или около 9:1. Но если он лишь в общем предположит, как и раннее, что на один выигрышный билет приходится менее девяти пустых, шанс его правоты окажется ниже; вместо 0.6589 или соотношения, близкого к 2:1, теперь, соответственно, 0.584 и 584:415.

Допустим, далее, что вышли 40 *пустых* билетов и 4 *выигрышных*; каковы будут упомянутые выше шансы? Ответ: 0.1525 и 0.527 соответственно. Следовательно, теперь соотношение шансов против предположения о том, что пропорция пустых билетов к выигрышным находится между 9:1 и 11:1, равно лишь 5½:1 и лишь немного выше половины, если считать, что оно менее 9:1.

И еще раз. Пусть этот человек услышит, что в тираж вышли 100 *пустых* билетов и 10 *выигрышных*. Ответ все еще может быть найден при помощи первого правила; шанс пропорции пустых билетов к выигрышным быть *менее* 9:1 окажется равным 0.44109, а для этой пропорции *превышать* 11:1, 0.3082. Поэтому правдоподобно, что на каждый выигрышный билет приходится не *менее* девяти и не *более* одиннадцати пустых. И в то же время останется неправдоподобным, что истинная пропорция находится между 9:1 и 11:1; шанс этого равен 0.2506 и против такого предположения все еще будет соотношение шансов примерно равное 3:1[22].

При указанных обстоятельствах из этих вычислений явствует: шанс правоты предположения, что [действительное] соотношение пустых билетов к выигрышным почти равно их [выборочному] соотношению постоянно возрастает с возрастанием числа разыгрываемых билетов. Следовательно, когда таких билетов становится действительно много, это заключение можно считать морально достоверным. По аналогии, относительно всякого без исключения события, над которым проделано большое число опытов, следует заключить, что причины его наступления так же относятся к причинам его непоявления, как числа его наступления к числу непоявлений. И если событие, причины которого считаются известными, происходит чаще или реже, чем соответствовало бы этому заключению,то существует основание полагать, что имеют место некоторые неизвестные причины, нарушающие действие известных.

Представляется, что особенно о ходе событий в природе существуют наглядные свидетельства, доказывающие, что они происходят не ввиду какого-то могущества шанса, а вследствие постоянных причин или законов, изначально определенных в устройстве природы и предназначенных для осуществления наблюдаемого нами хода[23]. Это настолько же очевидно, как понятно в моем примере предположение причины выхода в тираж после миллионов розыгрышей в 10 раз больше *пустых* билетов нежели *выигрышных* в том, что то же соотношение существовало в лотерейном колесе.

Но следует пойти несколько дальше в разъяснении этого обстоятельства. Мы видим, что человек, не знакомый с устройством лотереи, но услышав, что в тираж вышли 100 *пустых* билетов и 10 *выигрышных*, будет подведен к догадке, что их пропорция находится где-то между 9:1 и 11:1 и шанс его правоты будет 0.2506. Попробуем теперь выяснить, каков он будет в нескольких случаях большего числа наблюдений.

Пусть было разыграно 1000 *пустых* билетов и 100 *выигрышных*. Степени X и x здесь столь высоки и число членов в рядах (11) и (12) становится так велико, что получить ответ при помощи первого правила потребует огромного труда. Необходимо поэтому воспользоваться вторым правилом. Но, чтобы применить его, интервал между X и x следует несколько изменить; (10/11) – (9/10) = 1/110 и интервал между [(10/11) – (1/110)] и [(10/11) + (1/110)] будет почти таким же, как между (9/10) и (11/12) и лишь немногим больше. И если мы спросим (предполагая, что ничего не известно, кроме того, что в тираж вышло 1000 пустых билетов и 100 выигрышных), каков шанс, что вероятность вытащить пустой билет в единичном испытании находится где-то между [(10/11) – (1/110)] и [(10/11) + (1/110)], то наш вопрос будет того же вида, что и предыдущий и лишь с небольшим отличием по установленным теперь границам. Ответ, в соответствии со вторым правилом, будет, что этот шанс больше чем (8) и меньше, чем (9). Здесь $\sum$ равно выражению (6), умноженному на ряд (7). Имеем $1000 = p$, $100 = q$, $1100 = n$, $(1/110) = z$, $mz = z\sqrt{n^3/pq} = 1.048808$, $Ea^p b^q = \dfrac{h\sqrt{n}}{2\sqrt{Kpq}}$,

где h, отношение, гиперболический логарифм которого (10) и K – отношение дуги прямого угла к радиусу. Выражения (8) и (9) будут равны 0.7953 и 0.9405 соответственно. Искомый шанс поэтому больше 0.7953 и менее 0.9405. Иначе: шанс правоты предположения, что пропорция пустых билетов к выигрышным находится *почти* между 9:1 и 11:1 (или *точно* между 9:1 и 1111:99) больше 4:1 и меньше 16:1.

Пусть теперь ничего не известно, кроме того, что разыграно 10 000 *пустых* и 1000 *выигрышных* билетов. Каков будет упомянутый шанс? Здесь второе правило, как и первое, становится бесполезным, поскольку mz столь велико, что вряд ли удастся непосредственно вычислить сумму ряда (7). Поэтому придется применить третье правило. И оно сообщает нам, что искомый шанс больше чем 0.97421 или что соотношение шансов больше чем 40:1.

Подобные вычисления могут всегда определить, каковы ожидания, оправданные любыми опытами, и основанные на заданных числах успехов и неудач, или же указать, что следует полагать о вероятности, что любая определенная причина в природе, о которой мы что-то знаем, приведет к соответствующему результату в любом единичном испытании. Большинство [читателей] вероятно ожидало, что шансы в моем примере должны были бы быть больше найденных мной, но это лишь показывает, сколь мы подвержены ошибкам, если судим об этом предмете независимо от вычисления.

Здесь следует, однако, помнить об узости интервала между (9/10) и (11/12) или между [(10/11) + (1/110)] и [(10/11) – (1/110)]. Будь он несколько шире, результат вычисления оказался бы существенно иным. Так, при интервале удвоенной ширины, т.е. при $z = 1/55$, в четвертом примере было бы найдено, что соотношение шансов вероятности выхода пустого билета в единичном испытании находиться между [(10/11) +

(1/55)] и [(10/11) – (1/55)], было бы не против правоты этого суждения, а в его пользу.

Предыдущие вычисления кроме того показывают нам приложения и недостатки правил, изложенных в Очерке. Ясно, что два последних правила не дают нам требуемых шансов в столь узких границах, какие можно было бы пожелать. Но здесь снова следует иметь в виду, что эти границы все более сужаются по мере возрастания q относительно p. И когда p и q равны друг другу, второе правило обеспечивает точное решение во всех случаях. Эти правила, следовательно, показывают нам куда направлять наши суждения и ими можно существенно пользоваться пока кто-нибудь не обнаружит лучшего приближения к значениям [сумм] обоих рядов в первом правиле[24].

Но больше всего в пользу решения, содержащегося в этом Очерке, говорит его полнота в тех случаях, когда сведения нужнее всего, а решение обратной задачи по Муавру может предоставить лишь немного или вообще ничего, т.е. в случаях, когда значение p или q невелико. В других случаях, или если обе эти величины весьма велики, нетрудно усмотреть верность того, что было здесь показано, а именно, что имеется основание полагать, что вообще шансы наступления события относятся к шансам его непоявления *так же*, как p к q. Но мы сильно ошибемся, если будем судить одинаковым образом при малом p или q. И, хотя в таких случаях нет достаточно *данных*, чтобы обнаружить точную вероятность события, все же очень приятно быть в состоянии определить границы, между которыми, как можно разумно полагать, она должна находиться и, кроме того, иметь возможность определить следуемую точную степень согласия с любыми соответствующими выводами или утверждениями.

Примечания

1. Этот термин устарел. В 20-томном *Oxford English Dictionary*, 2-е изд., 1989, мы нашли следующую цитату из сочинения Галлея: “секансы equidifference дуг” и пояснение: термин означает арифметическую пропорциональность (о дугах, видимо находящихся в арифметической прогрессии друг к другу). Фраза “Вероятность ... должна заключаться ... между любыми ... степенями вероятности”, см. чуть выше, конечно же, неуклюжа. О.Ш.

2. См. De Moivre (1756, p. 243 и далее). Он пренебрег доказательством своих правил, которое, впрочем, позже представил Симпсон в конце своего трактата (Simpson 1740). [Муавр непосредственно доказал свою предельную теорему для частного случая $a = b$, см. ниже, но справедливо заметил, что рассмотрение общего случая не представит труда. Кроме того, в названии его мемуара было включено выражение бином $(a + b)^n$, а не $(1/2 + 1/2)^n$. О.Ш.]

3. См. его *Doctrine of Chances* (De Moivre 1756, с. 242). О.Ш.

4. Понятие о конечных причинах восходит к Аристотелю: ради чего нечто существует? В Средневековье оно начало связываться с Божеством. О.Ш.

5. Джон Кантон (1718 – 1772) был естествоиспытателем. Он проводил астрономические наблюдения и изучал электрические и магнитные явления. Не беремся судить, насколько был в то время распространен употребленный Прайсом термин *экспериментальная философия*, но заметим, что в в XVIIIв. философия пазделилась на естественнонаучную и моральную. О.Ш.

6. В словаре, упомянутом в Прим. 1, слово *ratio* не приводится в смысле *произведение*. Более того, в соответствии с указанными там примерами произведение задолго до Бейеса обозначалось нынешним термином *product.* В Предложении 6 Бейес снова и притом неоднократно употребляет слово *ratio* в смысле *произведение*. О.Ш.

7. Сказанное быть может удастся несколько прояснить, имея в виду, что все, потерянное при появлении второго события, это лишь шанс восстановления в моих прежних обстоятельствах, который я должен был бы иметь, будь событие, от которого зависело мое ожидание, определено так, как указано в рассматриваемом предложении. Но этот шанс всегда настолько же *против*, как *за* меня. Если первое событие имеет место, он *против* меня и равен шансу ненаступления второго. Если же первое событие не происходит, он *за* меня и равен тому же. Потеря этого шанса поэтому не может быть ущербом. Р.П.

8. То, что м-р Бейес доказал в этом и в предыдущем предложениях, равносильно ответу на следующий вопрос. Какова вероятность, что определенное событие, когда оно происходит, будет сопровождаться другим, которое следует определить в то же время? В этом случае, поскольку одно событие дано, его ожидание ничего не сто́ит, и, следовательно, значение ожидания, зависящего от появления обоих событий, должно совпадать с его значением, зависящим от наступления одного из них. Иными словами, вероятность, что, когда одно из двух событий имеет место, другое тоже наступит, совпадает с вероятностью этого другого. Обозначим последнюю вероятность через x, и, если b/N вероятность данного события, а p/N – вероятность обоих, потому что $p/N = (b/N)x$, то $x = p/N$ равен вероятности, упомянутой в этих предложениях. Р.П.

9. Ниже, в §4, будет доказано по методу упомянутому здесь, что AiB, сжатое в отношении E к 1, будет относиться к CA как 1 к $(n + 1)$. Отсюда очевидно следует, что перед этим сжатием AiB должно было относиться к CA как 1 к $(n + 1)$. Последнее отношение постоянно при заданном n вне зависимости от p. Р.П.

10. Бейес очевидно сослался на сочинение Ньютона *Tractatus de Quadratura curvarum* (1711, английский перевод 1745 г.). О.Ш.

Совершенно очевидно и без обращения к Сэру Исааку Ньютону, что, поскольку флюксия [производная] площади ACf равна

$$y\dot{x} = x^p\dot{x} - qx^{p+1}\dot{x} + [q(q-1)/2]x^{p+2}\dot{x} \text{ etc},$$

флюента [функция] или сама площадь равна (2), см. ниже. Р.П.

11. Флюксия первого ряда (4) равна

$$x^p r^q\dot{x} + \frac{qx^{p+1}r^{q-1}(\dot{r}+\dot{x})}{p+1} + \frac{q(q-1)\,x^{p+2}r^{q-2}(\dot{r}+\dot{x})}{(p+1)(p+2)} +$$

$$\frac{q(q-1)(q-2)x^{p+3}r^{q-3}(\dot{r}+\dot{x})}{(p+1)(p+2)\ (p+3)} \text{ etc}$$

и, подставляя $-\dot{x}$ вместо $\dot{r}$, получаем, поскольку все члены после первого уничтожают друг друга,

$$x^p r^q \dot{x} = x^p (1-x)^q \dot{x} = x^p \dot{x}\{1 - qx + [q(q-1)/2]x^2 - \text{etc.}\} =$$

$$x^p \dot{x} - qx^{p+1}\dot{x} + [q(q-1)/2]\,\dot{x} - \text{etc.},$$

т.е. равно флюксии (3). Ряды поэтому совпадают. Р.П.

12. Прайс исправил это выражение, см. Прим. 30. *Редактор перепечатки мемуара.*

13. В рукописи м-ра Бейеса в знаменателях этих дробей нет последних членов, что было, очевидно, вызвано небольшой оплошностью при выводе этого правила, и у меня имеются основания полагать, что сам Бейес ее обнаружил. Я осмелился исправить его рукопись и выписал правило в том виде, в котором оно по моему убеждению должно быть представлено. Р.П.

14. Весьма небольшое число членов ряда обычно передадут этот гиперболический логарифм с достаточной степенью точности. Подобные ряды были указаны м-ром Муавром, м-ром Симпсоном и другими выдающимися математиками в выражениях для суммы логарифмов чисел 1, 2, 3, 4, 5 и до x и они установили, что эта сумма равна

$$(1/2)\lg c + [x + (1/2)]\lg x - x + (1/12x) - (1/360x^3) + (1/1260x^5) - \text{etc},$$

где c – длина окружности круга единичного радиуса. Но м-р Бейес, в предыдущем мемуаре в этом же томе [*Philosophical Transactions*, vol. 53, 1764] доказал, что, хотя упомянутое выражение очень близко приближается к этой сумме, если только учитывать надлежащее число ее первых членов, весь ряд вовсе не может выражать никакого количества, потому что при любом x всегда окажется такой отрезок ряда, где он начнет расходиться. Представляется, что замечание Бейеса, хотя оно не влияет существенно на использование этого ряда, весьма заслуживает внимания математиков. H-G-

15. Дальнейшее пояснение плохо понятно и опущено нами. Проще заметить, что коэффициенты при C и B в выражении для D равны 35 и 21, при C, D и B в выражении для E – 126, 84 и 36 и т.д. О.Ш.

Я вывел этот метод вычисления указанных коэффициентов, исходя из доказательства третьей леммы в конце трактата м-ра Симпсона (Simpson 1740). Р.П.

16. Второй и третий члены в знаменателях первых дробей, $h\sqrt{n}$ и $h/\sqrt{n}$, должны быть удвоены (Wishart 1927, p. 10). О.Ш.

17. Иначе,

$$\int_{1/2}^{1} x\,dx \div \int_{0}^{1} x\,dx = 3/4.\ \text{О.Ш.}$$

Я полагаю, что нет оснований специально отмечать, что в этом предмете единица всегда означает достоверность, а половина – равенство шансов. Р.П.

18. Пример Прайса небрежен. Откуда известно, что тело или кость имеют бесконечное число граней и что выпадение каждой имеет равную вероятность? О.Ш.

19. Здесь и ниже мы заменили выписанные Прайсом нули десятью в соответствующих степенях. О.Ш.

20. Обозначим

$$\alpha = \frac{6\cdot 10^5}{6\,(10^5+1)}\,,\ \beta = \frac{3\cdot 10^6}{3\,(10^6+1)}\,,$$

тогда, в согласии с Прайсом, $10^6(\beta - \alpha) = 0.527$. Он затем выбрал другие границы, $9\cdot 10^5$ и $1.9\cdot 10^6$ и частное этих чисел оказалось равным 0.4737, т.е. почему-то равным 1 – 0.527. О.Ш.

21. Здесь и в нескольких случаях ниже сумма шансов чуть отличается от единицы. О.Ш.

22. Думается, что ни один внимательный читатель не встретит здесь никаких затруднений. Мы только говорим здесь, что, если интервал между нулем и достоверностью разделить на сто равных шансов, 44 из них окажутся за то, что пропорция пустых билетов к выигрышным меньше 9:1, 31 за то, что она больше 11:1 и 25 за какую-то пропорцию между 9:1 и 11:1. Ясно, что, хотя одно из этих предположений должно быть истинным, каждое из них маловероятно, потому что имеет больше шансов против, чем за себя. Р.П.

23. См. De Moivre (1756, p. 250). Р.П.

24. Позднее я нашел способ значительно улучшить аппроксимации во втором и третьем правилах, доказав, что выражение (8) в большинстве случаев приближается к требуемому истинному значению настолько, насколько можно разумно желать, но всегда остается лишь несколько меньшим. Представляется, что это необходимо здесь указать мимоходом, хотя доказательство и не может быть дано. Р.П.

Доказательство второго правила из Очерка решения задачи из учения о шансах, опубликованного в томе 53 *Philosophical Transactions*.

Представлено Преподобным м-ром Ричардом Прайсом в письме Джону Кантону, магистру искусств, члену Королевского общества

Bayes T. (1765), A demonstration of the second rule in the essay towards the solution of a problem in the doctrine of chances. *Phil. Trans. Roy. Soc*., vol. 54, pp. 296 – 325.

26 ноября 1764 г., прочитано 6 декабря 1764 г.

Дорогой Сэр, Я посылаю Вам следующее *Дополнение к Очерку решения задачи из учения о шансах*, надеясь, что Вы не сочтете неуместным его представление Королевскому обществу. Я не должен был бы опять беспокоить Вас таким образом, не пойми я, что необходимы некоторые добавления к моим прежним запискам, чтобы пояснить в них некоторые места и особенно намек, содержащийся в подстрочном примечании в конце [моего] Приложения [к мемуару Бейеса].

Вначале я представил вывод второго правила м-ра Бейеса в основном в его собственных словах, а затем добавил так кратко, как только было можно, доказательство нескольких положений, которые, как представляется, существенно улучшают решение задачи и разъясняют суть кривой, квадратура которой обеспечивает это решение.

Быть может нет оснований для особого желания приступить к дальнейшим улучшениям и тем не менее мне было бы очень приятно увидеть еще более простое и близкое приближение к значениям [сумм] обоих рядов в Правиле 1, но это я должен оставить для попыток более умелых лиц, предпочитая теперь совершенно покинуть эту тему.

Решение исследуемой задачи в тех записках, которые я послал Вам, было, как я думаю, до сих пор *дезидератом* [недостающим и желательным], имеющим некоторое значение для философии. С тех пор наш покойный достойный друг в громадной степени помог нам с этим [решением] своими дарованиями и мастерством и мы поэтому обеспечены необходимым путеводителем для определения сути и численного выражения неизвестных причин по их следствиям и действенным предохранителем от серьезной опасности, которой подвержены философы. Я имею в виду опасность делать заключения по неполной индукции и относиться к справедливым заключениям с бо́льшим убеждением, чем это оправдывается количеством опытов.

Остаюсь в понимании значения Вашей дружбы сердечно Ваш

Ричард Прайс

1. Пусть [Рис. 3] кривая *ADH* разделена на две части ординатой *Dh* так, что $Ah/Hh = p/q$. Полагая, далее,

$$a = p/n \text{ и } b = q/n, \tag{13}$$

получим отношение площадей ADh/HO равным

$$\frac{a^{p+1}b^q}{p+1}[1+\frac{q\,p}{(p+2)\,q}+\frac{q\,(q-1)\,p^2}{(p+2)\,(p+3)q^2}+\frac{q\,(q-1)\,(q-2)\,p^3}{(p+2)\,(p+3)\,(p+4)\,q^3}+\ldots]$$

ибо ряд (4) в Предложении 10, §2 *Очерка*, который выражает отношение ACf/HO, переходит в указанный ряд при

$$x = a = p/n \text{ и } b = r = q/n,$$

т. е. когда *Cf* сдвинуто до совпадения с *Dh* и *ACf* переходит в *ADh*. Аналогично, из §3 *Очерка* следует, что отношение HDh/HO равно

$$\frac{a^p b^{q+1}}{q+1}[1+\frac{p\,q}{(q+2)\,p}+\frac{p\,(p-1)\,q^2}{(q+2)\,(q+3)\,p^2}+\ldots].$$

Отсюда следует, что отношение $(ADh - HDh)/HO$ равно $a^p b^q/n$, умноженному на разность между рядами

$$\frac{p}{p+1}+\frac{q}{p+1}\,\frac{p^2}{pq+2q}+\frac{q\,(q-1)\,p^3}{(p+1)\,(p+2)\,(pq^2+3q^2)}+\ldots$$

и

$$\frac{q}{q+1} + \frac{pq^2}{(q+1)(pq+2p)} + \frac{p(p-1)q^3}{(q+1)(q+2)(p^2q+3p^2)} + \ldots,$$

причем первый ряд следует вычесть из второго если $HDh > ADh$ и наоборот в противном случае.

2. Отношение любого члена первого из двух приведенных выше рядов к тому, который следует вторым после соответствующего члена во втором, равно

$$\frac{pq+p}{pq}\,\frac{pq+2p}{pq}\,\frac{pq}{qp+q}\,\frac{pq+3p}{pq-q}\,\frac{pq}{pq+2q}\,.$$

$$\frac{pq+4p}{pq-2q}\,\frac{pq-p}{pq+3q}\,\frac{pq+5p}{pq-3q}\,\frac{pq-2p}{pq+4q}\,\frac{pq+6p}{pq-4q}\ldots,$$

где число членов равно $(2k + 4)$, и k – количество единиц в числе, выражающем расстояние от члена первого ряда к его первому члену. Понятно, что это отношение, если $q > p$, должно быть больше чем отношение равенства. Следовательно, если вычесть из второго ряда два первых члена, которые в сумме меньше двух, остаток окажется меньше первого ряда и, следовательно, вычитание первого ряда из второго не может привести к остатку, равному двум. Стало быть, в этом случае, т. е. когда $q > p$, в соответствии с предыдущим параграфом отношение $(HDh - Adh)/HO$ не может быть столь велико как $2\,a^p b^q/n$.

3. Пусть при том же делении кривой ADH на две части, ADh и HDh, ординаты Cf и Ft помещены с каждой стороны и на равном расстоянии от Dh, а z будет отношением hf или ht к AH. Тогда, если y, x и r соответственно являются отношениями Cf, Af и Hf к AH, то по сути кривой $y = x^p r^q$. Но поскольку отношение $Ah/AH = a$ и отношение $hf/AH = z$, отношение $(Ah - hf) = Af$ к AH равно $(a - z)$. Следовательно,

$a - z = x$ и аналогично $b + z = r$.

Но $y = x^p r^q$, где $y = Cf/AH$. Поэтому отношение

$$Cf/AH = (a - z)^p (b + z)^q \tag{14}$$

и аналогично отношение

$$Ft/AH = (a + z)^p (b - z)^q \tag{15}$$

и, следовательно, $Cf/Ft = (14)/(15)$.

4. Если $q > p$, то(15) > (14) и отношение между ними возрастает при возрастании z. Ввиду формул (13) гиперболический логарифм этого отношения, взятый в обычном порядке, при замене p и q на na и nb [см. формулы (13)], окажется равным $2n$, умноженным на ряд

$$\frac{b^2-a^2}{3b^2a^2}z^3 + \frac{b^4-a^4}{5b^4a^4}z^5 + \frac{b^6-a^6}{7b^6a^6}z^7 + \ldots$$

При $q > p$ и, следовательно, при $b > a$, все члены этого логарифма положительны и возрастают при возрастании z. Следовательно, он является логарифмом отношения, большего чем отношение равенства и возрастает при возрастании z.

5. По §3 Ft/Cf = (15)/(14) и по §4, если $q > p$, (15) > (14) и отношение между ними возрастает при возрастании z. Поэтому, при указанном предположении, также и $Ft > Cf$ и отношение между ними возрастает при возрастании z или ht и hf. Следовательно, это будет иметь место и для площадей, описанных [ограниченных] ими при возрастании их равных друг другу абсцисс ht и hf. Поэтому, при $q > p$, $DhtF > DhfC$ и отношение между ними возрастает при возрастании $hf = ht$.

6. Поскольку $Ah/Hh = p/q$, $Hh > Ah$ если $q > p$. Поэтому, если приравнивать hl к Ah, часть фигуры HDh, которая имеет своим основанием hl, будет, по предыдущему параграфу, больше чем ADh и отношение этой части HDh к ADh будет больше $DhtF/DhfC$. Следовательно, тем более (при $q > p$) вся фигура

$HDh > ADh$ и $HDh/ADh > DhtF/DhfC$.

7. При $q > p$

$$[1 - \frac{nz}{p}]^{p} [1 + \frac{nz}{q}]^{q} < [1 - \frac{n^2z^2}{pq}]^{n/2} < [1 - \frac{nz}{q}]^{q} [1 + \frac{nz}{p}]^{p}$$

или (16) < (17) < (18) ибо флюксия (17) равна

$$-\frac{n^3zdz}{pq}[1 - \frac{n^2z^2}{pq}]^{[(n/2)-1]},$$

а флюксия (16), поскольку $p + q = n$, равна

$$-\frac{n^3zdz}{pq}[1 - \frac{nz}{p}]^{p-1} [1 + \frac{nz}{q}]^{q-1}.$$

Поэтому (16) относится к (17) как флюксия (17), умноженная на

$$[1 - \frac{n^2z^2}{pq}],$$

к флюксии (16), умноженной на

$$[1 - \frac{nz}{p}] [1 + \frac{nz}{q}] = 1 - \frac{nz}{p} + \frac{nz}{q} - \frac{n^2z^2}{pq}.$$

По аналогии, потому что $q > p$, ясно, что (16) изменяется относительно быстрее чем (17). И, поскольку их флюксии, как найдено выше, отрицательны, обе они убывают при возрастании z. Следовательно, если они когда-либо были равны, при возрастании z (17) должно превысить (16). Но при $z = 0$ они оба равны 1.

Остальная часть этого параграфа представится аналогично. И при $q > p$ ввиду формул (13) ясно, что

(14) < $a^p b^q$, умноженное на (17), < (15).

8. Предположим теперь, что кривая *RQW*, пересекающаяся с продолженными отрезками *Dh*, *Ft* и *ht* в *R*, *Q* и *W*, построена так, что *Ft*/*Cf* = (15)/(14), см. §3, и

Ft/Qt = (15)/[$a^p b^q$ умноженное на (17)],

где бы ни находились точки *t* и *f*, равноотстоящие от *h*. И по предыдущему параграфу ясно, что всегда *Cf* < *Qt* < *Ft*. И, следовательно, то же должно иметь место по отношению к площадям, описываемым [ограниченным] при их движении при возрастании их равных друг другу абсцисс. Иными словами, *DhfC* < *RhtQ* < *DhtF*.

9. [Имея в виду отношение *Ft* к *Qt, см.* §8] и, поскольку, по §3, (15) выражает отношение *Ft/AH*, мы получим, что отношение *Qt/AH* должно равняться [знаменателю в отношении *Ft/Qt*, см. §8], и, как было неизменно предположено, $z = ht/AH$. Поэтому, при квадрировании кривой [криволинейной трапеции] *RhtQ* окажется, что отношение *RhtQ/HO* равно

$$a^p b^q [z - \frac{n^3 z^3}{2\cdot 3pq} + \frac{n-2}{4}\,\frac{n^5 z^5}{2\cdot 5p^2q^2} - \frac{n-2}{4}\,\frac{n-4}{6}\,\frac{n^7 z^7}{2\cdot 7p^3q^3} + \dots],$$

что, поскольку

$$m^2 = n^3/2pq, \qquad (19)$$

равно

$$a^p b^q \frac{\sqrt{2pq}}{n\sqrt{n}} \qquad (20)$$

умноженному на ряд (7) из *Очерка*.

При $n^2 z^2/pq = 1$ и, следовательно, при исчезновении ординаты *Qt*, последний ряд переходит в

$$B - \frac{B^3}{3} + \frac{B^2-1}{2B^2}\,\frac{B^5}{5} - \frac{B^2-1}{2B^2}\,\frac{B^2-2}{3B^2}\,\frac{B^7}{7} + \dots, \qquad (21)$$

где $B^2 = n/2$.

10. Если $B^2 = n/2$, отношение всей фигуры *RQWh* к *HO* равно (20), умноженному на (21). Теперь, по Предложению 10, §4 *Очерка*, отношение

$$ACFH/HO = [1/(n+1)](1/E), \qquad (22)$$

где E – коэффициент того члена разложения бинома $(a + b)^n$, который содержит $a^p b^q$. Поэтому

$$RQWh/ACF = (n+1)\,\frac{\sqrt{2pq}}{n\sqrt{n}}, \qquad (23)$$

умноженному на $Ea^p b^q$ и на (21).

Обозначим коэффициент среднего члена разложения того же бинома через G и если $p = q = n/2$, $E = G$, $a = 1/2 = b$ и площадь *RQWh* будет равна (1/2)*ACFH*, ибо тогда $Qt = Ft = Cf$ и, следовательно, равны площади *RQWh, HDh* и *ADh.* Поэтому ряд (21) равен

$$\frac{\sqrt{2n}}{n+1}\,\frac{2^{n-1}}{G}.$$

Но так как $B^2 = n/2$, указанный ряд не изменяется каковы бы ни были p и q, лишь бы их сумма n оставалась без изменения. И поэтому во всех случаях отношение *RQWh/ACFH* равно

$$\frac{\sqrt{pq}}{n}\,\frac{Ea^p b^q}{G}\,2^n. \qquad (24)$$

11. Исходя из формулы (22)[25] и учитывая, что по §9 $RhtQ/HO$ = (20), умноженному на ряд (7) *Очерка*, получим, что $RhtQ/ACFH$ = (23), умноженному на (21). Аналогично, по §10, $RQWh/ACFH$ = (24) и поэтому

$$RhtQ/RQWh = \frac{n+1}{\sqrt{n}}\,\frac{\sqrt{2}}{2^n}\,G, \text{ умноженному на ряд (7) из } \textit{Очерка}. \qquad (25)$$

12. По §2 при $q > p$ $(HDh - Adh)/HO < 2a^p b^q/n$. И по Предложению 10 §4 *Очерка* отношение $ACFH = (HDh + ADh)$ к *HO* равно (22). Поэтому сумма этих двух отношений, или отношение

$$2HDh/HO < (22) + 2a^p b^q/n, \qquad (26)$$

а разность между ними

$$2ADh/HO > (22) - \frac{2a^p b^q}{n}. \qquad (27)$$

Следовательно,

$$2HDh/2ADh = HDh/ADh < (26)/(27) =$$

$$[1 + 2Ea^pb^q + \frac{2Ea^pb^q}{n}] \div [1 - 2Ea^pb^q - \frac{2Ea^pb^q}{n}]$$

[отношению (28)/(29)]. Но по §6 при $q > p$ *HDh*/*ADh* > *DhtF*/*DhfC*. Поэтому при указанном условии тем более отношение *DhtF*/*DhfC* будет меньше чем (28) к (29). И, поскольку по §8 *RhtQ* есть среднее между *DhtF* и *DhfC*, отношение *DhtF*/*RhtQ* < (28)/(29), а *DhfC*/*RhtQ* > (29)/(28).

Правило 2. Если про событие ничего не известно кроме того, что оно имело место p раз и не наступило q раз в $(p + q)$ или n испытаниях и если я поэтому предполагаю, что вероятность его появления в единичном испытании лежит где-то между (p/n) и $[(p/n) + z]$; если E – коэффициент члена, содержащего a^pb^q в разложении $(a + b)^n$ и $\sum$ равно (6), умноженному на ряд (7), то, с учетом формулы (19) для m^2 и формул (13), получим, что шанс моей правоты больше и меньше чем соответственно $\sum$ и $\sum$, умноженное на отношение (28)/(29).

Ибо, по §11, отношение *RhtQ*/*ACFH*= $\sum$. Но по §8 *DhtF* > *RhtQ*, а по § 12 отношение *DhtF*/*RhtQ* < (28)/(29). Но, как следует из Предложения 10 *Очерка*, шанс, что вероятность события находится между (p/n) и $[(p/n) + z]$, т. е. между отношениями *Ah*/*AH* и *At*/*AH*, равно отношению *DhtF*/*ACFH*. Следовательно. шанс правоты моего предположения больше чем $\sum$ и меньше чем $\sum$, умноженное на отношение (28)/(29).

Во-вторых, аналогично, при тех же предпосылках, если я предположу, что вероятность события находится между (p/n) и $[(p/n) - z]$, шанс моей правоты меньше $\sum$ и больше чем $\sum$, умноженное на отношение (29)/(28). Это аналогично предыдущему случаю, потому что *DhfC* < *RhtQ*, но отношение между ними больше чем отношение (29)/(28).

В третьих, если $p > q$, а остальные условия сохраняются, и я предположу, что вероятность события находится между (p/n) и $[(p/n) + z]$, шанс моей правоты меньше $\sum$ и больше чем $\sum$, умноженное на отношение (29)/(28). Но если я предположу, что вероятность находится между (p/n) и $[(p/n) - z]$, шанс моей правоты больше $\sum$ и меньше чем $\sum$, умноженное на отношение (28)/(29). А если $p = q$, какое бы из двух предположений я не принял, мой шанс будет в точности равен $\sum$. Это может быть доказано либо тем же образом, что и предыдущие случаи когда было $q > p$, либо рассматривая наступление и ненаступление события как равносильное ненаступлению и наступлению ему противоположного.

В четвертых, при прочих равных условиях, и будет ли q больше или меньше чем p , и я предположу, что вероятность события находится между $[(p/n) + z]$ и $[(p/n) - z]$, мой шанс окажется больше чем сумма ряда (8) *Очерка* и меньше чем сумма (9). Это является очевидным следствием из уже рассмотренных случаев. И здесь, при $p = q$, мой шанс в точности равен $2\sum$.

До сих пор я воспроизводил записи м-ра Бейеса. Если исходить из Приложения к *Очерку*, оказывается, что доказанное здесь правило, хотя и весьма полезно, не доставляет требуемый шанс в достаточно узких границах. Необходимо поэтому подыскать возможность их сужения и этого, я думаю, мы достигнем при помощи следующих выводов, которые я для большей отчетливости предлагаю в виде продолжения предыдущих параграфов.

13. Отношение флюксии (17) к флюксии (18) равно

$$\frac{[1-(n^2z^2/pq)]^{[(n/2)-1]}}{[1+nz/p]^{p-1}[1-nz/q]^{q-1}}, \tag{30}$$

а отношение флюксии (16) к флюксии (17) равно

$$\frac{[1-nz/p]^{p-1}[1+nz/q]^{q-1}}{[1-n^2z^2/pq]^{[(n/2]-1]}}, \tag{31}$$

что немедленно следует из §7.

14. В то время как z возрастает от нуля до того, как n^2z^2/pq станет равным 1, эти два отношения вначале превышают отношение равенства и возрастают вместе с z пока не достигнут наибольшего значения. Затем они убывают пока не станут равными отношению равенства, а далее окажутся меньше этого. Это доказывается по их гиперболическим логарифмам, равным соответственно рядам

$$[\frac{q-1}{q} - \frac{p-1}{p}]\,nz + [\frac{q-1}{q^2} + \frac{p-1}{p^2} - \frac{n-2}{pq}]\frac{n^2z^2}{2} +$$

$$[\frac{q-1}{q^3} - \frac{p-1}{p^3}]\frac{n^3z^3}{3} + [\frac{q-1}{q^4} + \frac{p-1}{p^4} - \frac{n-2}{p^2q^2}]\frac{n^4z^4}{4} +$$

$$[\frac{q-1}{q^5} - \frac{p-1}{p^5}]\frac{n^5z^5}{5} + [\frac{q-1}{q^6} + \frac{p-1}{p^6} - \frac{n-2}{p^3q^3}]\frac{n^6z^6}{6} + \ldots$$

[второй ряд отличается от первого знаками второго, четвертого, ... членов].

Из рассмотрения этих рядов представится (при неизменно предположенном $q > p$), что пока z невелико, значение каждого из них положительно и возрастает с z пока не достигнет наибольшего значения, после чего убывает до нуля, а затем становится отрицательным, что и доказывает предложение этого параграфа.

15. Вначале первое из двух отношений §13, при $q > p$, при возрастании z от нуля остается меньше второго и становится равным ему лишь через некоторое время после того как оба отношения примут наибольшее возможное значение.

После рассмотрения обоих рядов в предыдущем параграфе оказывается, что первый член первого ряда всегда положителен, второй отрицателен, третий тоже, а затем члены по очереди положительны и отрицательны. С другой стороны, окажется, что во втором ряду первые два члена всегда положительны, а все последующие отрицательны. Но поскольку при малом z ряды очень быстро сходятся, второй член первого ряда, будучи отрицателен, и тот же член второго ряда будучи положителен, больше влияют на то, чтобы первый ряд стал меньше второго, чем могло бы быть компенсировано членами, в одном из них попеременно отрицательными и положительными, и членами в другом, которые все отрицательны.

И кроме того из рассмотрения этих рядов выявится, что первый из них должен быть продолжен менее чем второй до тех пор пока z не станет столь большим, что четвертый член окажется равным второму, так что ряды станут почти равными друг другу. И далее, когда z продолжает возрастать, значения обоих рядов непрерывно убывают, но второй теперь убывает быстрее. – так же, как раньше он возрастал быстрее, – и первым окажется равным нулю. После этого исчезнет и другой ряд, а затем оба будут оставаться отрицательными. Отсюда легко вывести предложение этого параграфа.

16. Что было показано для отношения флюксии (17) к флюксии (18) при его сравнении с отношением флюксии (16) к флюксиии (17), верно также и для отношения флюксии [$a^p b^q$, умноженной на (17)], т. е. *Qt* на Рис. 1, к флюксии (15), или *Ft*, при ее сравнении с отношением флюксии (14) к флюксии [$a^p b^q$, умноженной на (17)], т. е. *Qt*. Поэтому оказывается, что если мы представим себе, что *Ft, Qt* и *Cf* (см. Рис. 1) движутся с одной и той же и постоянной скоростью от *Dh* и *Rh* вдоль *AH*, чтобы образовать площади *HDh, RWh* и *ADh*, то *Cf* вначале будет не только убывать быстрее чем *Qt*, а *Qt* быстрее чем *Ft*, но отношение скорости убывания *Cf* к скорости убывания *Qt* будет больше отношения убывания *Qt* к убыванию *Ft*. Кроме того, окажется, что через некоторое время вначале *Cf* и *Qt*, а затем *Qt* и *Ft* начнут убывать в равной мере, а после этого *Qt* будет убывать быстрее чем *Cf*, а *Ft* быстрее чем *Qt*.

17. Каждая из кривых *DFH, RQW* и *DCA* имеет точку перегиба и значение z, т. е. общих абсцисс в ней, равно

$$\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n^3 - n^2}}. \qquad (32)$$

Это может быть найдено обычным путем, приравниванием вторых флюксий от ординат нулю. В одном единственном случае , когда либо p, либо q равно единице, одна из этих точек исчезает или совпадает с *A* или *H*.

18. При $q > p$ отношение флюксии *Qt* к флюксии *Ft* в точках перегиба максимально. И то же справедливо об отношении флюксии *Cf* к флюксии *Qt*, что может быть выяснено если приравнять нулю флюксии логарифмов от этих отношений, т. е. от (30) и (31). Это приведет к значению z, равному (32), что совпадает с его значением в точках перегиба.

19. В этих точках отношение флюксии *Cf* к флюксии *Qt* максимально по сравнению с отношением флюксии *Qt* к флюксии *Ft*. Это доказывается определением значения z, при котором флюксия дроби от деления первого отношения на второе, т.е. отношение (31)/(30), равно нулю, что дает (32). Причина этого состоит, следовательно, в природе кривой, которая, по мере движения ординат, вначале оставляет $Ft - Qt < Qt - Cf$ и действует с наибольшей силой в точках перегиба.

20. Наибольшая часть площади *RQWh* расположена между *Rh* и ординатой в точке перегиба. По §11 отношение *RhtQ/RQWh* равно (25). Подставим сюда (32) вместо z и $2^n/H\sqrt{nK}$ вместо *G* (*K* – отношение дуги прямого угла к радиусу)[26]. *H* – отношение, чей гиперболический логарифм равен

$$\frac{3}{12n} - \frac{15}{360n^3} + \frac{63}{1260n^5} + \ldots$$ [27]

и отношение *RhtQ/RQWh* в точке перегиба будет

$$\frac{n+1}{\sqrt{n\,(n-1)}}\ \frac{0.797884}{H}\ [1 - \frac{n}{2\cdot 3\,(n-1)} + \frac{n\,(n-2)}{2\cdot 5\cdot 4\,(n-1)^2} -$$

$$\frac{n\,(n-2)\,(n-4)}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 8\,(n-1)^3} + \frac{n\,(n-2)\,(n-4)\,(n-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 9\cdot 16\,(n-1)^4} - \ldots].$$

Пока n невелико, значение этого выражения останется значительно большим чем 0.6822. При возрастании n оно будет приближаться к этому числу и когда n велико, его можно будет принять в точности равным 0.6822. Так, при $n = 6$ это выражение равно 0.804, при $n = 110$ оно равно 0.6903. Если мы хотим определить отношение *RhtQ/RQWh* в точке, в которой *Cf* начинает убывать не быстрее относительно *Qt*, чем *Qt* относительно *Ft*, т. е. когда *Qt* – *Cf* максимально по сравнению с *Ft* – *Qt*, оно может быть найдено (приравниванием четвертого члена ряда в §14 второму члену и определением значения z) равным примерно 0.8426 когда n, p и q велики; в других случаях оно будет больше.

Следствие. Отсюда легко сообразить, что аналогично бóльшая часть площади *ADH* расположена между двумя ординатами в точках перегиба[28].

21. *RhtQ* больше чем среднее арифметическое из *DhtF* и *DhfC*. Это вытекает из второй части §19, ибо то, что там доказано для ординат, должно соблюдаться относительно соответствующих площадей, образованных ими. И хотя вне точек, в которых отношение убывания *Qt* к убыванию *Ft* становится равным отношению убывания *Qt* к убыванию *Cf*, *Ft* – *Qt* начинает становиться бóльшим чем раньше сравнительно с *Qt* – *Cf*. Но, поскольку из предыдущего параграфа следует, что более 5/6 площадей *RQWh* и *ACFH* образуются до того, как ординаты доходят до этих точек, и поскольку также за этими точками, до того как они становятся отрицательными и некоторое время после этого, указанные отношения лишь невелики, – то результат, произведенный раннее и приведший к тому, что *DhtF* – *RhtQ* оказался всегда менее чем *RhtQ* – *DhfC*, будет таким, который не может быть компенсирован впоследствии.

Дополнительное доказательство этого появится, если принять во внимание, что даже когда *RhtQ* возрастет до *RQWh*, оно [все-таки остается] немного менее среднего арифметического из *ADh* и *HDh*. Ибо из §§11 и 20 можно заключить, что отношение всей площади *RQWh* к этому среднему, т.е. к *ACFH*/2, равно количеству *hH*, которое всегда близко к отношению равенства, а когда p и q в какой-то мере велики, оно очень близко к этому отношению. Например, при $n = 110$, $q = 100$ и $p = 10$, оно равно 0.9938.

22. Отношение *DhtF/RhtQ* < (28)/1 [т. е. меньше, чем (28)] ибо по §12 отношение *DhtF/DhfC* < (28)/(29). Но по предыдущему параграфу *RhtQ* больше среднего арифметического между *DhtF* и *DhfC*, а 1 в точности среднее арифметическое между (28) и (29). Поэтому утверждение данного параграфа ясно.

23. Отношение *DhtF/ACFH* больше чем ∑ и меньше чем ∑, умноженное на (28). Ибо поскольку *DhtF* > *RhtQ,* его отношение к *ACFH* дожно быть больше чем *RhtQ*/*ACFH* или больше чем ∑. Кроме того, поскольку отношение *RhtQ*/*ACFH*= ∑, а отношение *DhtF/RhtQ* < (28)/1, отношение, составленное из отношений *RhtQ*/*ACFH* и *DhtF/RhtQ*, т.е. отношение *DhtF/ACFH*, должно быть меньше чем ∑, умноженное на (28).

24. Отношение (*DhtF* + *DhfC*)/*ACFH*, т.е. шанс правоты предположения, что вероятность совершенно неизвестного события, которое произошло p раз и не наступило q раз в $(p + q)$ или n испытаниях, находится где-то между $[(p/n) + z]$ и $[(p/n) - z]$, больше чем сумма ряда (8) из *Очерка* и меньше чем 2∑. Первая часть этого утверждения уже была доказана в §12, а вторая часть очевидна по §21 так как *RhtQ* больше чем среднее арифметическое между *DhtF* и *DhfC*: 2 *RhtQ* > (*DhtF* + *DhfC*). И, следовательно, отношение

2*RhtQ*/*ACFH* > (*DhtF* + *DhfC*)/*ACFH*.

Легко видеть, что этот параграф[29] существенно исправляет правило, данное в §12. Но последующие параграфы покажут, что мы можем определить еще более узкие границы, внутри которых должен находиться требуемый шанс.

25. Если c и d обозначают любые две [правильные] дроби, каждый раз когда флюксия *cFt* больше флюксии *dCf* (см. Рис. 1), (*cFt* + *dCf*) > *Qt.* Ибо аналогично §6 окажется, что (*cFt* + *dCf*)/*Qt* равно отношению флюксии *cFt,* умноженной на

$$\left(1 + \frac{nz}{p}\right)\left(1 - \frac{nz}{q}\right) \qquad (33)$$

плюс флюксии *dCf*, умноженной на

$$\left(1 - \frac{nz}{p}\right)\left(1 + \frac{nz}{q}\right) \qquad (34)$$

к флюксии *Qt*, умноженной на

$$1 - \frac{n^2z^2}{pq}. \qquad (35)$$

Но поскольку (35) есть среднее арифметическое между (33) и (34), ясно, что будь флюксия *cFt* равна флюксии *dCf*, (*cFt* + *dCf*) убывало бы относительно своей собственной величины с той же быстротой как *Qt.* Следовательно, будучи вначале равными, они постоянно остаются равными. Но флюксия *cFt* по предположению больше флюксии *dCf* и, поскольку $q > p$, (33) > (34), откуда следует, что флюксия *cFt*, умноженная на (33) и сложенная с флюксией *dCf*, умноженной на (34), больше, чем эти две флюксии умноженные на (35) и больше, чем Qt, умноженное на (35). Следовательно, $(cFt + dCf) > Qt$.

26. Если составить три продолжающихся средних арифметических между Cf и Ft,

$$\frac{3\,Cf+Ft}{4},\ \frac{Cf+Ft}{2},\ \frac{3\,Ft+Cf}{4},$$

и если $p > 1$, Qt окажется больше второго и меньше третьего. Что Qt больше второго было уже доказано, а что оно меньше третьего окажется немедленным следствием предыдущего параграфа если удастся доказать, что флюксия $3Ft/4$ больше флюксии $Cf/4$. Но это выявится следующим образом. По §§7 и 14 отношение флюксии Cf к флюксии Ft равно

$$\frac{[1-nz/p]^{p-1}\,[1+nz/q]^{q-1}}{[1+nz/p]^{p-1}\,[1-nz/q]^{q-1}}.$$

Гиперболический логарифм этого отношения равен

$$[\frac{1}{p}-\frac{1}{q}]\,2nz-[\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}]\frac{2n^3z^3}{3}-$$

$$[\frac{1}{p^4}-\frac{1}{p^5}-\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}]\frac{2n^5z^5}{5}+\ldots \qquad (36)$$

По §18 это отношение принимает наибольшее значение в точке перегиба, т.е. когда z равно (32). Подставим это значение z в ряд (36) и он примет вид

$$[\frac{1}{p}-\frac{1}{q}]\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n-1}}-[\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}]\frac{2p^{3/2}q^{3/2}}{3\,(n-1)^{3/2}}-\ldots$$

и потому выразит логарифм отношения когда оно является наибольшим и легко определит его в каждом случае. Ясно, что значение этого ряда максимально когда p принимает наименьшее значение сравнительно с q. Пусть $p = 2$ и q бесконечно. В этом случае значение ряда окажется 1.072 и число, соответствующее этому логарифму, не будет больше 2.92. Следовательно, наибольшее значение флюксии Cf не может быть втрое больше соответствующей флюксии Ft. Таким образом, флюксия $3Ft/4$ должна быть больше флюксии $Cf/4$.

Нетрудно усмотреть как видоизменить эти доказательства если $q < p$ и как в этом случае могут быть выведены аналогичные следствия. Те же следствия немедленно появятся при замене p на q и q на p, что не приведет ни к каким различиям в доказательствах.

Способом, указанным в этом параграфе, мы всегда можем установить определенные границы близости значения Qt и среднего арифметического из Ft и Cf. Эти границы становятся все уже и уже при возрастании p и q или когда их отношение приближается к отношению равенства пока наконец когда p и q становятся либо очень большими, либо равными друг другу и *Qt* совпадает с этим средним. Таким образом, если либо *p* либо *q* не менее 10, т.е. во всех случаях, когда возможно без больших трудностей точно вычислить требуемый шанс по первому правилу[30], *Qt* окажется больше четвертого и меньше пятого из семи средних арифметических между *Cf* и *Ft*.

27. Средние арифметические, упомянутые в предыдущем параграфе, могут быть представлены как ординаты, описывающие площади одновременно с *Qt*. И что было доказано относительно их, справедливо и для площадей, описанных ими сравнительно с *RhtQ*.

28. Если либо *p* либо *q* больше 1, истинный шанс, что вероятность неизвестного события, которое произошло *p* раз и не наступило *q* раз в ($p + q$) или *n* испытаниях, должен находиться где-то между $[(p/n) + z]$ и $[(p/n) - z]$ меньше 2∑ и больше чем ∑, умноженное на отношение

$$\frac{(29)}{1 + Ea^p b^q + Ea^p b^q / n}.$$

Если либо *p* либо *q* больше 10, этот шанс меньше 2∑ и больше ∑ + ∑, умноженное на дробь с тем же числителем и знаменателем, равным

$$1 + (1/2)Ea^p b^q + Ea^p b^q/2n.$$

Это легко доказать тем же способом, как в §§12, 23 и 24.

Чтобы стало ясно насколько доказанное здесь улучшает решение данной задачи, возьмем пятый пример, рассмотренный в Приложении к *Очерку* и выясним, каково основание полагать, что вероятность события, про которое ничего не известно кроме того, что оно произошло 100 раз и не наступило 1000 раз в 1100 испытаниях, находится между 10/11 + 1/110 и 10/11 – 1/110. Второе правило, приведенное в §12, указывает нам, что шанс[31] того, что вероятность должна находиться между 0.6512 (т.е. при соотношении 186:100 [0.6512:0.3488 = 1.87]) в пользу предположения и 0.7700 (т.е. при соотношении 334:100 [0.77:0.23 = 3.35]). Но из предыдущего параграфа следует, что искомый шанс в этом случае должен быть между 2∑ и ∑ + ∑, умноженным на дробь с тем же числителем и знаменателем, равным

$$1 + (1/10)Ea^p b^q + Ea^p b^q/10n$$

или между 0.6748 и 0.7057, т.е. между соотношениями 239:100 [0.7057:0.2943 = 2.40] и 207:100.

Во всех случаях когда *z* мало и также всегда, когда несоразмерность между *p* и *q* невелика, 2∑ оказывается почти точно равным требуемому истинному шансу. И у меня есть основания полагать, что даже во всех остальных случаях 2∑ выражает истинный шанс более близко чем в ныне определенных границах, но я не буду больше заниматься этим предметом и только добавлю, что значение 2∑ всегда может быть очень точно вычислено, притом без больших затруднений, ибо приближения к значению $Ea^p b^q$ и к ряду (7) из *Очерков*[32] достаточно точны во всех случаях когда их необходимо применять.

Примечания

25. Надеюсь, что мне простят несовершенство рисунка, на который я постоянно ссылаюсь. Отрезки *Rh* и *Dh* должны быть равны и ниже будет определено, что кривая *ACDFH* должна быть выпукла от *F* и *C* по отношению к *AH.* [Видимо, примечание Бейеса. Последующие примечания не могут принадлежать ему, поскольку они относятся к дополнительному тексту Прайса.]

26. Это во всех случаях является истинным значением *G*, но было бы слишком тягостно приводить здесь доказательство этого. Р.П.

27. См. Правило 2 в *Очерке*. Р.П.

28. Из этого параграфа можно вывести метод для немедленного отыскания без всякого труда разумного расположения вероятности неизвестного события, относительно которого произведено заданное число испытаний. Ибо когда ни *p*, ни *q* не очень малы, или хотя бы не менее 10, шансы всегда окажутся почти равными что вероятность события расположена между [(*p/n*) + (1/√2) умноженное на (32)] и [(*p/n*) – (1/√2) умноженное на (32)] или вне этих границ. Соотношение шансов будет 2:1, что она располагается между [(*p/n*) + (32)] и [(*p/n*) – (32)] и 5:1, что между [(*p/n*) + √2 умноженное на (32)] и [(*p/n*) – √2 умноженное на (32)]. Например, если *p* = 1000 и *q* = 100, шансы, что вероятность события лежит между 10/11 + 1/163 и 10/11 – 1/163 или вне этих границ, окажутся почти равными друг другу, соотношения шансов будут 2:1 и 5:1 что эти границы окажутся 10/11 + 1/115 (+ 1/81) и 10/11 – 1/115 (– 1/81) соответственно. Р.П.

29. Этот параграф остается в силе будет ли *p* больше или меньше чем *q*. Р.П.

30. Правило 1 следует применять при небольших *q* или *p*, см. *Очерк*. О.Ш.

31. В Приложении к *Очерку* этот шанс, как его определил м-р Бейес во втором правиле, приведен с ошибкой ввиду того. что он приравнял m^2 к n^3/pq вместо $n^3/2pq$ как это следует из §8 [см. фориулу (19)]. Р.П.

32. В выражении для этого последнего приближения допущена ошибка в наборе и ее следует исправить: знак четвертого члена должен быть минус, а не плюс. Р.П. [И все-таки там указан знак плюс.]

Библиография

Чебышев П.Л. (1879 – 1880, лекции), *Теория вероятностей.* М. – Л., 1936.

Шейнин О.Б. (Sheynin O.B.) (2003), On the history of the Bayes's theorem. *Math. Scientist*, vol. 28, pp. 37 – 42.

Bayes T. (1764), Letter … to J. Canton. *Phil. Trans. Roy. Soc*., vol. 53 for 1763, pp. 269 – 271.

--- (1908), Немецкий перевод его основного мемуара (без комментария Прайса). Лейпциг. Переводчик и комментатор H.E. Timerding.

Cornfield J. (1967), The Bayes theorem. *Rev. Inst. Stat. Intern*., t. 35, pp. 34 – 49.

Dale A.I. (2003), *Most Honourable Remembrance. The Life and Work of Thomas Bayes.* New York.

De Moivre A. (1756), *Doctrine of Chances*. New York, 1967. Предыдущие издания: 1718 и 1738.

Hald A. (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York.

Simpson T. (1740), *Nature and Laws of Chance*. London.
Wishart J. (1927), On the approximate quadrature of certain skew curves with an account of the researches of Bayes. *Biometrika*, vol. 19, pp. 1 – 38, 442.
Zabell S.L. (1989), The rule of succession. *Erkenntnis*, Bd. 31, pp. 283 – 321.

10. Иоганн Петер Зюссмильх

Зюссмильх (1707 – 1767) успешно занимался статистикой населения, политической арифметикой и языкознанием. За свои заслуги в последней упомянутой науке он был в 1745 г. избран в Берлинскую академию наук. Помимо основного сочинения (*Божественный порядок* ..., 1741), которое, несмотря на серьезные недостатки, положило начало демографии и даже моральной статистики, существенным был и другой его труд (1758), где он указал на необходимость изучать зависимость смертности от климата и географического положения и заметил, что бедность и невежество способствовали распространению эпидемий. Второе издание основного сочинения Зюссмильха включало главу о быстроте размножения и периоде удвоения населения, которая была написана при деятельном участии Эйлера и включена в его полное собрание сочинений (1-я серия, т. 7, 1923).

Упомянутые выше недостатки, лишь частично объяснимые отсутствием необходимых данных, включали, например, неверное осреднение данных, относящихся к городскому и сельскому населениям.

Статистические исследования Зюссмильха, равно как и его размышления о сельском хозяйстве и мануфактурах, были результатом его глубокой религиозности. Он непрестанно (и не только в своих сочинениях) заявлял, что "правители" обязаны заботиться о своих подданных и для укрепления государства, и во исполнение божественной заповеди о необходимости заселять Землю. Эти утверждения приводили его к постоянным столкновениям с муниципальными властями Берлина и министрами Пруссии.

Мы приводим перевод предисловия и оглавления *Божественного порядка* (точнее, его посмертного издания 1775 г., первые два тома которого повторяют текст издания 1765 г.; третий том состоит из примечаний, добавленных его племянником), а также одного отрывка из этого же источника. В соответствии с обычаями того времени оглавление весьма подробно и дает хорошее представление о сочинении. К сожалению, Зюссмильх составил его небрежно не только в смысле литературного стиля, но и по существу, и нам пришлось добавить немало пояснений (и в квадратных скобках, и в отдельных примечаниях) главным образом на основе собственно текста книги.

Существует и выборочный французский перевод этого сочинения (1979 – 1984) с дополнительными материалами. В первом томе помещены французские переводы статей о биографии и трудах Зюссмильха, библиография этих трудов и обширнейшая библиография сочинений о нем. Второй том это собственно перевод издания 1765 г. Третий том помимо дополнительной библиографии сочинений Зюссмильха содержит указатели к *Божественному порядку* (авторский, предметный и географический), которыми мы воспользовались при составлении своего справочного аппарата. Подчеркнем, что в том же третьем томе приведена и библиография сочинений, на которые ссылался Зюссмильх.

На русском языке о Зюссмильхе написано мало. Птуха (1945) быть может вынужденно по существу обошел его молчанием, а дельная заметка Клупта (1991) слишком лаконична.

Божественный порядок в изменениях рода человеческого, выведенный из рождений, смертей и размножения

Предисловие

Благосклонный и справедливый читатель,

Этой весной исполнится как раз 20 лет с тех пор, как я отважился отдать в печать свои соображения о Порядке божественной мудрости и доброты, который ясно выказывается в рождениях, размножении и смертях людей. К этому меня привело связанное с величайшими удовольствием и восхищением прослеживание божественного провидения и более точное доказательство правил, сформулированных, повторенных и подтвержденных Граунтом, Петти, Кингом, Арбутнотом, Дерхамом, Нивентитом и другими.

Я осмелился идти дальше своих предшественников, так как такую возможность дали мне бюллетени[1] королевских прусских провинций. Я даже должен был пуститься в различные политические рассуждения, потому что этого требовало от меня применение законов мудрейшего божественного порядка и их посвящение людскому поведению. От всего этого я оробел, особенно потому, что было невозможно пребывать без ошибок в столь мало обжитой области. Но общество осрамило мое недоверие в суждениях, выраженных в научных журналах, и я также получил доказательства, что был хорошо воспринят за пределами Германии, – в Голландии, Англии, Швейцарии, Дании и Швеции, – и это побудило меня постепенно собирать новые доказательства и [статистические] бюллетени, относящиеся к сформулированным законам.

И через несколько лет после этого Королевская академия наук [в Берлине], без всякого ходатайства с моей стороны, удостоила меня чести, приняв в свои члены. Покойный президент Мопертюи ободрил меня, предложив сделать мои соображения темой моих академических мемуаров[2] и тем самым привести их к большему совершенству и повысить их достоверность. Совет был хорош, я последовал ему и очень часто выступал с докладами по этой теме в Академии. После этого в мои руки постепенно начали попадать труды г-на Керсебума, непрерывно пополнявшиеся материалы прилежного г-на Стрюйка, замечания г-на Шорта и, равным образом, прекрасные работы г-на Депарсье и, наконец, сжатые сборники всех соображений, высказанных по этой теме искусным г-ном Варгентином в Швеции, которые он прочитал в тамошней Королевской академии и обогатил собственными изящными доказательствами. И эти материалы дали мне всё больше возможности заполнить пробелы в моей работе, исправить ошибки, повысить достоверность предпосылок и довести принципы до столь высокой степени истины, которая только возможна в этом деле. И всё это также сподобило меня не только дополнить бюллетени наших провинций настолько, насколько это возможно с большим трудом, но даже просить суперинтенданта [церковное лицо] и проповедников нашей страны о содействии, в чем большинство из них пошло мне навстречу.

Таким образом, я оказался в состоянии значительно пополнить первое издание. И поскольку оно было распродано, а многие зарубежные ученые обращались с просьбой о втором издании, я решился на него, но не было у меня времени полностью переработать свое сочинение, притом я, пожалуй, заранее представлял себе, что подобное действительно произойдет. Мои профессиональные занятия оставляли мне слишком мало свободных часов, а мне нужно было много времени для переплавки [своего материала]. Наконец я решился в те часто печальные часы этой войны[3] заняться своей работой и заполнить ей свое немногое свободное время. Я начал ее, но вскоре обнаружил трудности, поскольку она безусловно требовала связности мыслей. Всё-таки я продолжал работу, хотя часто должен был на целые недели отступаться, и я восхваляю божественную доброту за то, что, несмотря на многие помехи, после затяжных трехлетних усилий дошел наконец так далеко, что отдал в печать первую часть и смог [таким образом] удовлетворить пожелания столь многих покровителей. И именно ввиду этих истинных обстоятельств я также надеюсь, что смогу просить сторонников моих рассуждений вынести им справедливый приговор.

Я знаю, что и это второе издание еще не может быть свободно от ошибок, ибо вид работы не позволяет иного. Нужно приложить еще много стараний и добавить много материалов, которых, хоть сейчас и больше, чем в первом издании, но во многих параграфах еще слишком мало. Часть, посвященная Порядку при размножении обоих полов, основана почти на достаточном числе бюллетеней, однако в ней нехватает материалов о Востоке и тем более об их соотношении с Западными. По этому поводу, однако, у меня нет никаких серьезных причин для сомнений.

Превосходнейший Порядок в распределении умирающих по возрастам особенно требует существенных дополнительных исследований. Из больших городов бюллетеней у нас почти достаточно, но относительно малых городов и, особенно, о возрастах умирающих в сельской местности сведений слишком мало. Я могу лишь сообщить о немногих бюллетенях из сельских церковных приходов. Сельские проповедники могут еще выполнить полезное дело, и я прошу тех, кто получает от этой работы удовольствие, собирать требуемые материалы и благосклонно сообщать их мне или после моей смерти [послать их] в научные ежемесячники. И поскольку я не сомневаюсь, что еще совершу ошибки, которых можно было бы избежать, то убедительно прошу не относиться к ним ни с каким снисхождением, а добросердечно сообщать о них, так как я хочу исправить их при случае. Мой высокочтимый друг и коллега, г-н профессор Эйлер, достойнейший руководитель математического класса Королевской академии наук, не только оказал мне содействие в вычислении [периода] удвоения [населения в гл. 8-й], но и благосклоннейше взял на себя просмотр отпечатанных листов, и проявленное им удовлетворение и его дружеское, хотя и беспристрастное суждение, может меня немного успокоить. И все же я прошу, если ошибки будут замечены, сообщать о них. Если что-то окажется сомнительным, я хотел бы на это ответить и постараться дополнительно прояснить. Своим ответом на возражения г-на фон Юсти*, сделанные им несколько лет назад против законов смертности, я надеюсь доказать, что работаю, чтобы установить истину.

Быть может, взглянув на это переделанное издание, некоторые станут снова осуждать меня за то, что я слишком часто пускался в политические рассуждения. Но можно ли всё-таки считать за грех, что я не отбрасываю правду, которая пребывает в необходимой связи с рассуждениями о Порядке божественной мудрости? Разве мне, теологу[4], не подобало стараться выводить истинную политику и благоразумие в искусстве управлять из первой заповеди Создателя (Бытие 1:28):

Плодитесь и размножайтесь и наполняйте Землю и обладайте ей?

Разве не прилично было мне установить, что ни один властелин не может счастливо управлять, если не имеет всегда перед глазами эту божественную заповедь и не исполняет ее разумно? Можно ли дурно истолковывать, что я обнаружил новое обоснование для морали и пытался показать, что истинное благоразумие правителя состоит в том, чтобы никогда не упускать из вида мораль и добрые нравы, дабы население не сокращалось вопреки заповеди Создателя и вместе с тем не ослаблялись безопасность, могущество, богатство и счастье государства и подданных? И я пытался спасти христианскую религию от новых и опасных обвинений со стороны Монтескье, престиж которого высок ввиду его учености и остроумия, и выявить безрассудство этих обвинений. Разве не должен теолог знать, что происходит в мире вокруг него? И если я должен был всем этим всё-таки пренебрегать, как полагают некоторые запальчивые, неправедные и непрошенные судьи и пошел слишком далеко, то пусть так и будет. Но подобным злобным, завистливым и высокомерным умам я обязан прямо заявить, что выслушиваю их мнение со всем заслуженным ими презрением и что мне было бы очень приятно, если они не станут читать мой труд. Но я уверен, что именно прочность основания, на котором покоится этот Порядок в природе, побудила меня двадцать с лишним лет назад к необходимости избавить [читателей от подобных мнений] и объяснить важнейшее учение божественного управления миром. И эту же цель я всегда имею перед собой и она существенно облегчила все мои труды. И я поэтому желаю, чтобы Бог благословил эти размышления и чтобы тем самым Его честь и благополучие человеческого общества получили от этого пользу.

Бесконечно мудрый и благосклонный Создатель, удостой меня этой милости!

Келлн-на-Шпрее[5], 30 марта 1761 г.

Примечание

*****Этот ученый муж особо утверждал в *Göttingische* [*gelehrte*] *Anzeigen*, что смертность в больших и многонаселенных городах должна быть ниже, чем среди сельских жителей, что ежегодно [в них] едва ли умирает один из 60 и главным образом по причине, что население больших городов, схожих с Веной и других, в основном состоит из слуг, кучеров, лакеев, служанок, подмастерьев и им подобным, которые уходят и приходят, и что поэтому его нельзя считать постоянным. Притом же, добавляет он, эти люди находятся в таком возрасте, в котором жизненная сила является наибольшей, а смертность – наименьшей. Он хотел доказать [всё] это, ссылаясь на число жителей Вены, которое намного выше, чем должно было бы быть в соответствии с законами смертности, принятыми мной и другими. В 1756 г. я постарался доказать беспочвенность этого возражения в послании ему. Он, однако, не ответил ни письменно, ни в печати, ни впоследствии устно, когда я возымел честь познакомиться с ним лично. Я воспринял это полное молчание как согласие с моими доводами, что оказалось причиной, почему я не стал его об этом спрашивать. И я намеренно был расположен вовсе не упоминать о нашем незначительном споре и в этом издании, потому что полагал его завершенным.

Когда, однако, печатание этой первой части было почти закончено, мне в руки попала его прекрасная работа о национальной экономике, которая вышла в свет в прошлом году. Из нее я усмотрел, что ошибся в своем истолковании и что г-н фон Юсти полностью остался при своем первоначальном мнении, притом без всяких оговорок и без доказательства, о котором я ведь убедительно просил. Я никак не могу поэтому надеяться, что повторное убеждение окажет большее действие и поэтому оставляю все это как есть и хочу лишь сообщить о некоторых своих мыслях. Если в большом городе все без исключения слуги обоих полов насчитывают 50 000 душ, которые живут там вне семьи и многие из которых уходят и приходят, их уход все же каждый раз восполняется. До тех пор, пока семьи знатных и богатых остаются при своем богатстве и продолжают жить в роскоши, это число слуг следует поэтому рассматривать как постоянно скапливающуюся там толпу. И тогда они, родившись там или нет, тоже должны ежегодно поставлять смерти свою долю. Они в большинстве пребывают в своих лучших годах, поскольку еще в состоянии служить, так что, разумеется, их смертность ниже, но они всё-таки должны вносить в нее определенную часть, притом, ввиду безалаберной жизни челяди в большом городе, обычно более высокую, чем это было бы в противном случае. В упомянутом послании г-ну фон Юсти я приложил свою таблицу (§29, с. 68), относящуюся к городам, в которых степень смертности определена для различных возрастов. В соответствии с ней, в больших городах уплатить долг природе должен [ежегодно] 1 человек из 96 в 20-е годы жизни, в 30-е – 1 из 57, в 40-е годы – 1 из 43, в 50-е – 1 из 30, а в 60-е годы – 1 из 20. И слуги, и служанки в столь же слабой степени исключаются из этого [закона], где бы они ни жили или пребывали, сколь господа и их жены. Смерть не делает никаких исключений и требует свою долю, установленную для нее Создателем.

Мне представляется поэтому совершенно очевидным, что в крупных городах закону смертности должны быть покорны и слуги, если только не утверждать, во-первых, что, как раз тогда, когда смерть захочет взмахнуть на них своей косой, они смогут убраться прочь из города и что смерть после этого остановится на своем списке где-то в другом месте. И, во-вторых, что на освобожденное место не придет другой слуга, еще вполне здоровый и полный жизни, который пробудет там лишь до наступления опасности своей смерти. Но я оставляю все это и лишь любезно благодарю г-на фон Юсти за благосклонное и учтивое упоминание моих соображений, относящихся к этой теме. *З.*

[Можно смело предположить, что к старости слуги действительтно стремились возвращаться в свои родные места. В общем, однако, рассуждения Зюссмильха представляются правдоподобными.]

Содержание

14. Это истолковано на примере армейского полка и его марша и при помощи такой картинки представлены основные предложения Порядка.

15. Показано особое свойство этого Порядка, который скрывается в беспорядке малого и может быть выявлен только лишь большими собраниями бюллетеней из многих небольших мест и за многие годы. Причины, по которым Порядок оставался неизвестным древним естествоиспытателям.

16. Наконец, этот Порядок изменчив и случаен[6]. Вывод, сделанный из этого о существовании Бога.

17. Продолжение этого заключения о божественном провидении, которое столь долго сохраняет так легко изменяемые предложения Порядка, чтобы они оставались в соответствии с намеченной целью возрастания населения.

Глава 2-я. О Порядке смертности человека, выведенном из соотношения числа умирающих к числу живущих и о его различии в сельской местности и в городах в обычные и упорядоченные годы

18. Указаны различные [закономерности] Порядка в смертности при сравнении [чисел] умирающих и живущих; умирающих и рождающихся; умирающих по возрастам и болезням. Сравнением умирающих и живущих здесь положено начало [этим исследованиям].

19. При [этом] сравнении необходимо отличать здоровые годы от эпидемических, что [здесь] кратко пояснено.

20. Указание, как поэтому следует поступать при применении бюллетеней и насколько эти меры предосторожности соблюдаются в данном труде.

21. Что из заданного числа людей ежегодно умирает лишь некоторая определенная часть, доказано **I.** По бюллетеням из сельской местности, и притом 1) по 1056 деревням главной части провинции Бранденбург.

22. 2) Это также доказано по проверенным нами положениям Граунта.

23. 3) По положениям Кинга.

24. 4) [Результаты по] английским деревням по данным Шорта полностью совпадают с бранденбургскими.

25. К ним же 5) очень близко подходят наблюдения, произведенные в ганноверских деревнях.

26. Приведены 6) [Бюллетени по] некоторым шведским церковным приходам.

27. И также 7) По всему [шведскому] государству по выдержкам г-на Варгентина.

28. **II.** Представлены отношения по малым городам.

29. То же **III.** По большим и многонаселенным городам, как Лондон, Рим, Стокгольм, Берлин и некоторым другим.

30. Представлен Порядок смертности, известный по опыту, для целых стран, включающих города и деревни 1) по Ганноверу и 2) по Швеции.

31. То же 3) по герцогству Вюртембергскому и

32. 4) По королевству Пруссии.

33. Эти показания из провинций собраны и определены другим путем.

34. Попутно проверено отношение жителей в городах к жителям в сельской местности.

35. Эти предложения вкратце повторены и предназначены к употреблению.

36. Принятые положения о смертности г-на Стрюйка в голландских деревнях признаны непригодными.

37. Так же как выведенные г-ном Дюпре де Сен-Мором по некоторым французским деревням возле Парижа.

38. Снова показано хорошее совпадение смертности и в городах, и в сельской местности и заключено, что причину различия между городами и деревнями следует искать в нравах, питании и образе жизни.

39. Из совпадения предложений также заключено 1) что можно сравнивать друг с другом похожие времена и места.

40. Отсюда 2) Выведено предложение: когда в похожих временах и местах умирают столько же в одном месте, как и в другом, то в них должны находиться одни и те же количества жителей. Это разъяснено на примерах Лондона и Берлина.

41. 3) Отмечена ошибка г-на Мэйтленда, который сравнивал непохожие вещи и по Лондону заключил о числе жителей в прусских провинциях.

42. Показано многообразие обстоятельств, которые вносят свою ежегодную долю в покрытие предустановленного размера смертности. Отсюда заключено, что здесь не мог иметь места никакой слепой случай.

Глава 3-я. Некоторые причины более высокой смертности в городах

43. Первая причина этого состоит в том, что в раннем детстве в городах умирает больше, чем в сельской местности, что происходит от плохого телосложения, от [недобросовестности] кормилиц и пренебрежения.

44. Вторая состоит в испорченности нравов и в отравлении венерическими болезнями.

45. Третья, в чрезмерно обильном питании, так что

46. 4) Усиливаются страсти, становится больше забот.

47. 5) Потребляются крепкие горячительные напитки, особенно водка.

48. Шестая причина в том, что в больших городах воздух плотнее и атмосфера менее здоровая, о чем особенно сожалели Граунт и Шорт.

49. Поэтому и ввиду более стесненного жилья и более легкого общения можно понять 7) более быстрое распространение заразных болезней [в городах].

50. Пренебрежение бедными и больными при заразных болезнях и при дороговизне является восьмой причиной.

51. Наконец, в девятых, прибывают чужеземцы, которые умирают в городских богадельнях, больницах, сиротских приютах и домах для подкидышей.

52. Доказательство, что из-за более высокой смертности города следует считать местами, в которых постоянно пребывает [как бы] скрытая чума. Надо также думать о моральном зле, которое происходит ввиду слишком большого числа людей, находящихся в одном месте. Ими не может управлять никакая полиция.

Глава 4-я. Отношение ежегодно женящихся пар к числу жителей определенного места и важности и влияния этого отношения на общую плодовитость страны и на возрастание рода человеческого

53. Состояние в браке является вообще наилучшим средством для заселения страны.

54. Основание плодовитости и возрастания населения лежит в отношении числа женитьб к числу людей. Плодовитость подразделена на особую и общую.

55. Решение о женитьбе зависит не только от естественных побуждений, но и от содержания семьи. По мере того, как оно легче или труднее, число женящихся в данном населении оказывается бо́льшим или меньшим.

56. Это проверено и показано **I.** По известному по опыту отношению ежегодно заключаемых женитьб к числу живущих и притом прежде всего 1) по сельским местностям в главной части провинции Бранденбург, где одна женитьба приходится на 108 живущих или один женящийся на 54 человека.

57. Как это обстоит в различных шведских провинциях.

58. Как обстоит дело 3) в голландских деревнях, отношение для которых, однако, как разъясняется, непригодно для других стран.

59. 4) Как обстоит дело в Англии и

60. 5) В небольших городах Бранденбурга и в Берлине.

61. 6) Проверены отношения, данные Кингом.

62. Поскольку опыт показывает некоторое различие в отношениях ежегодно женящихся пар к числу живущих, то **II.** Это отношение продолжает исследоваться, чтобы выявить причины таких различий в столь важном деле. 1) Вначале это было сделано по бюллетеням для Галле.

63. Затем 2) Для Лейпцига. **64.** 3) Для Аугсбурга.

65. 4) Для Данцига [Гданьска]. **66.** 5) Для Берлина и

67, 68. Проверено для нескольких голландских деревень.

69. Добавлены 7) Париж и **70.** Цюрих и Кенигсберг [Калининград].

71. По тому же самому методу, поскольку число жителей определяется лишь по положениям смертности, проверены некоторые целые провинции, как Магдебург, [княжество] Хальберштадт, [город] Клеве, [княжество] Минден, Бранденбург, Померания и Пруссия и показаны эти отношения и их различия в разные времена.

72. Причина более или менее частых женитьб в целых провинциях, и особенно среди крестьян, отыскивается в густоте заселения и в возможности пропитания. Если пропитание начинает оскудевать, женитьбы становятся реже и приходится ждать пока кто-нибудь не умрет.

73. Наконец, женитьбы, прерванные смертью, сравниваются с новыми женитьбами в Гере, Готе и Виттенберге, а также

74. В провинциии Померания и сделаны выводы.

75. Замеченное до сих пор различие отношений кратко указано вновь и отмечено, что, ввиду различий во внутреннем состоянии сельской местности и городов, трудно установить общее предложение об этих отношениях.

76. Поскольку от большего или меньшего количества заключаемых браков зависит плодовитость и количество рождений, важность этой темы доказана и наглядно иллюстрирована таблицей, для которой послужила примером Франция.

77. Отсюда следует, что государственное благоразумие связано с признанием отношения ежегодно заключаемых браков к числу живущих как одного из важнейших показателей.

78. Отсюда далее выводится одна из главнейших обязанностей разумного правительства, которое должно делать всё возможное, чтобы облегчить женитьбы и, напротив, предотвращать всё, что способно затруднить содержание семьи и стремление жениться.

79. Закончено соображением о божественной мудрости, которая, как оказывается, путем естественного устройства установила всё таким образом, что, несмотря на все препятствия, возрастание населения могло произойти.

Глава 5-я. Соображения о брачной плодовитости, о рожденных и о соотношении их числа к числам женитьб, семей и умирающих

80. Порядок и соответствие в соотношении числа крещенных к числу женитьб были необходимы. Доказано существенное совпадение чисел ежегодно рождающихся за несколько лет.

81. О мертворожденных и некрещенных, которых следует прибавить к крещенным, чтобы установить истинное число всех рожденных. Их примерно 3 на 100, т. е. на 1000 крещенных необходимо добавить 30. Крещенные для краткости изложения рассматриваются и вносятся в вычисления как рожденные.

82. По общему правилу брачная плодовитость приводит в каждой женитьбе к четырем детям, что по существу мало, хотя и достаточно для возрастания населения[7]. Предположены несколько примеров более высокой брачной плодовитости.

83. Брачная плодовитость точнее определена по имеющемуся опыту. **I.** По бюллетеням по немецким провинциям и городам.

84. II. По бюллетеням из Англии.

85. III. По шведским, датским, голландским и французским бюллетеням.

86. Из их соответствия выведены предложения, притом для целых провинций, городов и деревень. Также отмечены различия в брачной плодовитости между провинциями и городами и в провинциях в различные времена. Она зависит от общей плодовитости и числа женящихся.

87. Указано, что это различие брачной плодовитости является очень важным показателем. При помощи таблицы оценено как велики и какое значение имеют потери, когда на 2 семьи приходятся 6, 7, 8 или 9 детей[8]. При истинном государственном благоразумии отношение числа женитьб к числу рождающихся должно поэтому быть постоянным показателем.

88. Степень брачной плодовитости может также быть установлена по отношению числа умирающих к числу крещенных. При одной и той же смертности она тем выше или ниже, чем больше или меньше крещенных приходится на одно и то же число умерших.

89. Затем исследованы причины различий в брачной плодовитости, разбитой на два класса, – на общую, которая находится вне пределов человеческой возможности, – и особую, которая зависит от человеческих воли и страстей. К проблеме общей плодовитости относятся

1) Естественное бесплодие, о котором приведены мысли Монтескье.

2) Болезненное и слабое тело.

3) Прерванная продолжительность состояния в браке.

90. Одна из главных причин это 4) неравные браки старых и молодых. Важность этого обстоятельства подтверждена бюллетенями по Померании. Доказано, что оно грешно и вредно для государства. Предложения об учреждении кассы для женитьб бедных. Вступающие в неравный брак должны вносить в нее средства. [Последнее предложение сформулировано в соответствии с основным текстом Зюссмильха.]

91. Поздние женитьбы являются 5) важной причиной пониженной брачной плодовитости. Ни слишком ранние, ни слишком поздние женитьбы не годятся.

92. Ко второму классу причин, которые снижают брачную плодовитость, относятся 1) юношеское распутство и ослабление мужского пола. Допущение общедоступных публичных домов является вредной политикой.

93. 2) Страх и боязнь женщин перед опасностью для жизни, связанной с рождением [ребенка]. Здесь эта опасность оценена. Показано сколько [женщин] умирает при родах и в послеродовой период. На 115 умирающих приходится примерно одна роженица, т. е. примерно 8 [8.7] на тысячу. При родах погибает одна на 400 или 500.

94. 3) Заботы и боязнь многодетной семьи и ее содержания. [Римский император] Траян помог таким родителям в воспитании [детей]. Сиротские приюты и дома для подкидышей по существу являются плохим подспорьем.

95. 4) Длительное кормление детей грудью у крестьянок является следствием боязни и забот.

96. Об исключительной плодовитости женитьб ввиду двоен, троен и одновременных рождений еще большего числа детей. На основе бюллетеней доказано, что одна пара близнецов приходится примерно на 70 рождений. Таблица 365 детей.

Происходила ли плодовитость евреев в Египте ввиду рождений близнецов?

97. Имеет ли какой-нибудь район Земли или какой-нибудь народ преимущество в плодовитости? Это оспаривается, особенно относительно северных стран [Швеции].

Этот ошибочный предрассудок возник от неверного понятия о миграциях немцев.

98. Продолжение этих соображений, при котором опровергаются Режинон, Макиавелли и Рудбек, Байль и другие.

99. Опровергаются также те, которые стремятся придать предпочтение Франции. Париж, однако, [более плодовит. Так сказано в основном тексте].

100. Причины особого брачного бесплодия в Лейпциге будут исследованы отдельно.

101. Несмотря на все препятствия и помехи Порядку в природе и брачной плодовитости, мудрость Создателя определила такие внутренние устройства, что произошел перевес рождающихся над умирающими. Тем самым цель Создателя, а именно возрастание числа людей на Земле, могла осуществиться.

102. Показано, когда станет возможным прекращение возрастания.

103. В заключение, важность соображений о брачной плодовитости для тех, кто держит в руках бразды правления, снова доказана и настойчиво внушена.

Глава 6-я. Отношение рождающихся к числам живущих, существующих браков и семей

104. Эти отношения и Порядок зависят от предыдущего. Там, где общая и брачная плодовитости высоки, на каждое рождение должно приходиться меньшее число живущих, чем в местах, в которых она низка [они низки].

105. Это отношение [родившихся к живущим] определено по опыту и именно 1) по деревням главной части провинции Бранденбург.

106. 2) По тамошним небольшим городам.

107. 3) По деревням и небольшим городам Англии.

108. 4) По указаниям Кинга.

109. 5) По шведским данным г-на Варгентина.

110. 6) По берлинским бюллетеням.

111. 7) По римским бюллетеням, причем в примечании определено число жителей Лондона и Парижа.

112. 8) По голландским деревням.

113. 9) И также по 15 деревням возле Парижа.

114. 10) Проверено данное г-ном Керсебумом отношение для Голландии, равно как и

115. То, которое было дано некоторыми о Лондоне. В его верности, однако, высказано сомнение.

116. Краткое повторное указание основных отношений.

117. Трудность определения правила для всеобщего употребления. На примерах пояснено, что в зависимости от обстоятельств провинции или места требуются различные правила для установления надлежащих чисел [коэффициентов], на которые нужно умножить общее число рожденных, чтобы как можно точнее определить истинное число живущих.

118. Отношение рождающихся к существующим бракам показано 1) по г-ну Стрюйку и также

119. 2) По шведскому церковному приходу Вассенда и

120. 3) По Швеции.

121. Показано применение этого отношения для вычисления числа жителей.

122. Показано отношение рождающихся к числу семей, а также число лиц, причисляемых к семье 1) по английским бюллетеням.

123. 2) По римским бюллетеням, результаты которых полностью совпадают с предыдущими.

124. 3) По бюллетеням голландских деревень, и, наконец,

125. 4) Приведены результаты, указанные Кингом.

Глава 7-я. Об отношении рождающихся к умирающим, о преобладании рождающихся над умирающими и о зависящих от этого возрастании численности рода человеческого, скорости этого возрастания и [периоде] удвоения

126. Связь с предыдущим и содержание этой главы.

127. Доказательство преобладания рождающихся над умирающими, о соотношениях между их числами во всех прусских государствах, которые представлены в таблице.

128. Отсюда выведено общее правило, в соответствии с которым в целом, без различия между хорошими и эпидемическими годами, умирающие относятся к рождающимся как 10 к 12 или 13.

129. Второе доказательство преобладания по бюллетеням из Швеции.

130. То же показано далее, в третьих, по бюллетеням из Англии.

131. Возможно ли, что преобладание происходит во всем мире в целом, как в Англии, Швеции и в провинциях Бранденбурга? При определенных условиях на это дается положительный ответ и

132. Это разъясняется далее. Преобладание возможно прекратится, однако, при нынешних условиях в мире и особенно в Европе, это вовсе не вероятно.

133. Из неизменного преобладания рождающихся выведена и доказана необходимость возрастания рода человеческого.

134. Реальность подобного постепенного возрастания доказана на примере бранденбургских провинций за 50 лет.

135. Замечания о различной величине возрастания в подобных провинциях. В одних число жителей возросло наполовину, так что там при тех же самых обстоятельствах удвоение должно произойти менее чем за сто лет.

136. Продолжение примечаний, особенно по поводу опережения возрастания в основной части Бранденбурга, притом не только лишь от внутренних, но и от внешних причин, а именно происходящее вследствие многих пришельцев, оседающих там ввиду религии, мануфактур и торговли. Эта провинция не может поэтому служить примером.

137. Важность этой темы и величина подобного возрастания далее установлены по общему отношению умерших (?) в древних государствах. За 50 лет они обогатились на миллион жителей, что было столь же хорошо как прибавление двух новых провинций такой же величины как главная часть провинции Бранденбург и Померания.

138. Могут ли бранденбургские государства, взятые совместно, быть приняты за меру для другого государства? На это дается положительный ответ.

139. В городах, особенно крупных, обычно умирают больше чем рождаются. Причины этого кратко указаны. Главнейшая из них это большое число холостых.

140. Можно ли принять, что в мире существует неизменное равновесие рода человеческого? Это оспорено и Риччиоли и Байль опровергнуты.

141. То же относительно автора [Goudar] одного французского труда, равно как и

142. Делонде. Но особо

143. Полностью опровергнут г-н Бильфельд, который безосновательно захотел поставить под сомнение верность прусских бюллетеней. Далее будут

144 и 145. Кратко опровергнуты принятые им основания для неизменного постоянства.

146. По соображениям о божественном провидении установлено число жителей земного шара и по примеру Германии доказано, что каждые 5 лет [ее население] будет возрастать на миллион человек, так что при любых потерях она может оставаться цветущей и многонаселенной.

Глава 8-я. О скорости возрастания и периоде удвоения [населения]

147 – 149. Доказано, что различия в скорости возрастания и периоде удвоения могли и должны были иметь место.

150, 151. Должны были существовать такие различия во времена после творения и потопа [сравнительно с нынешним временем], когда скорость ввиду более низкой смертности и большей плодовитости была более высокой чем сейчас.

152. Период удвоения определяется в соответствии с методом г-на проф. Эйлера и составленной им таблицы, если известно, какую часть общего числа жителей составляет преобладание числа рождений.

153, 154. Снова проверен период удвоения для бранденбургских провинций в нынешнее время и доказано, что в общем удвоение может происходить за 83 – 84 года.Это подтверждено оценкой г-на Варгентина.

155. Кратко отмечены важность этой темы и степень благодеяния, которую может обеспечить себе страна, находящаяся в спокойствии и добром здравии, при разумной заботливости правителей.

156. Приведена еще одна общая таблица г-на проф. Эйлера для всех случаев преобладания.

157. Наставление к применению этой таблицы.

158. Из этих предложений заключено, что после Создания и потопа удвоение вполне могло происходить через десять лет, в связи с чем

159. Составлена примерная таблица, по которой можно установить число людей, живших через несколько столетий после потопа, причем период удвоения постепенно возрастал с приростом числа людей.

160. Приведена еще одна таблица г-на проф. Эйлера, которая наглядно показывает дальнейший ход удвоения и которая опирается на очень небольшое число [упрощенных] предложений.

161. Примечания к этой таблице.

162. Когда после потопа мир был достаточного заселен, мудрость Создателя сократила длительность человеческой жизни и увеличила период удвоения, чтобы заселение происходило медленнее и мир не мог быть перенаселен.

163, 164. Показано, что обычная история [обычная хронология], придерживающаяся библейского счета времени, вполне может быть сохранена и что через несколько столетий после потопа Азия могла уже быть заселена.

165. Наконец, опровергнуты периоды удвоения, которые Петти принял без достаточных оснований. То же

166. О Кинге и Давенанте. Их периоды слишком длинные. Напротив,

167. У Грю период слишком короткий, и он здесь также вкратце опровергнут.

Глава 9-я. О наибольших и насильственных препятствиях возрастанию рода человеческого

168. Введение.

169. I.Чума. Ее очаг и происхождение в турецких государствах, особенно в Египте.

170. Венгерское заболевание[9] можно назвать северной чумой. Потеря от него определена бюллетенями Бреслау [Вроцлавля] и Лондона.

171. Установлена потеря от восточной чумы 1) по бюллетеню Аугсбурга, где она похитила от 1/5 до 1/3 населения.

172. 2) По бюллетеню Данцига [Гданьска].

173. 3) По бюллетеню Пруссии, где она умертвила 1/3.

174. 4) По Копенгагену.

175. Сравнением показано, что чума в сельской местности столь же вредна [ужасна] как и в городах и указаны причины этого.

176. 5) По Дрездену. **177.** 6) По Лондону.

178. 7) По Константинополю. **179.** Некоторые бюллетени Граунта.

180. Следствия из указанных выше примеров.

181. Доказательство, что в стране, в которой два или три раза за столетие свирепствовала чума, не может происходить никакого возрастания.

Здесь опровергнут Дерхам и показано, что турецкие государства вовсе не многолюдны и что поэтому для сохранения там равновесия чума совсем не нужна.

182. Чума или война более вредны для возрастания?

183. II. Война. Показан ее вред для возрастания.

184. В древности войны велись более неистово и приносили более вреда чем сейчас, когда у большинства европейских народов можно полагать улучшенный способ [менее варварский способ их ведения][10]. Доказательство по войнам еврейского народа с римлянами.

185. Продолжение и некоторые причины большего упорства и большего неистовства в битвах древности.

186. При этом испанцы покорили Америку и обезлюдили ее. По данным Уллоа и Кондамина приведены также причины, почему Америка еще не могла быть снова заселена.

187. Продолжено рассмотрение урона от войн. Он происходит не только от битв, но и от плохого ухода за больными и крупных [и неэффективных] обозов армии и поэтому войны стóили Франции намного больше людей чем другим. Это установлено беспристрастным свидетелем.

188. Мы завершаем эту тему добрыми мыслями [из журнала] *Spectator* [т. 3, примерно 1711].

189 – 191. III. Голод. Некоторые примеры голода, из которых заключается необходимость устройство хранилищ по примеру древних египетских фараонов и голландцев.

192. IV. Сильные наводнения.

193. V. Кастрация, следствие ревности и многоженства. Уже по одной этой причине многоженству следует препятствовать.

194. Указан размер стран, в которых имеются евнухи.

195. Их многочисленность установлена по свидетельствам Шаля и Тавернье.

196. Попутно обращается внимание на григерианцев[11] и на итальянский обычай кастрировать мальчиков, посвящающих себя духовенству.

197. VI. Безбрачное состояние духовных лиц в папистских странах возникло из ложного и преувеличенного понятия о совершенстве, связанного с христианской религией, но не относящегося к нему.

198. Подсчитано число лиц, не состоящих в браке в пределах римской церкви. Оно составило примерно 3 миллиона.

199. Сделан вывод о числе грехов и распутстве, о которых Рим хоть и знает, однако предпочитает разрешать, но не подвергнуть опасности непогрешимость [пап]. Ничего не делается по поводу сожительств и блуда священнослужителей, а вот взять себе жену считается для них смертельным грехом.

200. Аддисон заключил, что Италия и прекрасные окрестности Рима поэтому обезлюдели.

201. На одну принужденную к безбрачию женщину приходится более трех подобных мужчин, так что равенство полов нарушается. Из-за этого необходимо следует большое число грехов.

202. Является ли урон настолько серьезным, что папистские страны в конце-концов должны будут вымереть сами по себе? Это отрицается.

203. VII. Безбрачное состояние солдат во Франции и в других странах также очень вредно.

204. Отрицается, что войны и чума необходимы для сохранения одного и того же числа жителей земного шара.

Глава 10-я. О заселении государства как необходимой обязанности правителей

205. Правители обязаны заселять свое государство, ибо это является средством его счастья, безопасности, могущества и богатства.

206. Это предложение доказывается 1) тем, что счастье пропорционально количеству жителей.

207. Потому что от этого зависят 2) могущество и безопасность и

208. 3) Изобилие и богатство.

209. Каждый подданный имеет таким образом определенную стоимость и государство выигрывает или проигрывает из-за него и потому правитель должен надлежаще ценить его, придавать ему значение, любить и поддерживать его.

210. Эта стоимость поясняется на примере [стоимости] рабов в Алжире и Суринаме.

211. Отсюда также заключается, что заселение является одной из главных обязанностей правителей и что разумный князь следит за исполнением этой обязанности как за одной из главнейших задач.

212. Указывается, что в Испании и Франции эта обязанность плохо исполняется.

213. Древние народы почти застыдили новое время. Это кратко доказано устройством еврейского государства, которое стало схоже с римским по отношению к законам земледелия.

214. Но не все древние законодатели установили благоприятные для заселения законы, что подтверждено мыслями Платона. Поэтому Моисей заслуживает глубокого уважения и предпочтения.

215. Мы принимаем четыре основных правила, и все частные темы в последующих главах, которые влияют на заселение, рассматриваются на их основании.

216. На примере одной колонии показано, как эти правила естественно вытекают.

Глава 11-я. Рассмотрение первого правила и того, что способствует общей плодовитости и устраняет препятствия к женитьбам

217, 218. На основании предыдущего кратко повторены соображения о важности общей плодовитости и способствования женитьбам.

219. Для этой цели необходимо 1) сопротивляться насколько возможно всем серьезным препятствиям и помехам женитьбам.

220, 221. Затем, необходимо 2) довести возделывание земли до возможного совершенства. Эта тема здесь обсуждается лишь вкратце и выделена для дальнейшего рассмотрения.

222. 3) После плуга следует ткацкий станок и все виды фабрик и мануфактур[12]. Эта тема будет особо рассмотрена и в дальнейшем.

223. 4) Доступные цены на продукты питания также сильно влияют на решение жениться.

224. Крупные и быстро разросшиеся города повышают цены и тем самым могут причинять вред.

225. 5) Обязанности, возлагаемые на подданных, легко могут послужить серьезными препятствиями, пример чему показывают Испания и Франция.

226. С этой целью приводятся мысли Монтескье и

227. Французских патриотов [не названных в основном тексте], а также

228. Возражения парламентариев [членов парламентов нескольких французских городов] королю.

229. 6) Роскошь является серьезным препятствием женитьбам. Эта тема будет также рассмотрена особо.

230. 7) Для поощрения женитьб нахождение в браке должно почитаться достойным, а распутство и сожительства облагаться налогом.

231. Доказывается предпочтительность и необходимость продолжительных брачных связей.

232. Ввиду испорченности нравов многие могут воздерживаться от женитьбы.

233. Нельзя стать терпимыми к старым холостякам.

234. Цезарь и Август пытались побуждать римских граждан к женитьбам путем вознаграждений и штрафов, но тщетно. Причина этого ищется в испорченных нравах и неуверенности.

235. Законы некоторых греческих республик[13] против холостяков.

236. Два особых обычая у самнитов [древнеиталийское племя] и вавилонян относительно женитьб юношей и девушек.

237. Предложения французских патриотов о поощрении состояния в браке.

238. Показан разностороннийй вред разврата и беспорядочного сладострастия. Пожелание установить церковную дисциплину.

239, 240. Указание на вред[ные] для заселения и нравов [обстоятельства] продолжено, взвешено и

241, 242. Подтверждено свидетельством французских патриотов.

243. То же самое свидетельство о вреде венерических болезней, а также

244. Настоятельное представление тех же патриотов о необходимом улучшении нравов, рассмотрение которого

245. Продолжено с указанием на вред парижских зрелищ.

246. 8) Доказана [верность] мнения тех же о вредности необходимого согласия родителей на женитьбу своих детей.

247. 9) Ius primogeniturae [закон о праве первородства] и майорат [наследование недвижимости по принципу первородства] вредны для заселения.

248. 10) Крупные города также не являются благоприятными.

249. 11) Следует установить препятствия получателям пожизненных рент[14].

250. 12) Лучшее обеспечение вдов посредством хорошо устроенных вдовьих касс является причиной, склоняющей к женитьбе.

251. Служит ли и многоженство заселению?

Глава 12-я. Рассуждение о втором правиле, которое охватывает устранение всех препятствий к брачной плодовитости

252. Обобщение и подведение итогов.

253. 1) Женитьбы в должное время и не слишком поздно способствуют брачной плодовитости.

254. 2) Страх перед родами уменьшается при наличии хороших акушерских школ.

255. 3) Неравные браки между молодыми и старыми должны быть запрещены.

256. 4) Государство должно озаботиться, о том, чтобы многодетность могла оказаться не бременем, а радостью для родителей. При этом подробно упоминаются заботы [римского императора] Траяна. В примечании также указано, что puelli & puellae alimentariae Траяна не имели ничего общего с нашими сиротами. Также отмечены некоторые недостатки нынешних сиротских приютов.

257. 5) Роскошь является одним из серьезных препятствий брачной плодовитости в городах.

258. 6) Длительному выкармливанию детей грудью крестьянками можно лучше всего помочь вознаграждением многодетных.

259. 7) Удобство матерей и обращение к кормилицам следует по справедливости ограничить[15].

260. Вред, который от этого терпят матери, дети и заселение, подробно устанавливается по свидетельству Депарсье.

261. 8) Добрые нравы серьезно влияют на брачную плодовитость и должны также поэтому сохраняться.

Глава 13-я. О необходимой и полезной предусмотрительности для сохранения жизни подданных

262. Опыт учит, что многие из тех, которые при лучшей заботе государства могли бы остаться в живых, умирают. Слава душевному королю за устроенный в Берлине анатомический театр [для совершенствования врачей][16].

263. Это доказывается пренебрежением крестьян и бедных в городах во время эпидемий.

264. Особое доказательство представляет корь, унесшая в 1751 г. в Берлине более 500 детей, хотя почти все они могли бы быть спасены.

265. Еще одним особым доказательством является гангренозная ангина, angina gangraenosa, которая лишь некоторое время тому назад обнаружилась в здешних окрестностях как эпидемическое заболевание. Она унесла многих детей, после чего, однако, на нее не обратили внимания.

266. Из детских болезней, судороги и оспа [?]. Их серьезность устанавливается вычислениями.

267. Пожелание в связи с вариоляцией оспы[17]. Преодолеть всеобщий предрассудок против нее можно лишь официальными исследованиями и доказательствами, которые должны быть упорядочены государством.

268. Государство должно предотвратить голод бедноты во времена дороговизны, особенно в больших городах. Пример Траяна здесь снова восхваляется.

269. Дурные нравы губят многих, что наглядно показано таблицей, составленной в Лондоне.

270. Замечания об этом и прежде всего о вреде пьянства.

271. О том, сколько французов погибло от этого.

272. Рассуждение о многочисленности самоубийц как следствии безбожия, забот и тягот[18].

273. О смертельных драках и казнях и

274. Наконец, о задавленных младенцах. [Перевод по смыслу основного текста].

Глава 14-я. Рассуждение о четвертом и последнем правиле заселения, в силу которого необходимо стремиться сохранять своих подданных и, если требуется, привлекать чужеземцев

275. Необходимость заботы о сохранении урожденных подданных после того, как страна окажется достаточно населенной.

276. Франция ежегодно теряет много людей ввиду миграции, которая частично добровольна, а частично вынуждена.

277. Разъясняется девиз англичан liberty and property [свобода и собственность],

278. К которому обязательно должна принадлежать и справедливость.

279. Также свобода совести и разумная терпимость, однако бдительная по отношению к тем религиозным сектам, учения которых могут вредно воздействовать на общественную безопасность государства.

280. Добрые нравы должны равным образом сохраняться.

281. Науки и ученость[19] также могут оказаться серьезным преимуществом для заселения.

282. Разрешать ли изобретения, из-за которых семьи лишаются пропитания?

283. Окончание.

Таблицы, относящиеся к первой части Божественного порядка ...

Часть вторая, в которой рассматриваются средства, способствующие и препятствующие заселению; христианская религия спасается от [нападок] Монтескье; устанавливается число людей на Земле и в некоторых древних и новых городах; а также

определяются остальные законы размножения и смертности по возрастам и болезням

Глава 15-я. О законах о земледелии в древнем Риме и разумном разделении земли как основе его могущества и престижа

284. Кратко повторены рассуждения о важности земледелия.

285, 286. Рим служит примером того, что распределение пашни является основанием многолюдности.

287. Вначале доказывается, что земледелие в Риме было в почете и уважении и что высшие государственные деятели были там одеты в крестьянскую одежду.

288. Число югеров или моргенов [примерно 0.3 и 0.25 *га*], даваемых первоначально каждому гражданину и затем увеличенное до семи. Кратко рассмотрены усилия братьев Гракх сохранить прежние земледельческие законы.

289. Римляне также учредили надсмотрщиков земледелия, которые привлекали к ответственности тех, кто пренебрегал земледелием или посадкой [плодовых] деревьев. С постоянным поднадзорным прилежанием был связан трудный и бережливый образ жизни, при котором все продукты питания были в избытке и доступны, так что содержание семьи было нетрудным.

290. Налоги были необременительными.

291. Пашня возделывалась волами, что было большим преимуществом.

292. Барщина была неизвестна.

293. [В древности] земледелие считалось наукой и поэтому наставления о нем писали короли [повелители] и крупнейшие ученые.

294, 295. Римский югер сравнивается с бранденбургским моргеном и кратко показано, что семья могла обеспечить свое пропитание двумя или тремя моргенами хорошей земли.

296. Из этого примера выведены некоторые и ныне полезные правила для того, чтобы земля могла содержать наибольшее возможное число жителей и притом, чтобы 1) ни один клочок не оставался без использования. Это подтверждается двумя примечательными примерами.

297. 2) Обработанная земля не должна оказаться непригодной, так что занесение ее песком следует полагать крупным злом.

298. 3) Пашня должна быть распределена пропорционально, чтобы крестьянин не получил ни слишком мало, ни слишком много.

299. 4) Имения правителей и крупные земледельческие хозяйства должны быть распределены между крестьянами за платежи натурой в течение нескольких поколений. [При этом никто ничего не потеряет.]

300. 5) Взамен лошадей пашня должна возделываться волами.

301. 6) Каждый крестьянин должен иметь обособленную собственность.

302. 7) и 8) Барщина очень вредна для народного хозяйства.

303. 9) и 10) Посадка плодовых деревьев и пчеловодство также полезны.

304. 11) Наконец, в течение зимы крестьянин также должен побуждаться к прилежному труду.

305. Для сохранения этого преимущества в государстве необходима экономическая коллегия, которая с самого начала должна быть обеспечена деньгами и обладать авторитетом. Для пояснения преимуществ можно вспомнить об орошении лугов.

306. Это подтверждается и поясняется мыслями автора [мыслями Goudar].

Глава 16-я. О преимуществах фабрик с точки зрения заселения, мощи и богатства

307. После земледелия фабрики являются главным показателем государственной мудрости.

308. Прежде всего точно подсчитано сколько человек занято на ткацком станке при обработке ситца. Затем

309. Во-вторых, [подсчитан] заработок, который при этом получат рабочие при прилежной работе.

310, 311. Это применяется к стране в целом и показывается общее значение фабрик.

312. Отсюда следует безответственность тех, которые покупают у других то, что можно произвести собственным усердием. Меры предосторожности при устройстве фабрик в стране, чтобы земледелие не лишилось рабочих рук и чтобы фабрики предпочитали отечественное сырье иностранному.

313. Иные предосторожности, касающиеся фабрик, работающих на иностранном сырье, хлопке и шелке.

314. Следует осуществить некоторые нужные меры, стриоть фабрики также там, где живут иностранцы.

315. Забота государства о бедных рабочих во времена дороговизны а также **316.** При эпидемиях.

317. Доказательство, что имея в виду также нравы, нецелесообразно скучивать фабрики в городах, которые уже очень многолюдны.

318. Преимущества земледелия перед фабриками сохраняются ввиду того, что 1) земледелие может и должно сделать государство независимым; 2) должно давать рабочие руки и сырье; 3) фабрики не столь долговечны и часто подвержены опасным [коммерческим] изменениям[20]; и, наконец, 4) потому что земледелие также предоставляет большинство храбрейших и вернейших солдат и потому обеспечивает бо́льшую безопасность. По этой причине осуждается Кольбер, который отдавал фабрикам предпочтение перед земледелием.

Глава 17-я. О вредности роскоши для заселения

319. Определяется смысл этого слова.

320 – 322. Проверяются главнейшие доводы тех, кто считает роскошь нужной.

323. Основания для противного. Роскошь 1) усуглубляет трудности жизни. **324.** 2) Затрудняет решение о женитьбе.

325. 3) Становится причиной большого числа холостых слуг.

326. 4) Подвергает страну опасности обнищать, когда ради роскоши из нее уходит больше денег, чем приходит за собственные продукты и товары.

327. 5) Роскошь также является дорогой к обнищанию семей и делает несчастными детей, избалованных воспитанием в роскоши.

328. 6) Она является причиной плохого потомства и изнеженных и сластолюбивых граждан взамен добродетельных и привычных к работе, так что в конце-концов ни в гражданском, ни в военном сословиях не будет хватать мужественных и работящих людей.

329. 7) Мотовство склоняет к алчности, неправедности, взяточничеству и другой сомнительной деятельности, которая крайне вредна государству.Это подтверждается примером богача Красса.

330. Возможно ли, однако, ограничить роскошь? Это разъясняется и возможность этого указывается примером крестьянского сословия и обмундированием, введенным в прусской армии [которое исключило необходимость иной верхней одежды].

331. Предусмотрительность римского государства, направленная против пышности и великолепия, приводится в качестве примера и доказательством служат leges cibariae & sumptuariae [законы о продовольствии и ограничении личных затрат]. Однако,

332. Чрезмерное богатство и его неразумное использование предопределило порчу и, наконец, полный упадок нравов. Наступившие затем неописумые пышность и мотовство римлян подтверждаются примерами.

Глава 18-я. Является ли христианская религия вреднее для заселения, чем языческая религия греков и римлян? Это оспаривается вопреки утверждениям президента Монтескье[21], которые затем опровергаются

333. Мнение Монтескье описано его собственными словами.

334. Нельзя понять, как можно приписывать христианской религии обезлюдение, ибо она столь благоприятна состоянию в браке и удерживает его честь и права в безопасности.

335. Кратко указываются содержание и суть этого опровержения.

336. I. Доказывается, что даже католическая религия, хотя и задерживает возрастание, сама по себе не является причиной обезлюдения.

337. II. Доказательство, что количеством подданных древний Рим обязан не религии, а основным политическим законам и законам земледелия.

338. III. Указано на ложное представление о числе жителей в древней Германии.

339. Она не могла быть населена так же, как теперешняя, ибо имела недостаточно развитое земледелие.

340. Равно как и мало фабрик и всякого вида ремесленников. Далее,

341. Находилась в состоянии постоянных войн и

342. Была пустынна и покрыта лесами.

343, 344. Это подтверждается двумя подсчетами, а именно относящимися к жителям Швейцарии и Бельгии.

345. Ныне Германия должна быть благодарна развитому состоянию искусства и науки, которые пришли к нам вместе с распространением христианской религии.

346. IV. Указаны препятствия к заселению, существовавшие в древнем Риме, которые допускались [их] религией. Против них она совсем ничего не предпринимала, но их устранила христианская религия. Сюда относятся

347. 1) Разврат, который не считался позором.
348. 2) Отвратительный порок педерастии.
349. 3) Ненаказуемое обрекание детей смерти.
350. 4) Нечеловеческие права войны [варварское отношение к военнопленным] и угон в убогое рабство.
351. Указывается количество таких рабов.
352. Если же римское государство несколько обогащалось жителями, тем самым остальный мир опустошался.
353, 354. Доказано и подсчитано страшное смертоубийство в боях гладиаторов.
355. V. Монтескье считал запрет разводов основным препятствием заселению. Однако, теперь доказано, что, напротив, установленное Христом ограничение было в высшей степени разумно и целесообразно, а легкомыслие при разводах имеет самые дурные послествия.
356. Доказано, что ввиду [необходимости] воспитания детей брачный договор должен быть длительным. И также
357. Потому что иначе будут поощряться любые пороки. И также
358. Доказано, что высокая плодовитость менее всего может последовать за непрестанной сменой женщин.
359. Вопреки Монтескье доказывается, что первые римляне относились очень строго к верности и доверию в брачном договоре и что через 500 лет после основания Рима Руга оказался первым, кто развелся, чтобы заиметь детей. И поэтому Рим был плодовит и многолюден.
360. Показаны скверные последствия введенных в дальнейшем легкомысленных разводов, и притом доказана большая легкомысленность римских баб, их погоня за мужчинами и непостоянство. И **361, 362.** Эта тема продолжена.
363. Отсюда сделано заключение о бесплодии браков и убогом воспитании римской молодежи на подобных примерах, а также о преимуществах происшедшего ограничения разводов, за которое следует благодарить Христа.
364. Предложения о заселении, внесенные графом Морицем Саксонским, ставшим учеником Монтескье, были вскоре опровергнуты.

Глава 19-я. Целесообразнее ли для заселения разбивка страны на большое число малых государств? Обсуждается это предложение Монтескье

365. Монтескье полагает разбивку страны на большое число малых республик главным основанием для заселения.
366. Возможность признается.
367. Однако, необходимое последствие этого оспаривается, что подтверждается малыми республиками старой Германии и Америкой.
368. На примере громадного Китая утверждается, напротив, что одно очень большое государство тоже может быть многолюдным, если только для этого применяются нужные средства и если оно управляется образованными и благонравными людьми.
369. Крупные государства к тому же имеют преимущество перед большим числом малых независимых государств в том, что войны происходят не так легко и их не приходится опасаться. [Подобные опасения] были основанием для основных военных законов лакедемонян [Лакедемон = Спарта].

370. Германия представлена образцом правильного разделения и хороших основных законов. Хотя она и разделена на большое число малых государств, но все они управляются одной главой и связаны друг с другом.

371. И поэтому не так важно разделена ли страна, которая всё равно зависит от единого правительства, на большие или малые государства, как верно ли применяются средства для того, чтобы государства могли стать многолюдными, могучими и зажиточными.

Глава 20-я. Попытка определить число людей, которое может проживать на земном шаре и, приблизительно, ныне действительно живущих

372. В настоящее время можно лишь предполагать, потому что бóльшая часть заселенных областей Земли почти совсем неизвестна.

373. Площадь поверхности Земли, 1/4 которой относится к известным странам.

374. Определяется число людей, которые могут обеспечить свое пропитание на одной [квадратной] немецкой миле[22]. По результатам вычисления

375. На известной 1/4 части Земли могут проживать примерно 14 000 миллионов человек. По утверждению Вобана меньше.

376. Отношение [площадей] четырех основных подразделений известной части Земли друг к другу по Стрюйку.

377. По измерениям Темпльмана.

378. Определение возможного числа людей в Европе в соответствии с положением, что на каждой квадратной английской миле проживает 200 человек.

379. Определение действительного числа жителей Португалии и Испании.

380 – 382. Франции, и особенно Эльзаса. **383.** Великобритании.

384. Нидерландов в целом[23]. **385.** Швейцарии. **386.** Италии.

387. Дании и Норвегии. **388.** Швеции и Финляндии. **389.** России.

390. Лифляндии [ныне в Латвии и Эстонии] и Курляндии [в Латвии].

391. Польши и Литвы. **392.** Венгрии. **393.** Европейской Турции.

394. Германии, Чехии, Силезии и Пруссии, всего.

395. Повторение всех подсчетов, которые для Европы в целом приводят к 130 миллионам.

396. Азия. **397.** Мера различных территорий по Темпльману.

398. Китай. **399.** Монгольское государство.

400. Остальные провинции [Азии].

401. Приводятся данные для доказательства возможности большого числа жителей Палестины. **402.** Африка.

403. Мера [площади] некоторых провинций. **404.** Америка.

405. Таблица [жителей], охватывающая весь земной шар по Риччиоли, Шпехту и моим предположениям.

406. Изменчивость и постоянство рода человеческого. Примерно каждую секунду один человек умирает и один рождается.

407, 408. Спасение учения о воскресении против [нападок] Массе и Тиссо.

Глава 21-я. О замечательном порядке в размножении обоих полов

409. Вступление. Свойства этого замечательного Порядка.

410. Установлены и определены при помощи таблицы положения этого Порядка. Сообщено также об исключениях.

411. Из таблиц для различных стран вероятно следует, что эти положения являются всеобщими.

412. Наглядно представлена выдержка из таблиц для Германии, Англии, Голландии, Швеции и Франции.

413. Чаще всего соотношения [между числами мужчин и женщин] оказываются равными 20: 21 или 25:26 и поэтому их следует предпочесть остальным, которые Граунт, Керсебум, Кинг и другие вывели по менее многочисленным данным.

414. Указано применение определения чисел мальчиков и девочек из данного числа родившихся.

415. Предрассудок ученых о Востоке: будто тамошние жители слабее и потому там рождается больше девочек.

416. Это опровергается 1) детьми крестьян на севере, 2) свидетельством г-на Портера[24].

417. 3) Свидетельством иезуитов и миссионеров в Китае.

418. 4) Реальным бюллетенем лютеранских миссионеров в Транкебаре [восточная часть Индии].

419. Свидетельство о преобладании девочек среди рождающихся на Востоке, использованное Монтескье, проверено и опровергается, и притом

420. Двумя таблицами из Амбуана [Молуккские острова] и Батавии [Джакарты, Индонезия].

421. Из постоянства положений этого Порядка 1) заключается, что все приближенное [случайное] здесь отпадает и что это устройство для осуществления Порядка в природе должен был установить Создатель. 2) Затем кратко указаны основные предположения о зачатии и поясняется допускаемое [нами] мнение тех, кто принимает предсуществование праматерии и утверждает, что Создатель выбрал и установил это отношение непосредственно в первом семени.

422. Показано, что поскольку мужские рождения преобладают, в живых должно быть больше мужчин и, следовательно, больше мужчин должно умирать. Это доказано Таблицей №8 по спискам умерших обоих полов.

423. В Таблице №9 показано, что в детстве умирает больше мальчиков, чем девочек, притом в соотношении 27:25, откуда также следует, что девочек к периоду созревания оказывается больше, чем мальчиков и потому

424. Приведенная Граунтом и Дерхамом первопричина преобладания мужских рождений отпадает[25].

425, 426. Преобладание созревших девушек наглядно показано таблицей по голландским деревням. Неравенство оказывается не очень большим.

427. По этой же таблице доказывается существование большого различия между живущими вдовцами и вдовами, из которых последних живет и остается вне брака намного больше. Причина в том, что вдовец может вновь вступить в брак легче, чем вдова с несколькими детьми.

428. Намного большее число живущих вдов подтверждено бюллетенями умерших вдовцов и вдов, а также

429. Бюллетенями вступивших в брак вдовцов и вдов, числа которых относятся как 5:4.

430. Из всего этого заключено, что большинству созревших девушек следует иметь в виду, что вдовец решается жениться вторично на девушке тем охотнее, что иначе он останется вне брака, если только не женится на вдове с детьми. Отсюда, стало быть, снова следует определенное равенство между вступающими в брак.

431. Состояние мужского пола и живущих обоих полов дополнительно подтверждено некоторыми бюллетенями из городов и деревень[26] и

432. Разъяснено некоторыми замечаниями.

433. Наконец, эта глава заканчивается доказательством, что многоженство при этом примерном равенстве зрелых лиц каждого пола не могло бы иметь места без нарушения прав мужского пола. Также обсуждается вопрос, не должно ли многоженство быть запрещено безусловно или только ввиду равной численности полов. И нельзя ли в настоятельных случаях разрешать двоеженство, и может ли благоразумие законодателя посоветовать это[27].

Глава 22-я. О достойном удивления Порядке смертности по возрастам

436 – 438. Введение. Совершенство этого Порядка в смертности.

439. Оно прежде всего доказывается в общем по лондонским бюллетеням за 30 лет.

440. Различие в смертности у жителей городов и деревень.

441, 442. Для этой цели прежде всего представлена таблица вымирания крестьян и отобранных лиц и доказано, что крестьяне в Бранденбурге и в Швеции умирают чаще всего в тех же [возрастных] соотношениях, что и бенедиктинцы [члены католического монашеского ордена] в Париже.

443. Таблица больших городов, – Парижа, Вены, Берлина и др.

444. Доказано неожиданное совпадение [повозрастной смертности].

445. Таблица умирающих в городах по десятилетиям.

446. Добавлены некоторые меньшие города и

447. Сформулированы замечания об этом.

448. Особо составлены бюллетени двух небольших городов.

449. Генеральное или среднее отношение для деревень, малых и больших городов сравнивается с отношением по Керсебуму.

450. Показаны уклонения и совпадения с данными Керсебума.

451, 452. Вымирание детей и молодежи в моей таблице для сельской местности проверено по бюллетеню для всей Померании за 9 лет.

453 – 455. Соображения об упомянутых бюллетенях.

456, 457. Особое рассуждение о ступенях смертности до 25-летнего возраста показано в таблице.

458 – 460. Смертность детей в первые недели и месяцы первого года жизни.

461. Приведена таблица, по которой определяются числа умирающих и живущих на каждом году жизни.

462, 463. Объяснения этого с указанием мнения о таблицах Галлея, Смарта, Керсебума и Депарсье.

464. Важные последствия отсюда и притом 1) определено вымирание всего рода человеческого [вымирание всех живущих] по годам.

465. 2) Отсюда можно узнать число живущих в детстве, в зрелом возрасте и в глубокой старости.

466. 3) Отсюда определяются числа женитьб и детей какой-либо страны.

467. 4) Отсюда определяется сколько человек из данного числа достигнут 20, 50 и более лет.

468. Отсюда заключено, что в нынешнее время люди доживают как раз до тех же лет, как во времена Моисея [до указанного в Псалме 89 возраста].

469. 5) Отсюда можно определить число 80-летних в некотором месте.

470. 6) Число жителей Ниневии [древнейший город Ассирии, ныне Ирака] также определяется отсюда.

471. 7) Вычислено число детей Израилевых [число вышедших из Египта].

472. 8) И сколько было из них каждого возраста в годах.

473. Определение вероятного и среднего сроков жизни.

474. Показано наглядно в таблице.

475. Методы Депарсье и Галлея [Галлея и Депарсье] в основном сходятся, что показано в таблице.

476. Примечания к этой таблице.

477. Приложена еще таблица Стрюйка, которая к тому же указывает на бóльшую длительность жизни у женщин.

478. Что подтверждается также таблицей Керсебума и

479. Таблицей, составленной для деревень.

480. Учет этого различия в пожизненныъх рентах.

481 – 489. Примеры тех, кто дожил до очень глубокой старости.

490. Критические годы отрицаются.

491. Окончание главы.

Глава 23-я. Краткое сообщение о пожизненных рентах и тонтинах, которые основаны на степенях смертности по возрастам

492. Польза предшествующих вычислений в гражданской жизни.

493. Даны понятия о ренте на определенный срок и о пожизненной ренте.

494 – 497. Продолжение пояснения пожизненных рент. Их подсчет основан на среднем сроке жизни для данного общества.

498. История исчисления пожизненных рент, чему первое довольно прочное основание положил Галлей. После него исчисление развили г-да Керсебум, Стрюйк, Депарсье и Хогдсон.

499. Пояснение тонтинной формы пожизненных рент[28].

500. Определение [стоимости] этих пожизненных рент намного легче и безопаснее чем в предыдущем случае ибо покупатель ничем не рискует. Ввиду своего преимущества они более пригодны для государства[29].

501. Эти пожизненные ренты [эти рантье] должны быть подразделены на классы, содержащие 5 лет каждый.

502. Для большей безопасности эти классы не должны быть многолюдны.

503. Можно купить для себя места во многих подразделениях одного и того же класса.

504. Составные тонтины и стоимость ренты в них. Но они весьма сложны и простые тонтины лучше.

505. Другой вид пожизненных рент, при которых рантье должен выждать определенное число лет прежде чем начнет получать ренту, соответствующую покупной цене.

506. Для покупателя ничего неприятного в этом нет, а для продавца, однако, опасно, потому что должны быть учтены не только проценты, но и проценты на проценты[30].

507. Применение рент при крупном государственном займе.

508. Преимущество рент для этой цели.

509. Франция до сих пор неизменно пользовалась простыми [тонтинами], и с тех пор ни разу больше не искала спасения, как это обычно происходит, в удешевлении своей монеты.

510. Указание об уплате крупного капитала в произвольные годы.

511. Полезное применение вычисленных пожизненных рент для вдов, которые могут таким образом обеспечить себе содержание.

512. Другое применение рент[31].

513. Указание на случай, когда кто-то хочет купить пожизненную ренту на 2 или 3 жизни [хочет оплатить взаимное страхование].

514. О моральности пожизненных рент. Не являются ли они греховной игрой? Это отрицается.

515. Может ли суверен в крайних случаях понуждать своих подданных покупать пожизненные ренты [с тем, чтобы государство сразу же получило наличные деньги]? Дается положительный ответ. Но ввиду чужеземцев, желающих совершать подобные сделки, целесообразнее добровольная покупка.

516. Приложение. О некоторых французских заведениях.

Глава 24-я. О Порядке смертности ввиду различных болезней и по сезонам

517. Порядок, указанный выше, предполагает его существование по болезням. Действия и причины [смерти] должны быть пропорциональны друг другу.

518. Доказательство Порядка в болезнях основывается ныне лишь на перечнях из Лондона, в которых он виден для жителей, живущих настолько беспорядочно, насколько это только возможно. Естественный Порядок должен быть установлен по бюллетеням о сельской местности и о целых провинциях, но их у нас еще нет.

519. Перечень умерших в Лондоне за 73 года от главнейших болезней и вычисленные по нему средние числа.

520. Выводы и разделение болезней на 1) неизменно остающиеся постоянными; 2) убывающие, что служит к чести медицины; и 3) возрастающие, причем особо ужасает повышение числа детей, умерших от судорог.

521. Другой специальный перечень из Лондона за 30 лет с пояснением английских названий болезней.

522. Пожелание иметь возможность однообразно указывать название болезней во всех перечнях.

523. Таблица болезней по Берлину за 3 года и ее сравнение с лондонской, которое, однако, названо пока еще неуверенным.

524. Попытка набросать названия, в соответствии с которыми должны составляться перечни болезней.
525. Перечень умерших от несчастных случаев в Лондоне за 30 лет.
526. Размышления об этом и особенно об умерших от голода в богатом Лондоне, а также об убитых молнией и степени опасности и страхе по сравнению с другими несчастными случаями.
527. Особое замечание о возрастании числа детей, умирающих от судорог. Этот вопрос важен для правителей. Необходимость дисциплины и добродетели в народе, чтобы предотвратить причины [смерти].
528. О вариоляции оспы. Возражения против нее опровергаются и доказывается обязанность производить ее. Притом имеются в виду возражения г-на фон Хаена, вопреки которому лучшие врачи одобрили вариоляцию.
529. Вымирание по неделям, месяцам и временам года. Таблица для Берлина.
530. Для Данцига [Гданьска]. **531.** Для Лондона.
532. Для малых городов и поселений в Англии.
533. Заключение по указанным источникам о существующем здесь Порядке.
534 – 536. Доказательство, что весна самый опасный для здоровья и жизни сезон. Причины этого.

Глава 25-я. Применение бюллетеней для определения числа живущих в различных больших городах древности и нового времени и приложение, относящееся к политической арифметике

537. Применение бюллетеней умерших для определения числа живущих.
538. Исходя из данного числа, например, умерших, или из других источников легко определить остальные соотношения[32].
539. Число жителей в некоторых больших городах. В древнем Риме.
540. В Ниневии и Вавилоне. **541.** Число жителей Пекина и **542.** Дели.
543. Константинополя и Алеппо [Халеб, Сирия].
544. Крупные и средние города древнего и нового времени. Лондон и Париж как соперники.
545. Таблица жителей 66 крупных и малых городов Европы.
546. Непостоянство и изменчивость земного тем самым доказаны.
547. Безрассудное желание преувеличить [значение] своего родного города. Стране лучше иметь много небольших городов, чем жить совместно в каком-нибудь Париже.
548. Пример преувеличения [площади и населения] Вены Райфенштулем.
549. Сравнение Лондона с древними и новыми городами по Мэйтленду и указание на их бóльшую величину.
550. Вычисление площадей Лондона и Парижа, из которого, однако, нельзя уверенно определить число жителей.
551. Нельзя также определить число жителей города по числу его домов, что доказывается примерами Берлина, Амстердама, Парижа и Лондона, а также Бристоля.
552. Приложение, относящееся к политической арифметике и выписки из Кинга и Давенанта.

553. Первая таблица Кинга и ее оценка. **554.** Его вторая таблица.

555. Его третья таблица.

556. Четвертая таблица и ее подразделение по возрастам.

557. Пятая таблица и подразделение жителей Англии [без Шотландии и Ирландии] по общественному положению, расходам, доходам и возрастающему богатству [т.е по разности между доходами и расходами].

558. Соображения о таком подразделении людей.

559. Выписка из замечаний Давенанта по таблицам Кинга.

560. Продолжение.

561. Шестая таблица Кинга, по которой можно определить различные подразделения всей земли в Англии, оценить каждый морген и полный урожай.

562. Седьмая таблица Кинга о продуктах лугов, о коровах, лошадях, лесах и т. д.[33]

563, 564. Комментарий Давенанта.

565. Его же задача: разрешать ли мануфактуры шерсти в Ирландии.

566. Оценка его мнения. Заключение и пожелание для отечества.

Примечания

1. Зюссмильх употреблял слово *провинция* расширительно. Так, он называл провинцией всю Пруссию, княжества (§71) и государства (§400).

2. См. библиографию трудов Зюссмильха в первом томе французского издания (Süssmilch 1979 – 1984). В нее же включено то “послание”, которое он отправил Юсти, и, в библиографии других авторов, – сочинение Юсти.

3. Первое издание *Божественного порядка* вышло в 1741 г., второе – в 1765 г. Зюссмильх поэтому мог иметь в виду Вторую силезскую (австро-прусскую) войну 1744 – 1745 гг., или, скорее, Семилетнюю войну 1756 – 1763 гг. между этими же государствами.

4. Зюссмильх был капелланом (армейским священником), а позже – священником и затем членом Оберконсистории (учреждения, ведавшего церковными делами).

5. Этот Кёллн (Cölln) теперь называется Neukölln и является районом Берлина.

6. Ввиду изменчивости условий жизни на Земле, как объясняет Зюссмильх. Впрочем, он никак не отразил этой мысли ни в своем §14 (марш армейского полка, см. ниже), ни, например, в §13.

7. Зюссмильх ни разу не упомянул вряд ли пренебрегаемое количество внебрачных детей. Вот примечательное свидетельство Кетле (Quetelet 1848, p. 169), которое, правда, относилось к позднейшему времени: в Баварии пытались воспрепятствовать опрометчивым женитьбам, и число внебрачных детей почти сравнялось с их числом, рожденным в браке. В §219 Зюссмильх заявил, что следует сопротивляться помехам к браку, а в §256 указал, что государство обязано заботиться о многодетных семьях.

8. Мы можем только предположить, что расчет на две семьи понадобился Зюссмильху, чтобы не вводить дробного (среднего) числа детей в семье. В самом тексте книги §§83 – 88 полностью отсутствуют!

9. Сыпной тиф, см. Györy (1901, p. 114).

10. В древности, как Зюссмильх указывает в основном тексте, города сжигались, а их население угонялось в рабство, тогда как христианская религия положила конец этому варварству.

11. В основном тексте Зюссмильх упоминает секту григенианцев и ссылается на Евангелие от Матфея 19:12, т. е. на скопцов.

12. Принято считать, что в то время существовали только мануфактуры.

13. В тексте Содержания явная ошибка; наш перевод соответствует основному тексту.

14. Зюссмильх полагает, что страна нищает от этих рантье и что по неизвестным причинам они не женятся (и страна, стало быть, лишается детей). Первое замечание было справедливо, но только потому, что государства в те времена продолжали продавать пожизненные ренты по явно заниженным ценам. Неизвестная причина, видимо, останется неизвестной, тем более, что ренту часто покупали на детей и молодых людей.

15. Зюссмильх указывает, что многие матери вполне могли бы сами выкармливать своих младенцев, а не отдавать их подчас крайне нерадивым кормилицам.

16. Во времена Кеплера анатомирование трупов считалось тяжким уголовным преступлением (Kepler 1610, §114).

17. Вариоляцией называлась распространенная, но небезопасная прививка ослабленной оспы от больного здоровому. В частности, она могла способствовать распространению оспы.

18. Зюссмильх нигде больше не упоминает самоубийства. Существовала ли в то время их мало-мальски достоверная статистика?

19. Дословно: культура наук и ученость. Зюссмильх имел в виду добросовестное изучение наук.

20. Зюссмильх, видимо, считал, что цены на продовольственные товары достаточно устойчивы, так что земледелие не было подвержено “опасным изменениям”.

21. Монтескье был президентом “судейских бархатных шапочек” в парламенте города Бордо.

22. Немецкая миля определялась как длина 4′ дуги меридиана, т. е. 7407*м*; в настоящее время – как длина той же дуги экватора (7420*м*). Английская миля (см. §378) – 1609*м*.

23. В то время Нидерланды не представляли собой единого государства.

24. В основном тексте ничего подобного нет.

25. К брачному возрасту численности полов вовсе не уравнивались, как заметил Зюссмильх (опровергая свое утверждение в §14!); девушек оказывалось больше, чем юношей. Затем он обратил внимание на то, что вдовцов было больше, чем вдов, и это успокоило его. Он дополнительно сослался на свой §430, т. е. на то, что вдовцы, еще способные стать отцами, могут жениться на девушках. Его возражения против “неравных” браков (например, §§90 и 255) здесь, видимо, отпадали, а в целом его доводы (недостаточно подкрепленные цифрами) означали, что все женщины могут так или иначе иметь детей.

26. В основном тексте приведены количества “мужчин и вдовцов”, “женщин и вдов” и отдельно сыновей; дочерей; слуг; служанок, а также не то школьников, не то подмастерьев (Lehrjungen).

27. В Содержании, но не в основном тексте, отсутствуют §§434 и 435. В них утверждается, что многоженство противно Богу и вредно для заселения; что будь мужчин вдвое меньше, чем женщин, двоеженство было бы нормой и что оно может разрешаться, но лишь в самых исключительных случаях.

28. См. прим. 5 в разделе 4.

29. Зюссмильх разъясняет, что государство (т. е. продавец рент) может уверенно полагать, что верхний предел человеческой жизни равен 95 годам. Но то же соображение пригодно вообще для любых видов рент, и, опять же, риск покупателя одинаков во всех этих видах: если он умрет рано, то его покупка окажется слишком дорогой.

30. Снова непонятно. Проценты на проценты должны быть заложены в стоимость ренты. Покупатель, как Зюссмильх имеет в виду (и как обычно и происходило), страховал своих малолетних (и здоровых) детей, которые начинали получать ренту в зрелом возрасте. Риск все-таки был, см. прим. 29.

31. В основном тексте мысль Зюссмильха гораздо яснее (и мы не стали переводить текст названия параграфа). Некто выплачивал пожизненную ренту другому лицу, но через какое-то время захотел освободиться от этой обязанности. Какую сумму он должен будет уплатить взамен сразу же? Другим применением рент Зюссмильх, видимо, считал возможность продажи ренты ее обладателем.

32. Фактически Зюссмильх имеет в виду определение остальных абсолютных чисел, например смертности по количеству рождений и соотношению рождаемости и смертности. Он, правда, оговаривается: существуют и исключения.

33. Зюссмильх указывает продукцию земледелия, животноводства и сена, стоимость волов и лошадей. О лесе он и не упоминал.

Армейский полк на марше и Божественный Порядок (там же, §14)

Для пояснения этого Порядка и приданных ему свойств может послужить марш армейского полка. Когда на таком марше не допускается ничего неопределенного; когда солдаты и шеренги следуют одним и тем же образом друг за другом по росту, обмундированию, вооружению и прочему; когда колонны однообразно отделены одна от другой; когда промежутки между шеренгами и между колоннами [сохраняются неизменными, а] полк марширует с неизменной скоростью и т. д., – то здесь виден не только порядок, здесь тем самым прославляется хороший, и даже величайший, совершеннейший и прекраснейший Порядок.

Да будет мне позволено представить этой картинкой прекраснейший Порядок в изменениях рода человеческого. Мудрейший Создатель и Правитель мира разрешает многочисленной рати рода человеческого появиться зачатием из своего небытия и притом стольким, скольких Он определил к жизни. Вечный позволяет нам как бы проходить перед своим лицом до тех пор, пока каждый из нас не дойдет до положенного ему срока и снова не удалится с плаца. Вступление, прохождение перед лицом Командующего и уход, – всё происходит с Порядком, достойным удивления.

Наш приход в край живущих происходит постепенно, без толкотни и в определенных числах, которые Повелитель живущих, равно как и вновь уходящих, непрестанно удерживает в закономерных отношениях. Незадолго до появления в краю живущих некоторые [из нас] как будто отсеиваются; это мертворожденные. Но и этот отсев происходит в определенных пропорциях и особенно достойны внимания при этом выходе из небытия два обстоятельства. Каждый раз на 20 девочек приходит 21 мальчик; а толпа выходящих на свет несколько многолюднее, чем та, которая вновь превращается в прах. И поэтому рать рода человеческого неизменно несколько возрастает, однако в постоянной пропорции.

И если теперь рассматривать многочисленную рать людей как бы на марше, то можно представить их себе разбитыми на различные колонны. Живущие на каждом году человеческого возраста составляют свою колонну или подразделение. Можно также представить себе и более многочисленные колонны, каждая из которых включает 5 или даже 10 лет. В этом случае, однако, ни одна из колонн не будет столь велика как остальные, но каждая неизменно сохраняет свою верную пропорцию относительно всего войска и может быть поэтому определена. Затем, все они имеют друг относительно друга постоянные закономерные отношения. К примеру, если всю рать составляют 1000 миллионов одновременно живущих, то первая колонна это дети, от рождения до пятилетнего возраста, и их несколько более 108 миллионов, от пяти до десяти лет – 65 миллионов, от десяти до пятнадцати – 62, от пятнадцати до двадцати лет – 60 миллионов и т. д.*. Если же общее количество живущих меньше или больше указанного числа, то разделенные толпы неизменно остаются в тех же пропорциях.

Итак, детский возраст составляет наиболее многочисленную колонну. Следующие за ней оказываются всё более короткими, однако все они упорядочены и пропорциональны. Каждой колонне присущи свои особые потери. Более всех они в раннем детстве, но, как и во всех последующих колоннах, они закономерны. На первом году жизни умирает один из трех – четырех, на третьем – один из 25, на седьмом – из 56, на десятом – из 100, на двенадцатом и тринадцатом – один примерно из 132 и т. д. В детстве эти потери несколько выше у мальчиков, чем у девочек и представляется, что они несколько превышают избыток, так что к 15-му и к 20-му годам возникает полное равенство и каждый пол может найти себе брачную пару. И это тот возраст, когда люди в свои дальнейшие годы должны вместе с тем перенять и работы, благодаря чему они обеспечат благополучие и себе, и другим, и, кроме того, предпримут те усилия, при помощи которых может быть исполнен промысл Создателя, а именно заселение Земли и восполнение потерь. При этом, поскольку люди совершают вид творения, здесь выказывается удивительное провидение божественной мудрости. Посредством определенного, заложенного в природе сильного стремления, трудности должны быть преодолены, чему в противном случае могла бы послужить препятствием излишняя предусмотрительность. [Следующее предложение мы приводим только в оригинале: Wiewol dieses wieder auch von Vernunft und Tugend muß geleitet werden, wenn Menschen nicht dadurch in ihrem Laufe anstossen, und ihn zu ihrem Schaden abkürzen wollen.]

Здесь снова проявляется существенный Порядок. Среди тех, кто отодвинулся до двадцатых и тридцатых годов, ежегодно оказываются пропорциональные числа женящихся, и в этом состоит причина того, что в течение нескольких лет общие количества приходящих из тьмы к свету жизни полностью совпадают, что должно казаться почти невозможным при 100 000 рождающихся в год. И эти армии родившихся, как уже представилось, таковы, что они не только чаще всего равночисленны, но сохраняют свое верное соотношение с умирающими. Коль скоро 10 закончат свой путь, 13 новых становятся в строй. Таким образом, уход восполняется и каждый раз 3/10 остается для возрастания. И в течение всей этой работы рода человеческого его колонны движутся всё вперед, и каждый возраст неизменно доставляет мере смертности свой определенный процент. Но тут видна бóльшая чем в первые 15 лет медлительность в изменениях жизненных сил. С первого года до 14 лет они возрастают, так что ежегодно умирает соответственно один из четырех и из 132, а затем сила убывает и в 20-летнем возрасте должен уйти один из 100. И уход ускоряется и потому весь дальнейший путь длится примерно 30 – 35 лет и немногие доводят свою жизнь дольше этого. Происходит пропорциональный и медленный уход. На 25-м году уходит один из 94, на 30-м – один из 89, на 35-м – из 70, на 40-м – из 55, на 45-м – из 50, на 50-м – из 39, на 55-м – из 30, на 60-м – из 25, на 65-м – из 18, на 70-м – из 13, на 75-м – из 10 и, наконец, на 80-м умирает один из восьми или семи. И так до того, пока не останется никому умирать, так что нельзя будет больше точно установить никакой пропорции.

Надеемся, что это образное представление не только пояснит Порядок, но и укажет большинство главных тем нашего рассуждения, которые подобным и равным образом установлены и которые дали нам возможность убедиться в великом, совершеннейшем и великолепнейшем Порядке, который мудрейший Творец определил в наших рождениях, длительности жизни и смерти.

*Эти правила и пропорции будут более точно определены ниже, в главе о возрастах умирающих. Цифры, здесь вскользь упомянутые, основаны на бюллетене умирающих в городах, который я в 1756 г. приложил к напечатанному посланию, отправленному г-ну фон Юсти.

Именной указатель (указаны номера параграфов)

Библиография

Клупт М. (1991), Божественный порядок в изменениях рода человеческого. *Вестник статистики*, №7, с. 65 – 68.

Птуха М.В. (1945), *Очерки по истории статистики XVII – XVIIIвв.* М.

György T. von (1901), *Morbus hungaricus.* Jena.

Kepler J. (1610), *Tertius interveniens.* München, 1971.
Quetelet A. (1848), *Du système social.* Paris.
Süssmilch J.P. (1741), *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlecht, aus der Geburt, dem Tode, und der Fortpflanzung dessselben.* Также издания 1765 и 1775 (почти идентичные), 1775 – 1776, в трех томах, и несколько позднейших того же столетия. Перепечатка первого издания: Berlin, 1977. Перепечатка изд. 1765 г. совместно с томом 3 изд. 1776 г., который состоит из примечаний племянника Зюссмильха (C.J. Baumann): Göttingen – Augsburg, 1988.
--- (1758), *Gedancken von den epidemischen Kranckheiten und dem größeren Sterben des 1757ten Jahres*. В книге автора (1994), *Die königliche Residenz Berlin und die Mark Brandenburg im 18. Jahrhundert. Schriften und Briefe.* Редактор J. Wilke. Berlin, pp. 69 – 116. Содержит несколько рукописей автора, его корреспонденцию, биографию и библиографию.
--- (1979 – 1984), *"L'ordre divin" aux origines de la démographie.* Редактор J. Hecht. Paris. См. описание этого издания в нашем предисловии.

11. Даниил Бернулли и Леонард Эйлер
Уравнивание непосредственных измерений

1. Среднее арифметическое стало универсальной оценкой непосредственных измерений при жизни Кеплера если не раньше (Шейнин 1993, с. 185 – 186; 2005, с. 25 – 26). Обобщенное среднее, т.е. то же среднее с учетом апостериорных весов p_i, назначаемых с учетом результатов наблюдений x_i

$$\hat{x} = \frac{[px]}{[p]}, \qquad (1)$$

где, в обозначениях Гаусса, числитель есть сумма произведений вида $p_i x_i$, а знаменатель – сумма p_i, встречалось уже у Тихо Браге (Plackett 1958; Шейнин 2005, с. 31), а в 1763 г. его применил астроном Дж. Шорт (Short 1763). Он выделил из наблюдений две группы: среднюю и промежуточную с полуразмахами 0.5" и 1" и количествами измерений n_1 и n_2, $n_2 = an_1$, $a > 1$; указанные границы Шорт не обосновал. Далее, он вычислил средние арифметические в каждой группе и, окончательно, среднее из этих средних. Пусть общее число наблюдений $n = bn_1$, $b > a > 1$, тогда веса средних, промежуточных и крайних наблюдений будут пропорциональны, соответственно,

$a + b + ab$; $a + b$; a.

В 1809 г. Гаусс принял без доказательства, что среднее арифметическое весьма близко к наиболее вероятному значению измеряемой константы (и использовал этот *постулат* для вывода нормального распределения как единственного закона для случайных ошибок наблюдения и принципа наименьших квадратов). В 1823 г. он, однако, отказался от указанного подхода и в весьма широких и естественных предположениях обосновал этот принцип (и, в частном случае одного неизвестного, – среднее арифметическое) принципом наибольшего веса (наименьшей дисперсии). Фурье (Fourier 1826, с. 534) определил постоянно употреблявшееся (и употребляемое) понятие *истинная величина* измеряемой константы как предел среднего арифметического при неограниченном возрастании числа наблюдений. Это предложение было забыто, но многие авторы независимо и от него, и друг от друга, вводили его заново (Шейнин 2005, с. 100 – 101).

Принцип наибольшего правдоподобия восходит к Ламберту (Lambert 1760, §303; Шейнин 1971, с. 251 – 252; 2005, с. 92), который, как видно из его рисунка, приложил его к одновершинным и более или менее симметричным плотностям. Ни Даниил Бернулли, ни Эйлер на него не ссылались, хотя оба они, как свидетельствует их переписка (Bopp 1924, pp. 15 – 17; Radelet-De Grave et al 1979, pp. 73 – 74), были знакомы с указанным сочинением Ламберта. Ламберт (1765, §§ 429 – 430; Шейнин 1971, с. 253; 2005, с. 92) кроме того принял плотность распределения одного вида погрешностей наблюдения в виде полуокружности (с неизвестным радиусом) лишь потому, что "не было причин" для ее "угловатости".

Приведенные здесь сведения имеют непосредственное отношение к последующему.

2. Вряд ли можно считать неожиданным обращение Даниила Бернулли к математической обработке наблюдений; он ведь был разносторонним ученым, а сама тема привлекала многих авторов того времени. Кроме Ламберта можно назвать Симпсона и, конечно, Лапласа, который опубликовал свой первый мемуар, относящийся к теории ошибок, уже в 1774 г. Бернулли (§10 мемуара), правда, упоминает свою практику наблюдений (в астрономии?), но о ней, кажется, ничего не известно; в списке его сочинений (Straub 1970) нет ничего подходящего.

Вклад Эйлера в теорию вероятностей весьма скромен (Гнеденко 1958; Шейнин 1972) и возможно, что комментарий к мемуару Д.Б. он написал по просьбе Петербургской академии наук. Тем не менее, его рекомендация (см. ниже в §3) исключительно интересна. Прав был Д.Б., который, узнав о предстоящей публикации и своего мемуара, и комментария, выразил уверенность, что "великий аналист будет рассматривать этот вопрос с совершенно иной точки зрения" (Fuss 1843, т. 1, его письмо Фуссу 18 марта 1778 г., pp. 674 – 677). Добавим, однако, что Эйлер (правда, ослепший за 10 лет до того времени) неверно понял, как Д.Б. определял апостериорные веса.

3. Мемуару Д.Б. предшествовала его рукопись, о которой известно по сообщению Иоганна III Бернулли (1785). Рукопись он получил в 1769 г., но написана она была, со слов автора, намного раньше. Д.Б. принял плотность распределения ошибок наблюдения в виде "полуэллипса" или полуокружности, а в качестве параметра сдвига (оба термина – позднейшего происхождения) предложил обобщенное среднее арифметическое типа (1) с весами

$$p_i = r^2 - (\hat{x} - x_i)^2, \qquad (2)$$

где r – радиус полуокружности, который следовало как-то выбрать по известным x_i. Разумеется, можно было применять последовательные приближения.

В своем основном мемуаре Д.Б. уделил много внимания малопригодности (по его мнению) среднего арифметического и постарался убедить астрономов в желательности более надежной оценки, хотя и признал, что его рассуждения скорее метафизичны нежели математичны. Под метафизикой в те времена понимались умозрительные начала (Асмус 1954).

По контексту мемуара (особо см. §5) несомненно следовало (и это, видимо, и ввело Эйлера в заблуждение, см. выше §2), что автор рекомендовал апостериорные веса, возрастающие к середине вариационного ряда. На самом же деле из его функции правдоподобия для трех наблюдений 0, а и b

$$y = (r^2 - x^2)\ [(r^2 - (x - a)^2]\ [(r^2 - (x - b)^2] = 0,$$

где r – радиус полуокружности, принятой за плотность распределения, следовало, что

$$\frac{x}{r^2 - x^2} + \frac{x-a}{r^2 - (x-a)^2} + \frac{x-b}{r^2 - (x-b)^2} = 0. \tag{3}$$

Искомая оценка $\hat{x}$ оказывалась равной (1) с весами

$$p_i = \frac{1}{r^2 - (\hat{x} - x_i)^2} \tag{4}$$

и могла бы определяться методом последовательных приближений.

Д.Б. не выписал уравнений (3) и (4) и не указал словесно, что апостериорные веса (4), вопреки его соображениям (см. выше), возрастали к краям вариационного ряда. Для параболического распределения рекомендация Д.Б. соответствовала современной идее об оптимальных линейных несмещенных оценках (Сархан, Гринберг 1962), но вряд ли астрономы 18-го века согласились бы с подобными весами.

По самой своей сути применение оценок с апостериорными весами равносильно введению в среднее арифметическое поправки за асимметрию вариационного ряда и Д.Б. по существу так и заявил (Пример 1 в §15).

Подобные оценки неоднократно предлагались и много позже, но вряд ли они интересны: если распределение ошибок наблюдений неизвестно, то апостериорные веса приходится назначать более или менее субъективно, в противном же (весьма редком) случае можно использовать, например, упомянутые выше оптимальные оценки. Скажем в этой связи несколько слов о предложении Ньюкома (Newcomb 1886), см. также Шейнин (1995, с. 179 – 182). Имея в виду наблюдения, которые приходилось делать в неблагоприятных условиях, но напрасно рекомендуя свое нововведение в качестве универсального, он ввел в качестве распределения смесь взвешенных нормальных законов с различными мерами точности. И количество слагаемых в этой смеси, и сами меры, и веса отдельных законов можно было определять только субъективно, а его обобщенный закон, о чем Ньюком, видимо, не знал, не был нормальным. Впоследствии оказалось, что введенные им упрощения сводили его рекомендацию к применению метода наибольшего правдоподобия и оценок с апостериорными весами.

4. Комментарий Эйлера более всего интересен ввиду его рекомендации (§11) определять неизвестный параметр сдвига $\hat{x}$ по условию

$$[(r^2 - (\hat{x} - a)^2]^2 + [(r^2 - (\hat{x} - b)^2]^2 + [(r^2 - (\hat{x} - c)^2]^2 + \ldots = \max. \qquad (5)$$

Поскольку $(\hat{x} - a)$, $(\hat{x} - b)$, $(\hat{x} - c)$, … – уклонения наблюдений от искомой оценки, примерно равные соответствующим погрешностям, их четвертыми степенями можно пренебречь, так что условие Эйлера переходит в

$$(\hat{x} - a)^2 + (\hat{x} - b)^2 + (\hat{x} - c)^2] + \ldots + = \min, \qquad (6)$$

т.е., с неплохим приближением, в принцип среднего арифметического, а при эвристической экстраполяции на случай нескольких неизвестных – в принцип наименьших квадратов. Во всяком случае, сомножители в своем уравнении правдоподобия Эйлер назвал *степенями доброкачественности* наблюдений и условие (5) по существу было равносильно принципу наибольшего веса.

У Эйлера можно усмотреть намек на общность принципа (5), однако, как теперь известно, при заданной плотности распределения можно воспользоваться не средним арифметическим, а оптимальными линейными несмещенными оценками.

5. Наш перевод выполнен с английских переводов, см. Библиографию. После сравнения нескольких сомнительных мест с латинскими оригиналами мы исправили один из коэффициентов полного уравнения четвертой степени в Примере 3 §15 мемуара и явную ошибку в §1 комментария. В том месте английский перевод упоминает исследование высоты Полярной, а через несколько строк – высоту полюса (небесной сферы), тогда как в оригинале в обоих случаях правильно назван полюс. Эйлер, по всей вероятности, имел в виду определение широты места, которая равна высоте полюса над горизонтом, по высоте Полярной (и известным координатам этой звезды). И не было никакого смысла выводить среднее из наблюдений Полярной. Она, как и все остальные звезды, обращается около полюса, так что ее высота непрерывно меняется.

Далее, в заглавии комментария Эйлера переводчик почему-то опустил прилагательное *прославленный*, которое относилось к Бернулли. Наконец, он недопустимым образом модернизировал термин *искусство предположений*, который употребляли и Д.Б., и Эйлер, заменив его на *теорию вероятностей*. Лишь в 1812 г. Лаплас ввел последний термин (заглавие его фундаментального труда было *Аналитическая теория вероятностей*; впрочем, в самом тексте часто встречались и *исчисление*, и *анализ вероятностей*), см. Sheynin (1998). Кроме того, термин *исчисление вероятностей* применял Даламбер (в заглавиях нескольких мемуаров 1761 г. *в Opuscules Mathématiques*, t. 2).

Имеется ошибка и в самом оригинале (Шейнин 1972, с. 50), которую мы выправили: разность долгот Парижа и Петербурга составляет, конечно же, не 1°52’, а $1^h\,52^m$.

Две библиографические ссылки (на Лекселля и на Кассини и Маральдо) отыскал L.G. Du Pasquier, редактор соответствующего тома Полного собрания сочинений Эйлера, см. Библиографию.

Наиболее вероятный выбор из нескольких не согласующихся друг с ругом наблюдений и соответствующее составление наиболее подходящего вывода

Даниил Бернулли

Bernoulli D. (1778), см. Библиографию

1. Астрономы как класс это люди самой тонкой проницательности и им поэтому я решил предложить на обсуждение те сомнения, которые я иногда испытывал о всеобще принятом правиле для обработки нескольких слегка различающихся друг от друга наблюдений одного и того же события. В соответствии с этим правилом наблюдения складываются и полученная сумма делится на их число; после этого и до тех пор, пока не будет собрана лучшая и более достоверная информация, частное признается за истинное значение требуемой величины. Таким образом, если можно считать, что эти несколько наблюдений действительно имеют один и тот же вес, то их центр тяжести принимается за истинное положение исследуемых объектов [исследуемого объекта] и это правило находится в согласии с тем, которое применяется в искусстве предположений, если ошибки всех наблюдений полагаются равновероятными.

2. Но правильно ли считать, что несколько наблюдений имеют равные веса или моменты или в равной мере подвержены любой и каждой ошибке? Разве так же легко допустить ошибки в несколько градусов как во столько же минут? Существует ли всюду одна и та же вероятность? Такое утверждение было бы вполне нелепо и это несомненно объясняет, почему астрономы предпочитают полностью отбрасывать наблюдения, которые они считают слишком далекими от истины, но оставляют другие и, если на то пошло, приписывают им одну и ту же надежность. Эта практика яснее ясного показывает, что астрономы вовсе не назначают одну и ту же основательность каждому сделанному ими наблюдению, потому что они полностью отбрасывают некоторые из них, все остальные же они не только сохраняют, но, более того, обходятся с ними равным образом. Я не вижу, как можно провести разделительную черту между теми, которые должны быть совершенно отброшены, и теми, которые следует полностью сохранять[1]. Может даже статься, что отброшенное наблюдение именно то, которое обеспечило бы наилучшую поправку для других. Тем не менее, я не осуждаю полностью принцип отбраковки того или иного наблюдения; более того, я одобряю его во всех случаях, когда во время наблюдения происходит что-то нежелательное, само по себе вызывающее немедленное сомнение в уме наблюдателя [еще] до того, как он обдумал происшедшее и сравнил результат с другими наблюдениями. Если для неудовлетворенности нет подобной причины, то я полагаю, что все наблюдения без исключения, каково бы ни было их качество, должны быть приняты во внимание постольку, поскольку наблюдатель сознает, что принял все меры предосторожности[2].

3. Сравним наблюдателя с лучником, который посылает свои стрелы в установленную мишень так тщательно, как только может. Пусть эта мишень будет непрерывной вертикальной прямой[3], так что во внимание принимаются лишь уклонения [от нее] в горизонтальном направлении. Предположим, что эта прямая проведена в середине вертикальной плоскости, установленной перпендикулярно визирному лучу, и что вся плоскость по каждую сторону разделена на узкие вертикальные полосы равной ширины.

Теперь. Если выпущено несколько стрел и каждая точка попадания осмотрена и ее расстояние от вертикальной мишени отмечено на листе [бумаги], то, хотя результат ни в коем случае нельзя точно предсказать, можно будет сделать немало разумных допущений, возможно полезных для нашего исследования, если только ошибки [при стрельбе] таковы, что могут с равной легкостью быть как в одном направлении, так и в другом, а их результат [числовая величина] вполне неопределенен и на самом деле устанавливается одной лишь неизбежной случайностью. Так в астрономии ничто, допускающее априорное исправление, не почитается ошибкой. После введения всех тех поправок, которые предписывает теория, каждая последующая поправка, необходимая для согласования нескольких слегка различающихся друг от друга наблюдений, становится исключительно заботой искусства предположений. Что происходит на самом деле в процессе наблюдений, мы, в соответствии с [нашим] предположением, вряд ли знаем, но именно это неведение окажется нашим прибежищем, в которое мы вынуждены будем скрыться[4], если основываемся, как учит искусство предположений, не на самом верном, но на наиболее правдоподобном, не на достоверном, а на наиболее вероятном (*non verissimum sed verisimillimum, non certum sed probabilissimum*). Можно разумно сомневаться в том, что это будет всегда и везде совпадать с обычно принимаемым средним арифметическим.

4. Погрешности, неизбежные при наблюдениях, действительно могут воздействовать на отдельные результаты; и, тем не менее, каждое наблюдение обладает своими правами и не может быть опровергнуто, будь оно единственным, сделанным нами. Поэтому каждое наблюдение должно само по себе быть прочным и доброкачественным, и никто не смеет принимать никакого другого значения кроме того, которое было им установлено. Но, поскольку они взаимно противоречивы, всему множеству наблюдений следует приписать значение, не затрагивающее его частей. Таким образом, отдельным наблюдениям приписывается определенная погрешность; но я полагаю, что из всех бесчисленных способов обращения с погрешностями наблюдения мы должны выбрать тот, который имеет [придает] наивысшую степень вероятности всему множеству в целом.

Правило, которое я здесь предлагаю обсудить, будет принято всеми, если только степень вероятности в отношении каждого наблюдения удастся определить в терминах подхода, признаваемого верным. Я охотно признаю, что это последнее условие не было [мной] преодолено с определенностью, но в то же время я убежден, что не всё равным образом недостоверно и что можно обеспечить лучшие результаты нежели те, которые ожидаются от обычно принятого правила. Посмотрим, не следует ли должным образом принять в этом спорном вопросе определенные предпосылки, которые как-то поспособствуют более высокой вероятности. Я начну исследование с некоторых общих соображений.

5. Если лучник, которого я упомянул в §3, произведет несчетное множество выстрелов, каждый раз со всей возможной тщательностью, стрелы иногда вонзятся в ближайшую от мишени полосу, иногда во вторую, иногда в третью и т. д., и, как следует понимать, равным образом в каждую сторону, в левую ли, в правую ли. Так разве не очевидно, что мы должны будем предположить, что точки попадания на любой полосе расположены гуще и их тем больше, чем ближе она к мишени? Будь все места на вертикальной плоскости, каково бы ни было их расстояние от мишени, равно подвержены попаданию стрелы, самый искусный лучник не имел бы никакого преимущества перед слепым. Но это, однако, является молчаливым утверждением тех, кто принимает обычное правило при оценке значения различных отличающихся друг от друга наблюдений, когда ко всем этим наблюдениям они относятся без разбора. Этим путем [?], следовательно, степень вероятности каждого данного уклонения можно в некоторой мере определить апостериорно, поскольку нет сомнения, что при большом числе выстрелов вероятность пропорциональна их числу, попавшую в полосу, расположенную на данном расстоянии от мишени[5].

Более того, нет сомнения, что наибольшее уклонение имеет свои пределы, которые никогда не будут превзойдены и которые действительно сужаются опытом и мастерством наблюдателя. Вне этих пределов всякая вероятность равна нулю. От этих границ по направлению к мишени, которая находится в центре [на равном удалении от них], вероятность повышается и становится наивысшей на самой мишени.

6. Предыдущее подсказывает некоторую идею о шкале вероятностей для всех уклонений, подобную той, которую каждый наблюдатель должен представить себе. Эта шкала не будет совершенно точной, но достаточно хорошо подойдет к сути вопроса. Установленная мишень это действительно центр сил, к которому притягиваются наблюдатели, но их усилиям противостоят неисчислимые несовершенства и иные крохотные скрытые препятствия, могущие вызвать в наблюдениях небольшие случайные погрешности. Некоторые из них будут действовать в одном и том же направлении и будут накапливаться, другие взаимно уничтожатся в той мере, в какой наблюдатель удачлив. Таким образом, можно понять, что существует некоторое соотношение между происходящими ошибками и действительным истинным положением центра сил; при ином положении мишени результат случайности будет оцениваться иначе. И таким образом мы подошли к определенной задаче об установлении наиболее вероятного положения мишени по заданному положению некоторых точек попадания. Из сказанного следует, что прежде всего надо подумать о шкале (*scala*) между различными расстояниями от центра сил и соответствующими вероятностями. Хоть определение этой шкалы и смутно, она, видимо, подчиняется различным аксиомам, которые нам стоит только удовлетворить, чтобы оказаться в лучшем положении, чем при предположении, что каждое уклонение, какова бы ни была его величина, появляется одинаково легко и потому имеет одну и ту же вероятность.

Представим себе прямую линию, на которой расположены различные точки, разумеется указывающие результаты различных наблюдений. Пусть на этой прямой отмечена некоторая промежуточная точка, принятая за искомое истинное положение. Пусть восставлены перпендикуляры, выражающие вероятности, соответствующие данным точкам. Если теперь провести кривую через концы нескольких перпендикуляров, она [и] будет шкалой вероятностей, о которой мы говорим.

7. Если согласиться с этим, то я думаю, что следующие предположения о шкале вероятностей вряд ли можно будет отрицать.

a) Поскольку уклонения от истинной промежуточной точки происходят с равной легкостью в обоих направлениях, шкала будет иметь две совершенно сходных и равных ветви.

b) Наблюдения вблизи центра сил наверняка окажутся более многочисленными и притом более вероятными; и они будут в то же время менее многочисленными пропорционально своему расстоянию от этого центра. Поэтому шкала с обеих сторон приближается к прямой, на которой по нашему предположению расположены точки наблюдения.

c) Степень вероятности окажется наивысшей в середине, где, как мы предположили, находится центр сил и касательная к шкале в этой точке будет параллельна упомянутой прямой.

d) Если верно, как я предполагаю, что даже наименее благоприятные наблюдения имеют свои пределы, которые лучше всего определит сам наблюдатель, то шкала, если она правильно устроена, пересечет линию наблюдений именно на этих границах [в этих граничных точках]. Ибо на обеих этих крайних точках вся вероятность исчезает и бóльшая ошибка невозможна.

e) Наконец, наибольшие уклонения на каждой стороне считаются в некотором роде границей между тем, что может произойти, и что нет. Поэтому последняя часть шкалы на каждой стороне должна круто приближаться к прямой, на которой расположены наблюдения, и касательная [к шкале] в крайних точках будет почти перпендикулярна к ней[6]. Таким образом, сама шкала укажет, что вряд ли возможно перейти за предположенные границы. Не то, чтобы это условие выполнялось во всей его строгости, если, то-есть, не назначать границы ошибок слишком категорично.

8. Если теперь построить полуэллипс любого параметра [эксцентриситета] на всем поле возможных уклонений как на его оси, это наверняка вполне хорошо удовлетворит всем указанным выше условиям. Параметр эллипса произволен, поскольку мы заинтересованы лишь в пропорции между вероятностями любого заданного уклонения [любых ...]. Каким бы удлиненным или сжатым он ни был бы, будь эллипс построен на той же самой оси, он выполнит ту же самую задачу. Это показывает, что у нас нет основания заботиться о точном описании шкалы. На самом деле мы можем даже применить круг (circulum) [полуокружность] не потому, что математическое рассуждение доказывает, что он [она] является истинной шкалой, а потому, что он [она] ближе к истине, чем бесконечная прямая, параллельная оси; такая прямая предполагает, что несколько наблюдений имеют один и тот же вес, одну и ту же вероятность как бы далеки они ни были от истинного положения. Эта круговая шкала также лучше всего годится для численных вычислений. Здесь имеет смысл заметить наперед, что оба предположения сводятся к одному и тому же во всех случаях, когда заданные наблюдения считаются бесконечно малыми [бесконечно мало удалены от истинного положения]. И они также сходятся, если радиус вспомогательного круга предположен бесконечно большим как будто при отсутствии всяких установленных границ для уклонений. Так, если уклонение наблюдения от истинного положения предполагается равным синусу круговой дуги, вероятность этого наблюдения окажется равной косинусу той же дуги [наоборот]. Назовем вспомогательный полукруг, который я только что описал, *контролирующим*, или *модератором*. Там, где расположен его центр, должно быть назначено истинное положение, которое лучше всего подходит к наблюдениям. Согласимся, что наше предположение обосновано лишь до некоторой степени, но что его следует наверняка предпочесть обычному и для тех, кто его понимает, оно не окажется опасным, потому что результат, которого они достигнут, всегда будет обладать более высокой вероятностью, чем если бы они придерживались обычного метода. Если, в соответствии с существом дела, достоверное решение невозможно, нет никакого другого пути как предпочесть более вероятное менее вероятному[7].

9. Я поясню этот образ рассуждения очень простым примером. Наша конкретная задача состоит в примирении не согласующихся друг с другом наблюдений и потому является вопросом [связанным с] их расхождением. Пусть, стало быть, при трех бросках игральной кости окажется, что при втором броске выпало на одно очко больше, чем при первом, а при третьем, – на два очка больше, чем при втором. Такие броски могут произойти трояко, а именно с результатами 1, 2, 4 или 2, 3, 5 или 3, 4, 6. Ни один из этих бросков нельзя предпочесть двум другим, ибо каждый сам по себе одинаково вероятен. Если вы предпочтете средний, т.е. 2, 3, 5, ваш выбор окажется нелогичным. То же случится, если вы предпочтете считать равновероятными наблюдения, которые, поскольку это касается вас, случайны, будь они астрономическими или какого-нибудь иного рода.

Пусть теперь тот же результат наступит при трехкратном броске двух костей. Здесь тогда будет восемь различных способов его достижения, а именно

2, 3, 5; 3, 4, 6; 4, 5, 7; 5, 6, 8; 6, 7, 9; 7, 8, 10; 8, 9, 11; и 9, 10, 11.

Но они вовсе не равновероятны. Хорошо известно, что соответствующие вероятности пропорциональны числам

8, 30, 72, 100, 120, 80, 40, и 12[8].

Исходя из этой известной шкалы, я буду иметь больше права заключить, что скорее имела место пятая, а не какая-либо иная тройка, потому что она обладает наивысшей вероятностью. Итак, три броска пары костей должны были дать 6, 7 и 9. Никто, однако, не отрицает, что возможно произошла первая тройка 2, 3 и 5, хоть она имеет лишь пятнадцатую долю вероятности пятой тройки. Будучи вынужден выбирать, я просто выбираю то, что наиболее вероятно. Хоть этот пример не вполне согласуется с нашим вопросом, он разъясняет, что́ исследование вероятностей может внести в определение случаев. Теперь я более непосредственно займусь действительной задачей.

10. Прежде всего, я хотел бы, чтобы каждый наблюдатель основательно поразмыслил и установил наибольшую ошибку, которую он с моральной достоверностью (даже навлекая гнев небесный) никогда не превысит, сколь часто ни повторяй он наблюдения. Он должен быть собственным судьей своего мастерства и не ошибаться ни в сторону строгости, ни в сторону снисходительности, хоть и не имеет особого значения, подходяще ли его суждение или несколько ветрено. И пусть он затем приравняет радиус *контролирующего круга* указанной наибольшей ошибке; пусть этот радиус равен r и, стало быть, ширина всего поля сомнений = $2r$. Если вы желаете иметь по этому поводу общее правило для всех наблюдателей, я советую вам приспособить свое суждение к наблюдениям, которые вы действительно сделали. Удвоив расстояние между двумя крайними наблюдениями, вы можете, как я полагаю, с достаточной уверенностью применить его как диаметр контролирующего круга, или, что сводится к тому же, принять радиус равным разности между двумя крайними наблюдениями. Действительно, если сделано несколько наблюдений, достаточно увеличить указанную разность вполовину, чтобы получить диаметр этого круга. Я сам в своей практике удваиваю ее, если имею три или четыре наблюдения и увеличиваю ее вполовину, если их больше. На тот случай, если подобная неопределенность вызовет у кого-то раздражение, недурно заметить, что, сделав наш контролирующий полукруг бесконечным, мы должны были бы притти к обычно принятому правилу среднего арифметического. Но уменьшив этот круг насколько возможно не противореча [наблюдениям], мы пришли бы к среднему из двух крайних наблюдений; я выяснил, что в качестве правила для нескольких наблюдений это менее часто ошибочно, чем я полагал до соответствующего исследования[9].

11. После всех этих предварительных рассуждений остается определить положение контролирующего круга, поскольку имеющиеся несколько наблюдений следует действительно полагать сосредоточенными в его центре. Оно определяется, исходя из того, что все множество наблюдений произошло бы более легко и, стало быть, с более высокой вероятностью, при подобном, а не при каком-либо ином расположении круга. Мы получим истинную степень вероятности всего множества наблюдений, если отметим вероятность, соответствующую [вероятности, соответствующие] нескольким проведенным наблюдениям и перемножим их все точно так, как мы это сделали в §9 [но не в тексте]. И произведение следует продифференцировать и приравнять дифференциал нулю. Таким образом мы получим уравнение, чей корень укажет нам расстояние центра до любой заданной точки.

Пусть радиус контролирующего круга = r, наименьшее наблюдение = A; второе, $A + a$, третье $A + b$, четвертое $A + c$ и т. д. Расстояние центра контролирующего полукруга от наименьшего наблюдения = x, так что $A + x$ обозначит величину, которую наиболее вероятно принять на основе всех наблюдений. По нашему предположению вероятность первого наблюдения, взятого само по себе, должна выразиться как $\sqrt{r^2 - x^2}$, второго наблюдения, как $\sqrt{r^2 - (x-a)^2}$, третьего, как $\sqrt{r^2 - (x-b)^2}$, четвертого, как $\sqrt{r^2 - (x-c)^2}$ и т. д. После этого, в соответствии с правилами искусства предположений, я перемножу эти несколько вероятностей, что даст

$$\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \cdot \sqrt{r^2 - (x-b)^2} \cdot \sqrt{r^2 - (x-c)^2} \quad \cdot \ldots$$

Наконец, если приравнять нулю дифференциал этого произведения, то в силу нашего предположения [полученное] уравнение даст требуемое значение x как обладающее наивысшей вероятностью. Поскольку, однако, указанное количество должно быть приведено к своему наибольшему значению, ясно, что его квадрат будет в то же время приведен к тому же состоянию. И поэтому мы можем для облегчения вычислений применить выражение, целиком состоящее из рациональных членов, т.е.

$$(r^2 - x^2)\,[r^2 - (x-a)^2]\,[r^2 - (x-b)^2]\,[r^2 - (x-c)^2] \ldots$$ [10]

и его дифференциал снова приравнять нулю. Остается добавить, что должно быть учтено столько сомножителей, сколько было наблюдений.

12. Если сделано одно единственное наблюдение, мы должны принять его как истинное. И это указывается нашим предположением, ибо, взяв лишь первый сомножитель $(r^2 - x^2)$, мы получим $-2xdx = 0$ или $x = 0$ и, следовательно, $A + x = A$. Так что в этом случае наше предположение согласуется с обычным.

Если произведено два наблюдения, A и $A + a$, следует учесть два сомножителя, а именно

$$(r^2 - x^2)\,[r^2 - (x-a)^2] = r^4 - 2r^2x^2 + x^4 + 2ar^2x - a^2r^2 - 2ax^3 + a^2x^2,$$

дифференциал которых равен

$$-4r^2xdx + 4x^3dx + 2ar^2dx - 6ax^2dx + 2a^2xdx = 0,$$
$$2x^3 - 3ax^2 - 2r^2x + a^2x + ar^2 = 0.$$

Единственный полезный корень, который дает нам это уравнение[11], это $x = ½a$ и $A + x = A + ½a$. Таково же и поучение обычного предположения. Подобное согласие сохраняется при любом радиусе контролирующего круга. Для случая нескольких наблюдений этот вывод достаточно ясно указывает, что в таких действиях размер контролирующего круга не обязан быть совершенно точным и этого и не следует ожидать. Что при нескольких наблюдениях затруднительно, и я этого не скрываю, так это необходимость очень длительных вычислений и потому я вряд ли осмелюсь предложить нечто большее, чем общее обсуждение таких случаев. Наивысшее значение имеет теория для трех наблюдений; позвольте мне по крайней мере изложить ее.

13. Имея дело с тремя наблюдениями A; $A + a$; $A + b$, мы получим три сомножителя

$$(r^2 - x^2)\,[r^2 - (x-a)^2]\,[r^2 - (x-b)^2]$$

и должны будем отыскать наибольшее значение [этого произведения]. Произведя умножение на самом деле, мы получим

$$r^6 + 2ar^4x - 3r^4x^2 - 4ar^2x^3 + 3r^2x^4 + 2ax^5 - x^6 - a^2r^4 - 2ab^2r^2x + 2b^2r^2x^2 + 2ab^2x^3 - b^2x^4 + 2bx^5 - b^2r^4 + 2br^4x - a^2b^2x^2 - 4br^2x^3 - 4abx^4 + a^2b^2r^2 - 2a^2br^2x + 4abr^2x^2 + 2a^2bx^3 - a^2x^4 + 2a^2r^2x^2.$$

Если мы продифференцируем это выражение и после деления на dx приравняем его нулю, чтобы получить наибольшее значение, мы получим для любых трех наблюдений следующее общее уравнение

$$2ar^4 - 6r^4x - 12ar^2x^2 + 12r^2x^3 + 10ax^4 - 6x^5 - 2ab^2r^2 + 4b^2r^2x + 6ab^2x^2 - 4b^2x^3 + 10bx^4 + 2br^4 - 2a^2b^2x - 12br^2x^2 - 16abx^3 - 2a^2br^2 + 8abr^2x + 6a^2bx^2 - 4a^2x^3 + 4a^2r^2x = 0.$$

Корень этого уравнения, которое-таки имеет пятую степень и состоит из 20 членов, укажет расстояние центра контролирующего круга от первого наблюдения, а величина $A + x$ даст значение, которое следует с наибольшей вероятностью вывести из трех произведенных наблюдений.

14. Если сила наших основных доводов не была взвешена самым внимательным образом, то быть может окажется [лишь] несколько человек, которые усмотрят какую-либо связь между этим огромным уравнением и тем, что представляется очень простым вопросом, ибо обычный ответ таков: $x = 1/3\ (a + b)$. Тем не менее, наше уравнение достаточно хорошо соответствует понятиям, которые возникают в других местах; некоторые из них я сейчас изложу.

a) Если радиус контролирующего круга предположен бесконечным по сравнению с a и b, то все члены [уравнения], кроме тех, в которых r возводится в наивысшую степень, должны быть отброшены. В этом случае наше уравнение сводится к такому весьма простому:

$$2ar^4 + 2br^4 - 6r^4x = 0,\ x = 1/3(a + b),$$

так что обычное правило содержится в нашем уравнении. Если, однако, принять во внимание наше определение, изложенное в §10, станет очевидным, насколько непригодно предположение о бесконечном радиусе и в какой степени становится явным, что его можно заменить каким-нибудь более подходящим.

b) Если принять, что $b = 2a$, станет очевидно, что $x = a$, какое бы значение ни придать радиусу r, и что такой вывод также является общим для обеих теорий. Посмотрим поэтому, что показывает нам уравнение в этом случае. После подстановки этого значения b, уравнение становится

$$6ar^4 - 6r^4x - 36ar^2x^2 + 12r^2x^3 + 30ax^4 - 6x^5 - 12a^3r^2 + 36a^2r^2x + 36a^3x^2 - 52a^2x^3 - 8a^4x = 0.$$

И это уравнение удовлетворяется при $x = a$ каково бы ни было значение r, что и требуется по сути данного случая.

c) Если $b = -a$, x должно быть равно 0 каково бы ни было значение r. Это тоже прекрасно видно из нашего уравнения, которое теперь принимает вид

$$-6r^4x + 12r^2x^3 - 6x^5 - 2a^4x + 8a^2x^3 = 0.$$

Беглый взгляд покажет, что полезный корень здесь $x = 0$[12].

15. Это и другие подобные следствия достаточно подтверждают действительную связь наших основных доводов с обсуждаемым вопросом, каким бы громадным найденное нами уравнение ни казалось в столь простом исследовании. Я перехожу к примерам, в которых радиус контролирующего круга не бесконечен и не безразличен и именно таковы практически все случаи. В этих примерах наша новая теория всегда приводит к результату, отличающемуся от обычного; и чем больше промежуточное наблюдение приближается к любому из крайних, тем больше это различие. Все дело зависит от обсуждения подобных случаев, так что мы должны прибегнуть к чисто количественным примерам.

Пример 1. Допустим, что имеются три наблюдения, A, $A + 0.2$ и $A + 1$, так что $a = 0.2$ и $b = 1$[13]. Пусть значение, которое следует принять как наиболее вероятное исходя из этих трех наблюдений, это $A + x$. Обычное правило приводит к $x = 0.4$. Посмотрим, [что даст] новое, которое мне представляется более вероятным и примем $r = 1$ (ср. §10). Мы приходим к следующему только лишь числовому уравнению

$$1.92 - 0.32x - 12.96x^2 + 4.64x^3 + 12x^4 - 6x^5 = 0,$$

решение которого примерно равно $x = 0.4427$, что превышает обычно принимаемое значение более чем на десятую часть. Этот заметный избыток вызван тем, что промежуточное наблюдение намного ближе к первому, нежели к третьему. Отсюда легко вывести, что избыток станет недостатком, если среднее наблюдение окажется ближе к третьему, чем к первому и что чем ближе оно будет к среднему из двух крайних, тем меньше станет этот недостаток. Для проверки этого предположения я сохраняю крайние значения и изменяю одно только среднее как показано ниже.

Пример 2. Пусть теперь $a = 0.56$ и, как раньше, $r = b = 1$. По обычно принятому правилу мы получим $x = 0.52$. Посмотрим, что произойдет по нашему правилу. Уравнение §13 приведет к следующему численному уравнению

$$1.3728 + 3.1072x - 13.4784x^2 - 2.2144x^3 + 15.6x^4 - 6x^5 = 0,$$

которое приблизительно удовлетворяется при $x = 0.5128$ [намного точнее значение 0.5110]. В соответствии с нашими принципами, значение x меньше обычно принимаемого среднего арифметического, но различие между этими двумя числами теперь весьма невелико, а именно 0.0072, что получилось в точности как я и ожидал. Можно, следовательно, также усмотреть, что наибольшая разность между этими двумя оценками имеет место тогда, когда два наблюдения в точности совпадают и отличается [от них] только третье. Здесь возможны два случая, а именно $a = 0$ и $a = b$. Я опишу результат каждого из них.

Пример 3. Примем $a = 0$, оставив остальные численные величины без изменения. Разделив на $(2b - 2x)$, мы получаем следующее численное уравнение

$$1 - 6x^2 - 2x^3 + 3x^4 = 0.$$

Оно приблизительно удовлетворяется при $x = 0.3977$, тогда как значение x, полученное по общему правилу, равно $x = 0.3333$. Первое превышает второе на 0.0644. Если, однако, принять $a = b$ [= 1] и разделить на $2x$, то мы получим уравнение

$$4 - 6x - 6x^2 + 10x^3 - 3x^4 = 0.$$

Оно приблизительно удовлетворяется при $x = 0.6022$, а обычное значение 0.6666 [0.6667]. Таким образом, разность между двумя значениями снова 0.0644, но на этот раз наше новое значение меньше обычного, тогда как в предыдущем случае оно было больше. Ясно теперь, что наш метод учитывает некоторую промежуточную точку лучше, чем обычный. Подобные основания существенно рекомендуют предлагаемый мной метод и я несколько подробнее остановлюсь на этом соображении, если *довод к человеку* (*argumentum ad hominem*) может быть принят в деле, которое не допускает математического доказательства.

16. Если мы объединим оба случая в Примере 3 и предположим, что было сделано шесть наблюдений, а именно A, A, $A + b$ и $A + b$, $A + b$, A, то станет ясно, что три наблюдения приводят к значению A и такое же их число – к значению $A + b$. В §12 мы видели, что в этом случае оба метода дают требуемое среднее значение, равное $A + ½b$, или, в Примере 3, $A +$ 0.5; или, если исключить постоянное количество A, просто 0.5. Никто не будет подвергать сомнению это значение, выведенное из шести объединенных наблюдений. Но давайте теперь разделим эти шесть наблюдений на две другие тройки, а именно A, A, $A + 1$ и $A + 1$, $A + 1$, A. В этом случае, снова исключая величину A, обычно принимаемое правило даст для первой тройки 0.3, а для второй, 0.6, притом оба эти значения отличаются на 0.16, одно в сторону недостатка, другое в сторону избытка, от среднего 0.5. Итак, для каждой тройки наблюдений, взятой самой по себе, обычная теория приводит к погрешности в 0.16, тогда как наша ошибочна на 0.1022, что заметно меньше. Можно привести еще намного больше свидетельств такого рода, чтобы дополнительно подкрепить наш основной довод, но, если я буду продолжать, боюсь, что окажусь невоздержанным, распространяясь о чем-то, что не может быть установлено достоверно, с полным совершенством. У нас нет цели возвышенней, чем быть в состоянии отличить более вероятное от того, что менее вероятно.

17. Такое дальнейшее совершенство, какого мы можем разумно ожидать, состоит в более строгом и точном установлении контролирующей шкалы и ее ширины. Я добавлю несколько дальнейших замечаний по этой теме. Из предыдущих рассуждений ясно, что наши оценки не очень уж отличны от обычно принятого правила, так что вопрос состоит в [отыскании] определенной поправки, которую оно, видимо, допускает. Эта поправка выводится по имевшим место уклонениям наблюдений от требуемой истинной точки, поскольку последние могут быть расположены так, что при любой заданной ширине контролирующей шкалы наиболее вероятное будет соответствовать этой точке. Но, что до меня, я не вижу никакого способа строго устанавливать ширину этой шкалы кроме упомянутого в §10.

Если наблюдатель, ввиду излишнего недоверия в свои собственные силы, чрезмерно увеличит размеры контролирующего полукруга, он не получит всей возможной пользы, но то, что он получит, будет более достоверно. Если, с другой стороны, он излишне сократит шкалу, то при прочих равных условиях вычисленная поправка окажется немного большей и несколько менее вероятной. Благоразумие представляется здесь настолько же необходимым как проницательность. Если вы хотите использовать действительно сделанные вами наблюдения в качестве основы для апостериорной оценки ширины будущей контролирующей шкалы, было бы благоразумно взвесить в уме, не следует ли считать эти наблюдения удачливыми. Чем больше вы припишете удаче, тем меньше вы сможете отнести за счет мастерства в приложении к наблюдениям и тем больше таким образом окажется применяемый вами впоследствии контролирующий круг. В §13 я предположил, что $r = b$ или, иными словами, что радиус контролирующего круга был равен расстоянию между двумя крайними наблюдениями. Тем не менее, после основательного обдумывания я признаю, что такая величина радиуса видимо свидетельствует о несколько излишней уверенности. Для будущего было бы наверняка безопасней принять $r = 3/2b$ или даже $2b$. Если это так, то поправка окажется значительно меньше, но зато более достоверной и заслуживающей большего доверия.

18. Если в наших принципах есть какая-нибудь обоснованность, хоть они скорее метафизического [философского], а не математического характера, мы можем, исходя из них, разумно заключить, что следует разве лишь изредка отбрасывать наблюдение и никогда не делать этого без предельной осторожности. Я уже привел свое мнение по этому вопросу в §2. Все множество наблюдений является лишь случайным событием[14], видоизмененным и заключенным в определенные границы мастерством наблюдателя. Вполне может случиться, хоть и весьма редко, что из трех наблюдений два удивительным образом совпадают, третье же к несчастью очень далеко отстоит от двух других. Но если это случится со мной и если я уверен, что не сжал чрезмерно границы наибольшей возможной ошибки и не выказал излишней уверенности в своем мастерстве, я не колеблясь стану исследовать этот случай по нашим принципам и установлю по ним свою оценку. Но наблюдатель должен уделить равное внимание каждому из наблюдений. Я хотел бы, чтобы ко всем им относились одинаково.

19. Единственно остающееся предостережение относится к примененной мной контролирующей шкале. Мы приняли полукруг, поскольку он в достаточной мере соответствует условиям, указанным в §7, и в то же время является наиболее подходящим для вычислений, которые приходится выполнять. Но стоит также заметить, что существуют другие [и притом] бесконечные кривые, которые несомненно приводят к тому же уравнению как полученное в §13. В §11 мы приняли для круговой шкалы вероятности, пропорциональные, соответственно,

$$\sqrt{r^2 - x^2}\,;\sqrt{r^2-(x-a)^2}\,;\sqrt{r^2-(x-b)^2}\,.$$

Теперь, если вместо полукруга мы предположим параболу (*arcum parabolicum*), построенную на отрезке $2r$, ось которой проходит перпендикулярно через его середину, тогда, в тех же обозначениях, мы получим перпендикуляры или соответствующие вероятности, выраженные ими

$$(\rho/r^2)\ (r^2 - x^2),\ (\rho/r^2)\ [r^2 - (x - a)^2],\ (\rho/r^2)\ [r^2 - (x - b)^2],\ \text{etc},$$

где новая буква ρ обозначает перпендикуляр наибольшей длины с абсциссой $x = 0$. Поскольку сомножитель (ρ/r^2) является общим для всех членов, мы можем после отыскания наибольшего значения произведения всех вероятностей просто заменить его единицей**[15]**. Отсюда следует, что параметр параболы всегда произволен. Я также указал в упомянутом §11, что если это произведение приводится к своему наибольшему значению, все его степени окажутся в то же время либо максимальными, либо минимальными [было указано нечто меньшее]. Отсюда ясно, что обе шкалы, и параболическая, и круговая, приводят к одному и тому же требуемому значению x**[16]**. Более того, очевидно, что ту же самую задачу выполнит бесконечное множество других шкал. Все они будут обладать тем свойством, что, начиная со своей вершины, они с каждой стороны приближаются к отрезку $2r$, на котором, как мы по необходимости предположили, расположены наблюдения и пересекают его. Поэтому все шкалы такого вида выполняют нашу цель и нам не следует быть в этом деле слишком педантичными, поскольку мы довольствуемся стремлением если не к наилучшему, то к чему-нибудь лучшему.

20. Наконец, что касается неудобной, если не сказать безобразной формы нашего основного уравнения, составленного в §13, мы можем несколько поубавить неуклюжесть, ибо я приближенно выражаю полезный корень в виде

$$x = \frac{a+b}{3} + \frac{2a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 2b^3}{27r^2}.$$

Первый член это ничто иное, как обычное среднее арифметическое трех наблюдений; второй приближенно указывает дальнейшую поправку, требуемую нашими принципами. Этот корень будет действительно тем более точно соответствовать уравнению §13, чем более широкой принята контролирующая шкала, обозначенная через $2r$. Но мы далеки от того, чтобы без необходимости увеличивать значение буквы r только лишь для того, чтобы облегчить вычисления, ибо каждое бесполезное увеличение несколько убавляет величину нашей поправки. И было бы не менее опасно приписывать слишком много своей способности наблюдать и таким образом необоснованно укорачивать радиус r. “Существуют неизменные границы, вне которых справедливость [или: правосудие] не могут существовать”**[17]**; ср. §10. Уже сами наши принципы указывают, что r не может быть меньше, чем ½b, потому что это [что противное] приведет к явному противоречию, а именно к объявлению невозможным того, что по предположению действительно имело место. Я, однако, не скрыл допущений несколько произвольного характера, сделанных в ходе нашего обсуждения вопроса, но мне не следовало бы думать, что все наши методы оценивания произведенных наблюдений должны быть поэтому отвергнуты. Я по крайней мере уверен в том, что *для трех наблюдений обычное правило дает несколько* *преуменьшенный результат если $a < 1/2b$ и преувеличенный результат при $a > 1/2b$ и никогда не может быть применен с большей достоверностью, чем при расположении промежуточного наблюдения примерно на равном расстоянии от обоих крайних.*

Во-вторых, я почитаю вероятным, что наше уравнение в §13 обеспечивает более надежное и лучшее определение выбираемого положения, если только радиус контролирующего круга не уменьшен опрометчиво внутрь границ, допущенных возможностями наблюдателя, ср. §17. Вопрос, который я обсуждал, по сути таков: даны три или большее число выстрелов лучника, отмеченные на прямой; требуется определить наиболее вероятное положение точки, в которую он целился. Но любой и каждый наблюдатель, понимающий эти вещи, составит для себя мерило, отвечающее его цели в соответствии с сутью того спорного вопроса (*argumento*), с которым он имеет дело, если только он предусмотрительно применяет правила, выведенные из теории соединений.

Сводка. По самой своей сути наша задача является неопределенной, поскольку зависит от практики, опыта и мастерства наблюдателя, от точности приборов, остроты его чувств, – короче, от бесчисленных обстоятельств, которые могут быть более или менее благоприятны. Все это будет принято во внимание при выборе ширины поля возможных уклонений. Я сообщил свое мнение [по этому вопросу] со всей осмотрительностью. Во-вторых, следует рассмотреть конкретное действие случая, благосклонное любому данному уклонению (буквальный перевод с латинского: действие капризного случая, которое благосклонно любому уклонению – прим. Аллена), поскольку оно благоприятно если каждому данному уклонению приписана вероятность, подходящая сути рассматриваемого случая. (Я заменил в тексте *cuiuis aberratione* на *cuiuis aberrationi* – прим. Аллена.)

Эта шкала вероятностей конечно же остается в свою очередь ненадежной и неопределенной если считать, что желательна точная, но тем не менее, по самой сути дела, она указывает несколько свойств. И если они выполнены, шкалу можно считать достаточно установленной, как я выяснил из нескольких опытов. И таким образом, в соответствии с доказанными началами искусства предположений, обнаружен метод выражения абсолютной вероятности, подходящей любому [искомому истинному] положению, принятому для любой данной системы наблюдений. Остается лишь выбрать такое положение рассматриваемой системы, которое обладает высшей вероятностью. Мне поистине представляется необычным, что алгебраическое уравнение, определяющее это положение, которое [как бы] притянуто за уши, доходит до пятой степени всего только для трех наблюдений, состоит из очень большого числа членов и выведено из принципов, никогда раннее не применявшихся, тем не менее, с какой бы стороны его ни рассматривать, не приводит ни к чему мало-мальски неприятному и еще менее того к какому-либо нелепому результату. Конечный итог, вычисленный в любом примере, мало отличается от того, который указывается обычным методом, если только не принимать составленные мной наставления черезчур поспешно. Там, где сравнение трех данных наблюдений [друг с другом] показывает, что среднее находится примерно на равном расстоянии от крайних, мы будем не колеблясь придерживаться обычного правила; но если эти два промежутка заметно неравны, я думаю, что лучше будет обратиться к нашей теории, если только следовать изложенным мной наставлениям и проявлять наивысшую предусмотрительность при определении обоснованных границ для поля возможных уклонений. Желательно, чтобы все это было взвешено скорее в метафизическом, а не математическом смысле. Тем, кто в наибольшей степени потрясен нашими принципами, не придется ничего больше опровергать, лишь прими они, что поле возможных уклонений так велико [широко] как только возможно.

Замечания к предшествующему рассуждению прославленного [Даниила] Бернулли

Л. Эйлер

Euler L. (1778), см. Библиографию

1. Вопрос, который наш выдающийся друг Бернулли здесь рассматривает, имеет немалое значение, а именно: Как следует вывести неизвестное количество по нескольким, слегка отличающимся друг от друга наблюдениям. Чтобы суть вопроса было легче распознать, примем, что в некоторой точке подлежит исследованию высота полюса и что наблюдения, которые были для этого произведены, привели к следующим, различающимся друг от друга значениям

$\Pi + a, \Pi + b, \Pi + c, \Pi + d, \ldots$

где буквы $a, b, c, d, \ldots$ считаются выраженными в секундах. Исходя из этих результатов, следует вывести истинную высоту полюса в указанном месте, $\Pi + x$. Обычно эта величина, x, получается вычислением среднего арифметического из всех этих количеств, a, b, c, d, и т. д. Следовательно, если число наблюдений $= n$, то $x = (a + b + c + d + \ldots)/n$.

2. Это правило явно предполагает, что все наблюдения имеют одну и ту же степень доброкачественности. Ибо, будь некоторые точнее остальных, это отличие должно было бы учитываться при вычислениях. И хотя при существующих обстоятельствах нет никакой видимой причины, почему одному из этих наблюдений должно быть придано большее значение чем остальным, тем не менее ученый автор замечает, что этим наблюдениям следует приписывать тем более высокую степень доброкачественности, чем ближе они приближаются к истине. И напротив, группе наблюдений, которая, как полагают, слишком далеко уклоняется от истины, обычно полностью отбрасывается. Все дело поэтому сводится к тому, чтобы показать, как следует оценивать степень доброкачественности, соответствующую имеющимся наблюдениям.

3. В соответствии с такой точкой зрения выдающегося автора было бы удобно рассматривать уклонения каждого наблюдения от истины по известным правилам. Они будут равны $(x - a)$ для первого наблюдения, $(x - b)$ для второго, $(x - c)$ для третьего и т. д., однако несовершенство каждого наблюдения следует оценивать не столько по этим разностям, сколько по их квадратам, поскольку несовершенство само по себе следует считать тем же самым, ошибочно ли наблюдение в сторону избытка или недостатка. Таким образом, если наблюдение вполне согласуется с истиной, его несовершенство будет равно нулю. Поэтому, если обозначить через r^2 его степень доброкачественности, ясно, что для первого наблюдения она должна быть указана величиной $[r^2 - (x - a)^2]$, для второго, величиной $[r^2 - (x - b)^2]$, для третьего, $[r^2 - (x - c)^2]$, и т. д.[18], притом значение r здесь таково, что для наблюдения, которое должно быть почти отброшено, степень доброкачественности исчезает. Если предположить, что это имеет место для наблюдения с результатом $\Pi + u$, то, поскольку его степень доброкачественности равна $[r^2 - (x - u)^2]$, следует признать для всех случаев, что $r^2 = (x - u)^2$.

4. Установив эти следствия по поводу степени доброкачественности каждого наблюдения, выдающийся автор обращается к следующему принципу, впрочем не приводя для этого никакого обоснования: произведению всех выражений, определяющих степени доброкачественности наблюдений, должно быть придано наибольшее значение. Исходя из этого принципа, стало быть, он предлагает продифференцировать полученное произведение и приравнять дифференциал нулю, поскольку это [полученное] уравнение приведет тогда к истинному значению x. Он разъясняет это несколькими примерами, основанными на группах из трех наблюдений и выводя из них значения x, которые, видимо, вполне соответствуют истине.

5. Только лишь для трех наблюдений этот принцип привел к уравнению пятой степени, корень которого x надо было отыскивать; и кто захочет применить его к четырем наблюдениям, придет к уравнению седьмой степени, пять наблюдений приведут к уравнению девятой степени и т. д. Таким образом, совершенно понятно, что этот метод невозможно применять при нескольких наблюдениях и выдающийся автор, который представил все [свое] рассуждение как чисто метафизическое предложение, действительно это честно признает.

6. Поскольку, однако, выдающийся автор не обосновал этот принцип максимума никаким доказательством, он не обидится, если я предложу для обсуждения некоторые сомнения в нем. Если мы допустим, что одно из исследуемых наблюдений должно быть почти отброшено и что поэтому его степень доброкачественности будет столь низка как только возможно, то ясно, что произведение всех упомянутых выражений на деле окажется сведенным на нет, так что его нельзя будет считать максимальным каким большим оно не стало если это наблюдение должно быть опущено. Но вот принципы искусства предположений делают совершенно понятным, что значение неизвестной величины x должно оказываться тем же самым было ли подобное наблюдение, вовсе не обладающее доброкачественностью, введено в вычисления или полностью отброшено[19].

7. Я не думаю, что здесь необходимо обращение к принципу максимума, поскольку бесспорные начала искусства предположений вполне достаточны, чтобы разрешить все подобные вопросы[20]. Если первому наблюдению, приведшему к $\Pi + a$, приписано количество или степень доброкачественности (*pretium seu gradum bonitatis*) α, второму β, третьему γ, то по правилам этого искусства неизвестное количество x определяется как

$$x = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + ...}{\alpha + \beta + \gamma + \delta + ...}.$$

Следовательно,

$$\alpha\,(x-a)+\beta\,(x-b)+\gamma\,(x-c)+\delta\,(x-d)+\ldots=0.$$

Ясно теперь, что если все степени доброкачественности равны друг другу и число наблюдений n, мы должны получить $x = (a + b + c + d + \ldots)/n$, как и требуется обычным правилом. Отсюда следует, что различные значения для неизвестного количества x могут появиться в той мере, в какой степени доброкачественности отличаются друг от друга.

8. Поскольку, стало быть, как заявляет сам выдающийся автор, степени доброкачественности, обозначенные буквами α, β, γ, δ равны

$$\alpha = r^2-(x-a)^2,\ \beta = r^2-(x-b)^2,\ \gamma = r^2-(x-c)^2,\ \delta = r^2-(x-d)^2,\ \ldots$$

то найденное нами уравнение становится

$$r^2(x-a)+r^2(x-b)+r^2(x-c)-(x-a)^3-(x-b)^3-(x-c)^3+\ldots=0.$$

Если, следовательно, число наблюдений n и если мы для краткости обозначим

$$a+b+c+d+\ldots=A,\ a^2+b^2+c^2+d^{\,2}+\ldots=B,$$
$$a^3+b^3+c^3+d^{\,3}+\ldots=C,$$

то это уравнение примет достаточно простую форму

$$nr^2x-Ar^2-nx^3+3Ax^2-3Bx+C=0.$$

Мы таким образом пришли к кубическому уравнению, из которого легко может быть найдено неизвестное x каково бы ни было число наблюдений n.

9. Если считать величину r бесконечной, что имеет место в случае, когда всем наблюдениям приписана та же самая степень доброкачественности, мы можем пренебречь всеми другими членами и непосредственно вывести из этого уравнения следующее выражение:

$$x=\frac{A}{n}=\frac{a+b+c+d+\ldots}{n},$$

в точности как требуется обычно принятым правилом. Если полученное выражение [для x] обозначить через p и заменить в самих наблюдениях П + p на П, мы должны будем уменьшить заданные несколько чисел a, b, c, d, … на то же количество p и потому сумма всех этих чисел, которую мы обозначили через A, окажется равной нулю. Однако, чтобы избежать сейчас введения новых букв в вычисления, мы можем с самого начала так составить количество П, что если значения наблюдений заданы в виде П + a, П + b, П + c, П + d и т. д., сумма букв

$$a+b+c+d+\ldots=0.$$

И тогда, для вывода количества x мы будем иметь следующее намного более простое уравнение

$$nx^3 - nr^2x + 3Bx - C = 0,$$

из которого при бесконечном r оказалось бы, что $x = 0$. Ясно, стало быть, что если это уравнение имеет несколько [три] действительных корней, за x следует признать наименьшее[21], так что требуемое истинное значение будет $\Pi + x$.

10. Тот же вопрос может быть сведен даже к квадратному уравнению введением наблюдения такого рода, которое, после взвешивания всех обстоятельств, мы решили бы полностью исключить. Пусть такое наблюдение будет $\Pi + u$ и, так как по предположению его степень доброкачественности $r^2 - (x - u)^2 = 0$, окажется, что $r^2 = (x - u)^2$. Введение этого значения в последнее найденное нами уравнение приводит к следующему:

$$2nux^2 - nu^2x + 3Bx - C = 0.$$

Удобно полагать, что член $-nu^2x$ здесь является наибольшим, так что это уравнение может быть выражено как

$$x\,(nu^2 - 3B - 2nux) = -C,$$

откуда следует

$$x = \frac{-C}{nu^2 - 3B - 2nux}.$$

Подставляя [в правую часть] только что полученное значение x, мы получим следующую непрерывную дробь

$$x = \frac{-C}{nu^2 - 3B +}\,\frac{2nuC}{nu^2 - 3B +}\,\frac{2nuC}{nu^2 - 3B +}\ \text{etc},$$

которая вскоре [после учета нескольких подходящих дробей] даст истинное значение самого x.

11. Поскольку выдающийся автор обосновал свое решение на принципе максимума, нетрудно было бы теперь представить аналитическую формулу такого вида, которая, будучи приравнена своему наибольшему значению, даст нам истинное значение x. Используем для этой цели раннее выведенную формулу

$$r^2(x - a) + r^2(x - b) + r^2(x - c) - (x - a)^3 - (x - b)^3 - (x - c)^3 + \ldots = 0.$$

Ее можно считать дифференциалом определенной формулы, которую следует привести к максимуму. Сама же формула появится, если это выражение представить в виде дифференциала и проинтегрировать. Умножая на $4dx$ и проинтегрировав, мы получим

$$2r^2\,(x - a)^2 + 2r^2\,(x - b)^2 + 2r^2\,(x - c)^2 + \ldots$$

$-(x-a)^4-(x-b)^4-(x-c)^4-\ldots+\text{Const}.$

Если принять за константу – nr^4, где n – число наблюдений, то после перемены знаков появится следующая формула

$$[r^2-(x-a)^2]^2+[r^2-(x-b)^2]^2+[r^2-(x-c)^2]^2+\ldots$$

12. Следовательно, вместо формулы, которую наш выдающийся друг Бернулли счел нужным приравнять ее наибольшему значению, мы теперь пришли к иной формуле, весьма хорошо приспособленной к сути вопроса, поскольку она получена сложением квадратов всех степеней доброкачественности[22]. При приведении ее к максимуму она обеспечит истинное значение x.

13. Чтобы представить пример [на приложение] нашего метода, давайте рассмотрим наблюдения, при помощи которых долгота обсерватории Петербурга выводится по разностям меридианов Парижа и Петербурга[23]. Они, в соответствии с отчетами, таковы

$$1^h51^m50^s,\ 1^h51^m52^s,\ 1^h51^m39^s,\ 1^h51^m50^s,\ 1^h51^m50^s,\ 1^h51^m50^s.$$

Вычисляя обычным путем их среднее арифметическое, мы получаем $1^h51^m48½^s$.

14. Применим теперь наши формулы к этому случаю, приняв П = $1^h51^m48½^s$. Значения наших шести букв будут

$a = 1½$, $b = 3½$, $c = -9½$, $d = 1½$, $e = 1½$, $f = 1½$.

Их сумма $A = 0$; сумма квадратов окажется равной ½ ·223; сумма кубов = – 801. Поэтому для $n = 6$ наше уравнение будет

$$12ux^2-6u^2x+801+334½x=0.$$

15. Определим теперь число u, исходя из такого случая [наблюдения], как $1^h52^m20^s$, которое, как полагает наблюдатель, следует отбросить, что дает нам $u = 31½$. Предположим, что $u = 30$, тогда наше квадратное уравнение примет вид

$$360x^2-5065½x+801=0,$$

вместо которого мы можем в округленных числах написать

$$36x^2=500x-80.$$

Отсюда

$$x=\frac{250\pm\sqrt{59\,620}}{36},$$

т.е. либо $x = [(250 + 244)/36] = 14$, либо $x = [(250 - 244)/36] = 1/6$. Только второе значение может быть рассмотрено. Мы могли получить его сразу же, пренебрегши первым членом уравнения; значение x было бы тогда 50/8 или примерно 1/6. Требуемая разность меридианов поэтому будет равна $1^h51^m48\ 2/3^s$.

16. Опять же, предположив, что было отброшено наблюдение, которое дало $1^h51^m0^s$, мы получили бы $u = -48½$. Примем $u = -48$, что даст уравнение

$$-576x^2 - 13\,489\,½x + 801 = 0.$$

Пренебрегая его первым членом, мы получим $x = 8/135 = 1/17$. Но поскольку это наблюдение заслуживало бы быть отброшено будь u в окрестности – 300, то, вычисляя как раньше, мы получили бы x примерно равным 1/6. Ясно, что в таком случае мы могли бы довольствоваться обычным правилом, потому что дело идет о разности не равной даже секунде.

17. Поскольку, однако, третье наблюдение столь отлично от остальных, быть может окажется удобным установить границу недалеко от него. Сделай мы так для случая $1^h51^m33½^s$, $u = 15^s$ и наше уравнение было бы соответственно

$$-180x^2 - 1000x + 80 = 0$$

и его меньший корень равнялся бы 12/18 = 2/3. Следовательно, разность меридианов оказалась бы $1^h51^m49\ 1/6^s$. Снова ясно ввиду этого случая, что, если только не совершить действительно громадной ошибки при выборе значения для u, никакой заметной погрешности бояться не нужно. Здесь достаточно заметить, что nu^2 всегда должно быть намного больше, чем $3B$.

18. Этот метод особенно заслуживает быть примененным к тем наблюдениям, из которых [известный] ученый [Андрей Иванович] Лексель недавно определил параллакс Солнца[24]. Выберем из них, только лишь для примера, следующие четыре следствия [окончательных значений параллакса в секундах дуги] из наблюдений, а именно 8.52, 8.43, 8.86, 8.28. Взяв из них среднее арифметическое, мы получим 8.52. Если, следовательно, положить П = 8.52, можно будет назначить четырем буквам a, b, c, d значения

$a = 1$, $b = 9$, $c = -34$, $d = 24$,

так что их сумма окажется равной $A = 0$[25]. Все эти числа, разумеется, означают сотые доли секунды. Сумма квадратов $B = 1814$, сумма кубов $C = -24\,760$.

19. Если мы теперь допустим, что $u = 40$ это член, для которого степень доброкачественности исчезает, наше уравнение станет

$$320x^2 - 948x + 24\,750 = 0.$$

Значение самого x оказывается здесь комплексным. Примем поэтому $u = 50$ и уравнение примет вид

$$400x^2 - 10\,000x + 24\,750 + 5442x = 0,$$

но мы все еще приходим к комплексному результату. Приняв, однако, $u = 60$, мы получим меньшее значение x равным 3 5/12, что может показаться слишком большим. Если согласиться с этим, параллакс Солнца окажется равным 8.555. Но заметим, что бо́льшие значения u

приводят к меньшим значениям x. Поскольку применение этого метода столь неопределенно, мы вполне можем усомниться, удастся ли этим путем подойти ближе к истине и возможно окажется достаточным во всяком случае выяснить, будет ли x положительным или отрицательным.

20. Мы здесь безусловно удостоверились, что значение x конечно же положительно, поскольку для C мы вычислили отрицательное число. Поэтому мы можем с пользой заметить, что, вообще, когда только C оказывается положительным, x будет отрицательным, а если C отрицательно, значение x положительно. В каждом случае x настолько невелико, что результат вряд ли отличается от обычного правила. Во всяком случае, можно добавить, что чем больше число C, тем больше необходимо окажется значение x. Ибо если сумма кубов C действительно исчезнет, x всегда будет = 0, точно как требуется по обычному правилу, какое бы значение не принять за u.

21. Таким образом, несмотря на неопределенность, вызываемую числом u, представляется, что, приняв во внимание следующие обстоятельства, здесь можно установить что-то разумно вероятное даже если нельзя достичь достоверности. Во-первых, как только сумма кубов $C = 0$, x будет всегда = 0. Во-вторых, чем больше величина C, тем больше окажется с противоположным знаком значение самого x. В третьих, достаточно ясно, что величина nu^2 должна намного превышать величину $3B$. Имея это в виду, мы можем с разумной вероятностью указать, что $x = -[C/(\lambda nB)]$, где, по правде сказать, нам еще придется оценивать число λ. Однако, приняв $\lambda = 2$ или, самое большее, $\lambda = 3$, мы удовлетворим все случаи и вряд ли вообще уклонимся от истины. Полученная разность обычно окажется столь несущественной, что нам едва ли придется принимать ее в расчет. Ибо наибольшая ошибка, которой следует опасаться, наверняка окажется в том случае, когда несколько наблюдений числом i полностью совпадают, и каждое дает значение a, тогда как одно оставшееся наблюдение приводит к $-ia$, так что сумма их всех равна $A = 0$. Сумма квадратов $B = ia^2 + i^2a^2 = i(i + 1)a^2$; сумма кубов $= ia^3 - i^3a^3 = -i(i^2 - 1)a^3$. При $n = i + 1$ наша формула дает

$$x = \frac{i\,(i^2-1)\,a}{\lambda\, i\,(i+1)^2} = \frac{(i-1)\,a}{\lambda\,(i+1)}.$$

Если, следовательно, i очень велико, а мы примем $\lambda = 2$, результат будет $x = ½a$. В предыдущем примере, в котором было $n = 6$, $B = 11½$ и $C = -801$, $x = +801/(12 \cdot 11½) = 3/5$ приближенно. Во втором, в котором было $n = 4$, $B = 1814$, $C = -24\,750$, $x = 24\,750/(8 \cdot 1814) = 8/5$ приближенно. Ничего нелепого в этих значениях не заметно.

Если, однако, кто-либо думает, что было бы разумнее принять $\lambda = 3$, я [со своей стороны] вряд ли соглашусь, что о различии стоит спорить, поскольку сама суть наблюдений не допускает большей степени точности.

Примечания

1. Вполне обоснованное сомнение, которое по существу повторил Гаусс (1900, с. 152 – 153, письмо 1827 г.): если наблюдений не очень много, отбраковка всегда сомнительна.

2. Это, пожалуй, слишком сильно сказано.

3. Даниил Бернулли, разумеется, имеет в виду отрезок, а не прямую. Аналогичные неточности встречаются, например, в §8 (круг и полукруг; фактически же в обоих случаях полуокружность).

4. Еще сильнее в том же смысле неоднократно высказывался Лаплас (например, 1814, с. 835): теория вероятностей обязана своим возникновением слабости человеческого ума (т.е. незнанию). Целесообразнее сказать и по этому поводу, и в связи с мнением Д.Б., что "прибежищем" является закономерность, проявляющаяся в массовых случайных явлениях.

5. Д.Б. мог бы здесь сослаться на закон больших чисел Якоба Бернулли.

6. В современном понимании шкала вероятностей это, конечно, плотность распределения. В предыдущих пунктах Д.Б. принял для нее разумные предположения, но вот его заключительное соображение оказалось неверным или, во всяком случае, не универсальным.

7. Принятие однократных вероятностных решений восходит к Якобу Бернулли (1713, начало гл. 2-й части 4-й). Впрочем, в письме 1693 г., отвечая на вопрос корреспондента, Ньютон (Schell 1960, p. 29) указал, что из нескольких бросков игральных костей следует предпочесть тот, математическое ожидание выгоды от которого наибольшее. В общежитии подобный подход применялся уже в древности (Буров и др., 1972, с. 108). Те же авторы (с. 203) цитируют военачальника 4-го века до н.э., который основывался на обращенной вероятности, а в новое время Лаплас в 1774 г. сформулировал *принцип обращенной вероятности* и много позже (1814, с. 836) подтвердил свою точку зрения.

8. Из контекста следует, что кто-то уже подсчитал упомянутые вероятности, но мы не можем подтвердить этого. Вообще же Д.Б. сослался на принцип обращенной вероятности.

9. Среднее из крайних наблюдений применялось в то время в метеорологии при выводе средних температур. (Cotte 1788, с. 9) весьма отрицательно отозвался об этой практике, тем более, что крайние значения могли быть обусловлены особыми состояниями атмосферы. Уже Якоб Бернулли, в своем лишь недавно опубликованном (притом частично) *Дневнике*, заметил, что при наблюдении атмосферного давления следует применять среднее арифметическое, а не среднее из крайних (Bernoulli J.,1684 – 1690, p. 47). См. также Шейнин (1984, с. 74). Выбор среднего из двух крайних наблюдений, конечно же, минимизирует наибольшую погрешность, однако крайние наблюдения, вообще говоря, удаляются друг от друга с возрастанием числа наблюдений.

10. Д.Б. не мог знать, что при этом переходе изменяется дисперсия искомой оценки.

11. Приняв этот корень во внимание, мы легко можем определить оставшиеся корни. Оба они оказываются действительными, их знаки противоположны и оба зависят от r. Важнее, однако, что при $r \to \infty$ должно быть $x = 0$ так как в этом случае предложение Д.Б. приводит к среднему арифметическому (см. пункт a в §14), и в данном случае $x = 0$ действительно является единственным подходящим корнем.

12. Положение здесь аналогично рассмотренному в прим. 11.

13. В случае всего лишь трех наблюдений их можно принимать произвольно даже при заданной плотности распределения.

14. Здесь можно усмотреть намек на точку зрения Чебышева (1936, с. 227), который рассматривал возможные ошибки наряду с действительно имевшими место.

15. Нормирование уравнения параболы требует принять $\rho = 3/4r$.

16. См. прим. 10.

17. L.G. Du Pasquier, редактор соответствующего тома Собрания сочинений Эйлера (см. Библиографию), отыскал это изречение у Горация, афоризм которого начинался фразой *Есть мера вещей и существуют известные границы*. Мы можем еще сослаться на аналогичное, чисто юридическое изречение: *Summum jus – summa injuria* (Высшее право – высшая несправедливость) и на противоположное по смыслу *Fiat justitia, pereat mundus* (Да свершится правосудие хотя бы погибнул мир).

18. Впрочем, параболическая кривая тоже подошла бы.

19. Последнее соображение непонятно. Учет плохого наблюдения наверняка исказит результат.

20. Принцип максимума (точнее, наибольшего правдоподобия) был впоследствии признан в математической статистике.

21. Ср. прим. 11 и 12.

22. Это замечание можно считать намеком на общее значение “иной формулы”, т.е. принципа наибольшего веса, см. §3 нашего комментария.

23. В 1726 г. в Петербурге была открыта астрономическая обсерватория Петербургской академии наук, а Пулковская обсерватория ведет свое начало с 1839 г.

24. Название мемуара Лекселя (Lexell 1772) показывает, что он определял параллакс Солнца по обычному для того времени, но с тех пор оставленному ввиду ненадежности методу регистрации моментов прохождения Венеры по солнечному диску. Напомним, что еще раньше Шорт (§1 нашего комментария) обработал наблюдения, произведенные в соответствии с тем же методом, но мы не можем утверждать, что он применил апостериорные оценки по причине той же ненадежности.

25. В соответствии с обозначениями величин *a, b, c, d* (§9), их знаки должны были бы быть противоположны, а первая из них должна была быть $a = 0$. Эйлер изменил ее на единицу, чтобы, видимо, получить $A = 0$. *Аллен.*

Библиография

Асмус В.Ф. (1954), Метафизика. БСЭ, 2е изд., т. 27, с. 283 – 284.

Бернулли Я. (1713, латинск.), Искусство предположений, часть 4-я. В книге автора (1986) *О законе больших чисел*. М., с. 23 – 59. Ред. Ю.В. Прохоров.

Буров В.Г., Вяткин Р.В., Титаренко М.А., редакторы (1972), *Древнекитайская философия*, т. 1. М.

Гнеденко Б.В. (1958), О работах Л. Эйлера по теории вероятностей, теории обработки наблюдений, демографии и страхованию. В сборнике *Л. Эйлер. К 250-летию со дня рождения*. М., с. 184 – 209.

Лаплас П.С. (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей*. В книге Прохоров Ю.В., ред. (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.

Сархан А., Гринберг Б. (1962, англ.), Оптимальные линейные несмещенные оценки для некоторых симметричных распределений. В

книге под ред. авторов *Введение в теорию порядковых статистик*. М., 1970. Ред. перевода А.Я. Боярский., с. 351 – 359.
Чебышев П.Л. (1936), *Теория вероятностей*. Лекции 1879 – 1880. М. – Л.
Шейнин О.Б. (Sheynin O.B.) (1971), Lambert's work in probability. *Arch. Hist. Ex. Sci*.; vol. 7, pp. 244 – 256.
--- (1972), On the mathematical treatment of observations by Euler. Ibidem, vol. 9, pp. 45 – 56.
--- (1984), On the history of the statistical method in meteorology. Ibidem, vol. 31, pp. 53 – 95.
--- (1993), Treatment of observations in ancient astronomy. Ibidem, vol. 46, pp. 153 – 192.
--- (1995), Density curves in the theory of errors. Ibidem, vol. 49, pp. 163 – 196.
--- (1998), The theory of probability: its definition and its relation to statistics. Ibidem, vol. 52, pp. 99 – 108.
--- (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин.
Bernoulli D. (1778, латинск.), Мемуар первоначально опубл. вместе с комментарием Эйлера в *Acta Acad. Petrop*., 1778, pp. 3 – 33 и перепечатан на латинск. языке, опять же с этим комментарием, в Euler (1923, pp. 262 – 290) и без комментариев в книге автора *Werke*, Bd. 2. Basel, 1982, pp. 361 – 375. Англ. перевод: The most probable choice between several discrepant observations and the formation therefrom of the most likely induction. *Biometrika*, vol. 48, 1961, pp. 1 – 13. Transl. by C.G. Allen. Перепечатка перевода в книге Pearson & Kendall (1970, pp. 157 – 167).
Bernoulli Jakob (рукопись, 1684 – 1690), Meditationes. *Werke*, Bd. 3. Basel, 1975, pp. 21 – 90.
Bernoulli, Johann III (1785), Milieu à prendre entre les observations. *Enc. Méthodique*, Math., t. 2. Paris, pp. 404 – 409.
Bopp K. (1924), L. Euler's und J.H. Lambert's Briefwechsel. *Abh. Preuss. Akad. Wiss*., Phys.-Math. Kl., No. 2. Весь выпуск.
Cotte L. (1788), Sur l'utilité des observations météorologiques. В книге автора *Mémoires sur la météorologie*, t. 1. Paris, pp. 1 – 32.
Eclipses satellitum Jovis nostris respondentes, observatae in observatorio regio Parisino a D.D. Cassino et Maraldo [J. Cassini, G.D. Maraldi]. *Comm. Acad. Sci. Petrop*., t. 1 (1726), 1728, pp. 474 – 479.
Euler, L. (1778, латинск.), О публикациях на латинск. языке см. выше Bernoulli D. Англ. перевод (C.G. Allen): Observations on the foregoing dissertation of [the illustrious] Bernoulli. *Biometrika*, vol. 48, 1961, pp. 13 – 18. Перепечатка перевода в книге Pearson & Kendall (1970, pp. 167 – 172).
--- (1923), *Opera omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin. Ред. L.G. Du Pasquier.
Fourier J.B.J. (1826), Sur le résultats moyens déduits d'un grand nombre d'observations. *Œuvres*, t. 2. Paris, 1890, pp. 525 – 545.
Fuss P.N. (1843), *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII*^{me} *siecle*, t. 2. New York, 1968.
Gauss, C.F. (1827), Письмо Г.В. Ольберсу 3 мая 1827 г. В книге автора *Werke*, Bd. 8. Göttingen – Leipzig, 1900, pp. 152 – 153.
Lambert, J.H. (1760), *Photometria.* Augsburg.
--- (1765), Anmerkungen und Zusätze zur practischen Geometrie. В книге

автора *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Tl. 1. Berlin, 1765, pp. 1 – 313.
Lexell, A.J. (1772), *Disquisitiones de investiganda vera quantitata parallaxeos Solis ex transitiu Veneris ante discum Solis 1769*. Petropolis (Петербург).
Newcomb S. (1886), A generalized theory of the combination of observations. *Amer. J. Math.*, vol. 8, pp. 343 – 366.
Pearson E.S., Kendall M.G. (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability.* London.
Plackett R.L. (1958), The principle of the arithmetic mean. *Biometrika*, vol. 45, pp. 130 – 135. Перепечатка в книге Pearson & Kendall (1970, pp. 121 – 126).
Radelet-De Grave P., Scheuber V. (1979), *Correspondance entre D. Bernoulli et J.-H. Lambert.* Paris.
Schell E.D. (1960), Pepys, Newton and probability. *Amer. Statistician*, vol. 14, No. 4, pp. 27 – 30.
Short J. (1763), Second paper concerning the parallax of the Sun determined from the observations of the late transit of Venus. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 53, pp. 300 – 342.
Straub H. (1970), Bernoulli Daniel. *Dictionary Scientific Biography*, vol. 2, pp. 36 – 46.

12. Пьер Симон Лаплас

Публикация *Аналитической теории вероятностей* Лапласа (1749 – 1827) объединила предыдущие изыскания и самого автора, и его предшественников в единое, но плохо организованное и трудно понимаемое сочинение. Более того, принятый им уровень абстракции был недостаточен, теория вероятностей осталась прикладной математической дисциплиной и впоследствии ее пришлось создавать заново. Несмотря на всё это, заслуга Лапласа и как компилятора, и как ученого, поставившего во главу угла (нестрого доказанные им) варианты центральной предельной теоремы, огромна, не говоря даже о его приложении теории вероятностей к астрономии и статистике населения. В качестве предисловия к *Аналитичекой теории* Лаплас позднее опубликовал *Опыт философии теории вероятностей*, который не мог не оказать сильного воздействия на несколько поколений ученых и на массового читателя. Мы приводим перевод зародыша этого *Опыта*, – предисловия к первому изданию *Аналитической теории*.

Аналитическая теория вероятностей
Предисловие

Laplace P.S. (1812), *Théorie analytique des probabilités*. Paris.

Моя цель – представить здесь методы и общие результаты теории вероятностей. Я специально рассматриваю ее самые утонченные, самые трудные, и в то же время самые полезные вопросы. Я стараюсь главным образом определить вероятности причин и результаты, указываемые при рассмотрении большого числа событий, и пытаюсь отыскивать законы, в соответствии с которыми эти вероятности стремятся к своим пределам по мере умножения числа событий. Это исследование заслуживает внимания геометров[1] ввиду требуемого им анализа; именно в нем главным образом находит свое важнейшее приложение теория приближения функций больших чисел.

Это исследование интересно [и] наблюдателям, указывая им те средние, которые следует выбирать из результатов наблюдения и вероятность ошибок, которых они еще должны опасаться. Наконец, оно заслуживает внимания философов, поскольку проясняет как даже в вещах, которые представляются нам полностью отданными во власть случая, в конечном счете устанавливается закономерность и обнаруживаются скрытые, но постоянные причины, от которых она зависит. Именно на закономерности средних результатов большого числа изученных событий основаны различные институты, такие как пожизненные ренты, тонтины[2], страховые операции. В соответствии с моей теорией, вопросы, относящиеся к ним, как вариоляция оспы[3] и решения избирательных ассамблей [больше] не представляют никаких трудностей. Я ограничусь здесь решением наиболее общих из них, однако значение подобных вопросов для гражданской жизни, нравственные рассуждения, которые их усложняют, и многочисленные наблюдения, в которых они нуждаются, составляют отдельную тему.

Если принять во внимание аналитические методы, которые уже породила и которые может породить теория вероятностей; истинность тех начал, на которых она основана; строгую и утонченную логику, которая требуется при ее применении для решения задач; общеполезные учреждения, которые опираются на нее; и, наконец, если заметить, что даже в предметах, которые не могут быть подвергнуты анализу, она, теория вероятностей, обеспечивает наиболее надежные взгляды, которые могут руководить нами в наших суждениях и учит нас [как] предохраняться от часто сбивающих нас с пути заблуждений ума, – [если учесть всё это], то станет ясно, что нет никакой другой науки, более достойной наших размышлений и предоставляющей более полезные результаты.

Примечания

1. Лаплас не считал себя геометром, т. е. чистым математиком.
2. См. прим. 5 в разделе 4.
3. См. прим. 17 в разделе 10.

13. Симеон Дени Пуассон

В теории вероятностей Пуассон (1781 – 1840) по праву считается основным автором периода между Лапласом и Чебышевым, наиболее известным в связи с его законом больших чисел и исключительно важным распределением, названным его именем. Он же, не будучи статистиком, оказался крестным отцом континентального направления статистики, самыми видными представителями которой впоследствии стали Лексис, Марков, Борткевич и Чупров. Мы приводим перевод предисловия и оглавления его основного сочинения 1837 г. и обращаем внимание читателей на то, как серьезно Пуассон (как, впрочем, и Кондорсе, и Лаплас до него) относился к приложению теории вероятностей к судопроизводству.

Исследование о вероятностях приговоров в уголовных и гражданских делах.

Poisson S.D. (1837), см. Библиографию

Оглавление

этого правила к последовательным событиям. Правило для определения по наблюденным событиям вероятностей других событий, которые зависят от тех же причин, что, однако, не предполагает никакого влияния появления прошлых событий на появление будущих. Приложение этих двух правил к частному примеру §§27 – 33

Распространение тех же правил на случай, когда о событиях имеются некоторые предварительные сведения, полученные из наблюдений. Пример, подходящий для указания на необходимость обращать на это внимание §§34 – 35

Формулы, относящиеся к вероятностям свидетельских показаний. Случай, при котором требуется только знать верно или ложно некоторое событие, удостоверенное или отрицаемое одним или многими свидетелями. Случай, когда могут иметь место более двух событий и одно определенное из них удостоверено свидетелем. Теорема о вероятности события, о котором мы узнаем по традиционной цепочке свидетелей §§36 – 40

Когда возможно очень большое число событий, априорно имеющие равные и очень низкие вероятности, появление одного из тех, которые представляют что-либо *примечательное*, следует весьма вероятно приписать особой причине C, аналогичной, к примеру, человеческой воле, а не случаю. Если примечательные события перед наблюдением были намного более вероятны чем остальные, вероятность вмешательства причины C намного убывает и может быть настолько, что нет смысла обращать на нее внимание §§41 – 42

Преобразование формул, относящихся к вероятностям причин будущих событий в определенные интегралы, когда число возможных причин бесконечно. Можно не рассматривать общие причины прошлых и будущих событий и считать те и другие сложными событиями, зависящими от одного и того же простого события G, неизвестный шанс которого может принимать бесконечное множество значений §§43 – 45

Приложение этих интегралов к задаче, в которой событие G появляется m раз в $(m + n)$ испытаниях, а противоположное событие H, – остальные n раз и требуется определить вероятность, что они появятся m_1 и n_1 раз соответственно в $(m_1 + n_1)$ будущих испытаниях. Случай, когда априорно задано, что неизвестный шанс G очень мало отличается от заданной дроби[3] §§46 – 48

Изложение теоремы Якоба Бернулли о повторении событий при очень большом числе испытаний в соотношении их соответствующих шансов, известных или нет, но предположенных постоянными. Приложение к примеру, извлеченному из *Моральной арифметики* Бюффона. Указание на доказательство этой теоремы, основанное на формуле бинома §§49 – 51

Изложение трех общих положений, доказанных в гл. 4-й и относящихся к повторению событий, чьи шансы изменяются любым образом в течение испытаний. Вывод общего закона больших чисел, уже подтвержденного в предисловии. Он выражен в двух уравнениях, которые являются основанием всех важных применений исчисления вероятностей §§52 – 54

Приложение первого уравнения к примерам. Существенное различие между применениями выведенных из наблюдений постоянного шанса и среднего шанса событий. Постоянная пропорциональность мужских и

или более серий наблюдений заключить приближенное значение этой вещи в случае, когда средние значения действительно стремятся к ее точному значению, т. е. в случае, когда специальная постоянная в каждой серии является этим истинным значением
§§107 – 108

Вероятность заданных пределов разности между отношениями $m/(m + n)$ и $m_1/(m_1 + n_1)$ чисел раз m и m_1 появления одного и того же события E в $(m + n)$ и $(m_1 + n_1)$ испытаниях, когда все возможные причины E в обеих сериях наблюдений совпадают, хотя шансы этого события как-то изменяются в течение каждой серии §109

Решение задачи о наклонностях планетных орбит к эклиптике и их эксцентриситетах. Решение подобной задачи о наклонностях комет[ных орбит]. Мы заключаем с очень высокой вероятностью, что неизвестная причина образования комет не привела к неравным вероятностям ни их различных наклонностей к эклиптике, ни направлений их движения, прямого или попятного. Кроме того, оказалось, что средняя наклонность всех существующих комет вероятно очень мало отличается от той же величины для комет, известных до сего дня. Примечание относительно раскаленных тел, которые в очень большом числе наблюдаются в определенное время года[6] §§110 – 111

Таблица наиболее применяемых формул вероятностей, доказанных в этой и в предыдущих главах. Замечание о приложении исчисления вероятностей к системе *условных уравнений*, доставляемых наблюдениями §§112 – 113

Гл. 5-я. Приложение общих правил вероятностей к решениям судов присяжных и суждениям трибуналов с. 318

Определение вероятностей, что обвиняемый будет осужден или оправдан определенным большинством присяжных, каждый из которых имеет заданную вероятность не ошибаться, с учетом также заданной вероятности виновности обвиняемого, которая имеет место до вынесения судебного решения. По правилам вероятностей причин и гипотез определяются также вероятности, что обвиняемый, таким образом осужденный или оправданный, виновен или нет §§114 – 117

Формулы для случая некоторого числа присяжных, имеющих один и тот же шанс не ошибаться и выносящих решения либо заданным большинством, либо большинством, для которого дана лишь его наименьшая допустимая величина. Указано, что вероятность осуждения всегда ниже вероятности виновности до судебного решения. При прочих равных условиях вероятность добротного решения зависит лишь от большинства голосов, при котором оно было вынесено, но никак не от общего числа присяжных[7], если шанс их ошибки известен заранее, а не выведен апостериорно по известному большинству §§118 –120

Приложение этих формул к случаю очень большого числа присяжных, что делает очень маловероятным, что осуждение выносится слабым большинством §121

Теорема о суде, состоящем из какого-то числа присяжных, каждый из которых имеет многочисленные и неравновероятные шансы не ошибаться. Пример вычисления среднего шанса, когда число всех возможных шансов становится бесконечным и закон их вероятности задан. Этот средний шанс один и тот же для всех присяжных, если они

Указание подобного вычисления, которое не может быть выполнено ввиду отсутствия необходимых данных наблюдения и которое относится к решениям *уголовной* [*исправительной*?] *полиции* и военной юстиции §146

Формулы о более или менее вероятной добротности судебных решений в гражданских делах, вынесенных в первой инстанции и при апелляции §§147 – 149

Отсутствие данных опыта, необходимого для определения двух различных величин, которые входят в эти формулы, делает необходимым предположение о равенстве шансов ошибок для всех судей обеих последовательных инстанций. Вычисление этих шансов по отношению, доставленному опытом, числа судебных решений, подтвержденных королевскими судами, к числу решений судов первой инстанции [по делам,] которые представляются им на рассмотрение ежегодно. Малые изменения этого отношения в течение трех последовательных лет является весьма примечательным доказательством общего закона больших чисел. Из этих данных наблюдения выводятся вероятности добротности судебных решений первой инстанции и апелляционных судов при подтверждении этих решений, и в противном случае §§150 – 151

Предисловие

Задача по поводу азартных игр, которую светский человек предложил строгому янсенисту[8], оказалась началом исчисления вероятностей. Она имела целью установить пропорцию, в которой *ставку* следует разделить между игроками в том случае, когда они соглашаются не продолжать игру, а принять за основание победы в ней неравные количества [недостающих] очков. Паскаль первым решил эту задачу, но лишь для случая двух игроков, а затем её решил Ферма в общем случае любого числа игроков. И все-таки геометры XVIIв., которые занимались исчислением вероятностей, лишь определяли шансы в различных играх той эпохи и только в следующем столетии это исчисление развилось и стало одной из основных ветвей математики и по числу и пользе своих приложений, и по характеру анализа, которое оно породило.

Среди его приложений одно из наиболее важных относится к вероятности [справедливости] приговоров, или, вообще, решений, принимаемых большинством голосов. Первым, кто попытался её исследовать, был Кондорсе. Книга, которую он написал (Condorcet 1785) была предпринята при жизни и по предложению министра [финансов 1774 – 1776 гг. А.Р.Ж.] Тюрго [1727 – 1781], представлявшего себе всю пользу, которую моральные науки и гражданская администрация могут извлечь из исчисления вероятностей, чьи указания всегда точны даже когда они, ввиду недостаточности наблюдений, не могут полностью решить поставленные задачи.

В своем предварительном [но] весьма обширном сочинении Кондорсе без помощи аналитических формул излагает полученные им результаты и тщательно развивает соображения, подходящие для того, чтобы выявить пользу подобных исследований. В своем *Трактате о вероятностях* [*Аналитической теории вероятностей*] Лаплас также занимался вычислением шансов ошибки, которой следует опасаться в приговорах, выносимых обвиняемому известным большинством голосов. Данное им решение этой задачи, одно из самых утонченных в теории вероятностей[9], основано на принципе, служащем для определения вероятностей различных причин, которые могут быть приписаны наблюденным событиям. Бейес вначале сформулировал этот принцип в несколько ином виде, Лаплас же и в своих [ранних] мемуарах, и в своем трактате, нашел ему затем удачнейшее приложение для вычисления вероятностей будущих событий по наблюдению прошлых. Однако, что касается задачи о вероятности приговоров, то справедливости ради следует сказать, что именно Кондорсе пришла в голову находчивая мысль обосновать её решение на принципе Бейеса при последовательном рассмотрении вины и невиновности обвиняемого как неизвестной причины вынесенного приговора. Иными словами, обосновать ее рассмотрением наблюденного факта, из которого выводится вероятность этой причины. Точность принципа Бейеса наглядно рассмотрена со всей строгостью, и по приложению к вопросу, которым мы занимаемся, не может больше оставлять никакого сомнения[10].

Тем не менее, Лаплас допустил при этом предположение, которое никак не назовешь неоспоримым. Он решил, что вероятность непогрешимости присяжного заседателя может принимать все равновозможные степени от достоверности, представленной единицей, до безразличия, которой в вычислениях соответствует дробь 1/2, придающей равные шансы ошибке и истине. Прославленный геометр[11] обосновал свое предположение тем, что мнение присяжного несомненно склоняется к истине, а не к ошибочности, и с этим следует в общем действительно согласиться. Но существует бесконечное множество различных законов вероятности ошибок, которые удовлетворяют этому условию, т. е. требуют, чтобы шанс безошибочности присяжного никогда не опускался ниже 1/2, а был выше этого предела, без того, чтобы все его значения были равновозможными. Это частное предположение Лапласа поэтому не обосновано априорно. Либо по этой причине, либо ввиду её последствий, которые мне представляются неприемлемыми, отличающиеся друг от друга решения задачи о вероятности [справедливости] приговоров , содержащиеся в *Трактате о вероятностях*, с. 460, и в Первом Приложении (с. 32) к этому великому сочинению [с. 469 – 470 и 528 в издании 1886 г.] постоянно оставляют в моем сознании сильное сомнение.

Я сообщил бы об этом прославленному автору, занимайся я этой задачей при его жизни. Авторитет его имени сделал бы это моим долгом, а его дружба, которая всегда возвышала меня, облегчила бы мне это. Можно без труда представить себе, что лишь после длительного раздумья я решился рассматривать упомянутый вопрос с другой точки зрения. И прежде чем идти дальше, мне будет позволительно указать основные причины, побудившие меня отбросить последнее решение, на котором остановился Лаплас и которое он дополнил численными результатами в *Опыте* [1814, в главе о вероятности судебных приговоров].

Формула Лапласа, выражающая вероятность ошибки в приговоре, зависит лишь от большинства голосов, которое его вынесло, и от общего числа судей, но не содержит ничего относительно их более или менее обширного знания порученного им дела. Из этого следует, что вероятность ошибки в решении, вынесенном судом присяжных большинством, например, в семь голосов против пяти, окажется одной и той же, каково бы ни было множество лиц, из которых выбраны эти 12 присяжных. И это следствие показалось мне достаточным, чтобы никак не принимать ту формулу, из которой оно было выведено.

Та же самая формула предполагает, что до решения суда не существовала никакая презумпция вины обвиняемого [существовала презумпция его невиновности], так что бóльшая или меньшая вероятность его вины должна следовать только из этого решения, вынесенного против него. Но это снова недопустимо. Перед тем, как обвиняемый предстанет перед ассизами[12], он находится в предварительном заключении[13], что [уже] установило вероятность, более высокую, чем 1/2, что он виновен. И, конечно же, каждый не задумываясь стал бы держать пари в справедливой игре, что обвиняемый скорее виновен, чем нет.

Между тем, правила для установления вероятности наблюденного события по вероятности причины, на основании которых занимающая нас теория требует принимать во внимание все предшествовавшие предположения, если только такие предположения не отсутствуют, или если не доказано, что их не существует. Но, напротив, подобное предположение очевидно по [имевшему место] судопроизводству и я должен учитывать его при решении поставленной задачи. И по существу ясно, что в противном случае будет невозможно согласовать последствия вычислений с неизменными результатами наблюдений. Это предположение подобно тому, которое имеет место в приговорах по гражданским делам, когда один из судящихся подает апелляцию на первичное судебное решение в суд высшей инстанции: он появляется там вместе с презумпцией, противоречащей его делу. И без учета этого обстоятельства подсчет вероятности ошибки, которой можно опасаться в окончательном приговоре, завершится серьезным заблуждением.

Наконец, Лаплас ограничился рассмотрением вероятности ошибки приговора, вынесенного заданным большинством голосов, однако опасность для обвиняемого, преданного суду, быть признанным виновным этим большинством зависит не только от этой вероятности. Она также зависит от шанса, что подобный приговор будет вынесен. Итак, условно принимая, что вероятность ошибки в приговоре, вынесенном большинством семи голосов против пяти, выражается дробью почти равной 2/7, что следует из формулы Лапласа, необходимо также заметить, что в соответствии с опытом[14] число ежегодных осуждений судом присяжных во Франции указанным большинством составляет лишь 7/100 общего числа обвиняемых. И опасность для обвиняемого быть неправедно осужденным таким большинством следует измерять произведением двух дробей, 2/7 и 7/100, равным 1/50, ибо во всех случайных вещах опасение потери или надежда на выгоду выражается произведением стоимости вещи, которой опасаются или на которую надеются, на вероятность, что она произойдет.

Это рассуждение уже сводит к одной пятидесятой долю невиновных обвиняемых, ежегодно осуждаемых наименьшим возможным большинством голосов. И это еще без сомнения слишком много, если только все эти обвиняемые действительно невиновны. Но именно здесь удобно пояснить истинный смысл, который надлежит приписывать в этой теории словам *виновный* и *невиновный* и который Лаплас и Кондорсе [Кондорсе и Лаплас] по существу им и приписывали. Никогда нельзя придти к математическому доказательству вины обвиняемого. Даже его признание можно считать лишь [её] вероятностью, весьма близкой к достоверности. И поэтому наиболее просвещенные и человечные присяжные заседатели выносят обвинительный приговор лишь при высокой вероятности [вины], часто, однако, низшей, чем та, которая следует из признания обвиняемого.

Между этими присяжными и судьями в гражданских исках есть существенное различие. Если судья, после глубокого изучения процесса, может ввиду сложности вопроса выявить лишь слабую вероятность в пользу одной из сторон, этого достаточно, чтобы обвинить противную сторону [чтобы решить против нее]. Однако, присяжный должен подавать свой голос за обвинение лишь если в его глазах вероятность, что обвиняемый виновен, достигла определенной границы и намного превышает вероятность его невиновности.

Как ни старайся, всех шансов ошибки в уголовных делах избежать нельзя, так в какой же степени они должны быть снижены, чтобы обеспечить невиновности наибольшую возможную гарантию? На этот вопрос трудно ответить в общем. По Кондорсе, шанс быть неправедно осужденным должен быть равносилен шансу такой опасности, которую мы полагаем достаточно малой, чтобы не стараться избегать ее в обычной жизни. Ибо, говорит он, общество вполне имеет право для [своей] безопасности подвергать своего члена риску, шанс которого для него, так сказать, безразличен. Но это рассуждение чересчур утонченно для столь серьезного вопроса.

Лаплас привел определение, намного более подходящее для освещения вопроса о шансе ошибки, которую мы вынуждены принимать в судебных решениях по уголовным делам. Он полагал, что эта вероятность должна быть такой, чтобы риск для общественной безопасности оказался выше при оправдании виновного, чем страх обвинить невинного. Как он недвусмысленно сказал, каждый присяжный призван решить в соответствии со своими методом, просвещением и мнением, скорее именно этот [подразумеваемый] вопрос, чем определить виновность обвиняемого. И ошибка при его голосовании, когда он либо осуждает, либо оправдывает, может происходить от двух различных причин: либо он скверно оценивает доводы за и против обвиняемого, либо устанавливает слишком высокую или слишком низкую границу вероятности, необходимую для осуждения. Эта граница не одна и та же для всех лиц, призванных выносить приговоры, она меняется и вместе с сутью обвинений и даже зависит от обстоятельств, при которых происходит суд. В армии, перед лицом неприятеля, и при рассмотрении дел о шпионаже эта граница безусловно намного ниже чем в обычных случаях. Она снижается, а число осуждений возрастает для тех видов преступлений, которые учащаются и опаснее для общества.

Решения суда присяжных относятся к уместности осуждений или оправданий. Язык уточнится при употреблении слов *подлежащий осуждению*, в которых вся правда, взамен *виновен*, которое требует разъяснения и которое мы продолжаем применять, чтобы соответствовать обычаю. Итак, когда мы устанавливаем, что среди очень большого числа судебных решений имеется определенная доля неправедных осуждений, не следует понимать, что она состоит из невинно осужденных. Эта та доля осужденных, для которой вероятность оказалась слишком низкой не для того, чтобы установить, что они скорее виновны чем нет, а для того, чтобы [при их невиновности] осуждение оказалось необходимым для общественной безопасности. Определение среди этих осужденных числа тех, которые действительно невиновны, не входит в задачу наших вычислений. Тем не менее, можно полагать, что это число, по крайней мере исключая политические процессы, по счастью очень незначительно. В обычных случаях об этом можно судить по очень небольшому числу осуждений, вынесенных судом присяжных, против которых восстало общественное мнение; по малому числу предоставленных [судами высших инстанций] полных оправданий; и также по очень малому числу случаев, когда ассизы, используя данное им по закону право отменять обвинительные приговоры, вынесенные судом присяжных, возвращают обвиняемого под суд других присяжных, если решат, что [проведенные] устные прения сторон разрушили обвинение и осужденный не виновен.

Результаты относительно шансов ошибки в судебных решениях по уголовным делам, которые получил Лаплас, представляются непомерными и расходящимися с общими идеями, что противоречит его словам, что *теория вероятностей есть в сущности не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению* [1814, с. 863 правый столбец]. Они [результаты] были скверно истолкованы и было бы чересчур поспешно заключать, что математический анализ никак нельзя применять ни к вопросам такого рода, ни вообще к вещам, называемым моральными.

Это предрассудок, как я с сожалением вижу, разделяется умными людьми; чтобы его развеять, я считаю полезным напомнить здесь некоторые общие соображения, подходящие также ради сравнения их с другими вопросами, которых никто не оспаривает. Именно, приложение исчисления вероятностей считается законным и необходимым, чтобы хорошо понять назначение той задачи, которую я специально предлагаю в этом сочинении.

Вещи каждой природы подвержены всеобъемлющему закону, который можно назвать <u>законом больших чисел</u>. Он состоит в том, что, если наблюдать весьма значительное число событий одного и того же вида, зависящие и от постоянных причин, и от причин, беспорядочно изменяющихся то в одном направлении, то в другом, т. е. так, чтобы их изменения не происходили в одном каком-нибудь определенном смысле монотонно, то среди этих чисел обнаружатся почти постоянные соотношения.

Для вещей каждой природы эти соотношения имеют [свое] специальное значение, от которого они уклоняются все меньше и меньше по мере того, как ряд наблюденных событий всё удлиняется и которого они строго достигнут если возможно будет продлить этот ряд до бесконечности. По мере того, как амплитуды вариаций беспорядочно изменяющихся величин оказываются бóльшими или меньшими, потребуется также бóльшее или меньшее число наблюденных событий, чтобы их соотношения достигли разумного постоянства. В каждом вопросе само наблюдение покажет, достаточно ли продолжен ряд испытаний. И, смотря по числу установленных фактов и величине уклонений, которые еще остаются между указанными соотношениями, вычисление представит достоверные правила для определения вероятности, что специальное значение, к которому сходятся эти соотношения, заключены в сколь угодно тесные пределы.

Если произвести новые испытания, и если обнаружится, что те же соотношения заметно уклоняются от своих окончательных значений, определяемых предыдущими наблюдениями, можно будет заключить, что в интервале между двумя рядами испытаний причины, от которых зависят наблюдения, претерпели монотонное или даже внезапное изменение. Однако, без помощи исчисления вероятностей можно серьезно ошибиться в необходимости подобного заключения. Оно же не оставляет ничего неопределенного в этом смысле и предоставляет нам также необходимые правила для установления шанса изменения причин, указанного сравнением наблюденных событий в различные эпохи.

Этот закон больших чисел наблюдается в событиях, которые мы приписываем слепому случаю ввиду незнания их причин или потому, что эти причины слишком сложны. Так происходит в играх, в которых обстоятельства, определяющие появление некоторой карты или некоторого числа очков на кости, бесконечно изменяются и не могут быть подвергнуты никакому вычислению. Но если продолжить надолго ряд испытаний, различные случаи все же произойдут в соответствии с постоянными соотношениями. Более того, когда удается вычислить в соответствии с правилами какой-то игры относительные вероятности возможных случаев, подтверждается, что они равны этим постоянным соотношениям сообразно с известной теоремой Якоба Бернулли. Но в большинстве вопросов о случайности априорное определение шансов различных событий невозможно, и, напротив, они становятся известными по наблюденным результатам.

Нельзя, например, заранее вычислить вероятность потери судна во время длительного плавания, и мы заменяем это вычисление сравнением числа кораблекрушений с числом плаваний. Когда последнее очень велико, отношение этих чисел почти постоянно, по крайней мере для каждого моря и каждой нации по отдельности. Его значение может быть принято за вероятность будущего кораблекрушения, и на этом естественном следствии закона больших чисел зиждется морское страхование. Если страхователь основывается лишь на незначительном числе случаев, то это простое пари, ставки в котором нельзя вычислить; если же он опирается на очень большие числа, то это спекуляция, успех которой почти достоверен.

Тот же закон равным образом управляет явлениями, вызываемыми известными силами совместно со случайными причинами, влияние которых никак не закономерно. Последовательные повышения и понижения [уровня] моря в портах и на побережьях предоставляет пример замечательной точности. Несмотря на неравенства, вызываемые ветрами, которые устраняют законы этого явления в отдельных или малочисленных наблюдениях, приняв среднее из большого числа наблюденных морских приливов и отливов в одном и том же месте, мы обнаруживаем, что они почти соответствуют законам *приливов и отливов*, вызванным притяжением Луны и Солнца и совпадали бы с ними не будь никакого влияния случайных ветров. То действие, которые ветры, дующие в одном и том же направлении в течение части года, могут оказать в этот период на море, еще нисколько не определено. Различие в указанных средних, выведенное из наблюдений в начале и в конце прошлого века и отделенных друг от друга на сто лет, было лишь небольшим и может быть приписано некоторому изменению, происшедшему в окрестностях.

В качестве примера закона, который я рассматриваю, укажу еще на длительность среднего срока жизни рода человеческого. Из значительного числа детей, рожденных в достаточно близких местах и эпохах, есть умирающие в младенческом возрасте, другие живут дольше, а некоторые доживают до границы продолжительности жизни. И, несмотря на превратности жизни человека, которые приводят к столь большим различиям в возрастах умирающих, если разделить сумму этих возрастов на число людей, предположенное очень большим, частное, или то, что называется *средним сроком жизни*, будет величиной, не зависящей от этого числа. Этот срок может не быть одним и тем же для обоих полов[15], быть различным в разных странах и в различные эпохи, потому что он зависит от климата и без сомнения также от благосостояния людей. Он возрастает, если какое-нибудь заболевание исчезает, как оспа вследствие благодеяния вакцины. И во всех случаях исчисление вероятностей нам указывает, что если выявленные изменения в этом сроке довольно велики и относятся к достаточно большому числу наблюдений, то их необходимо приписать каким-то изменениям, происшедшим в общих причинах.

Соотношение между ежегодными мужскими и женскими рождениями в обширном государстве также постоянно и, видимо, не зависит от климата, но ввиду какой-то особенности, которой быть может нетрудно приписать правдоподобную причину, представляется различным для законнорожденных детей и тех, кто родился вне брака.

Строение тел, образованных разобщенными молекулами, разделенными друг от друга пространствами, свободными от весомой материи, также являет нам особого рода приложение закона больших чисел. Если из точки, выбранной внутри тела, провести прямую в определенном направлении до первой встреченной молекулы, то полученное расстояние, хоть и мало в любом смысле, будет тем не менее изменяться в очень большом отношении [в очень широких пределах] с направлением. Оно может быть в 10, 20, 100, ... раз больше в одном направлении, чем в другом. Распределение молекул вокруг каждой точки может быть очень беспорядочным и весьма различным в различных точках. Оно непрерывно изменяется ввиду внутренних колебаний молекул, потому что тело, находящееся в покое, это просто множество молекул, которые совершают непрерывные колебания с незаметной, но сравнимой с расстояниями между ними амплитудами. И если разделить каждый кусок объема неощутимой величины на число содержащихся в нем молекул, которое исключительно велико по причине их непомерной малости, и извлечь из частного кубический корень, мы получим *средний интервал* между молекулами, не зависящий от беспорядочности их распределения. Он постоянен по всему протяжению однородного тела, имеющего повсюду одну и ту же температуру, если только отвлечься от неравного сжатия его частей, вызванного его собственным весом. И на подобных рассуждениях основано вычисление молекулярных сил и теплового излучения внутри тел, подобное тому, которое я представил в других сочинениях.

Все эти примеры закона больших чисел взяты из разряда физических вещей, и если потребуется, мы можем их еще больше умножить. И не труднее указать другие примеры, относящиеся к вещам из разряда моральных. Среди них мы можем назвать доходы от косвенных налогов, постоянные если не ежегодно, то по крайней мере в течение малого числа последовательных лет. Такова, среди прочих, *судебная пошлина*, которая ежегодно прибавляет почти постоянную сумму в доход государства, но тем не менее зависит от числа и значимости дел, т. е. от противоположных и переменных интересов граждан и их большей или меньшей способности вести свои дела в суде.

Таковыми были также доходы от лотереи Франции до тех пор, пока ее, к счастью, не прикрыли, и игры Парижа, упразднение которых не менее желательно[16]. Эти игры предоставляют постоянные соотношения двух различных видов: с одной стороны, сумма ставок почти та же каждый год или в течение каждого периода в небольшое число лет. С другой стороны, прибыль банкира ощутимо [в достаточной степени] пропорциональна этой сумме. Итак, эта пропорциональность является естественным следствием случая, который в соответствии с правилами игры отдает банкиру благоприятные исходы в постоянной и заранее вычислимой пропорции. Но постоянство суммы ставок это событие, которое относится к моральному разряду, потому что поставленные деньги зависят от числа и желания игроков. Хорошо, что эти два элемента, пропорция дохода и сумма ставок, мало изменяются, без чего откупщик игры не смог бы оценить наперед ежегодную плату, которую он обязан будет уплатить правительству, по прибыли, которую он смог получить в период предшествовавшего арендного договора.

Только что изложенные данные опыта, на которые я опираюсь в вопросе о вероятности [справедливости] приговоров, предоставляют к тому же решающие примеры закона больших чисел, наблюдаемые в разряде моральных вещей. Будет видно, что при действии одного и того же законодательства отношение числа осужденных к числу обвиняемых по всей Франции очень мало изменяется от года к году, так что достаточно рассмотреть примерно 7000 случаев, т. е. число судебных решений, выносимых каждый год судами присяжных, чтобы это отношение ощутимо достигло постоянства, тогда как в других вопросах, как, например, о средних сроках жизни, который я только что приводил, подобное число было бы далеко не достаточно, чтобы довести до постоянства. Разительно видно также влияние общих причин на рассматриваемое отношение [числа осуждений к числу обвиняемых], которое каждый раз изменяется с изменением законодательства.

Нельзя, стало быть, сомневаться, что закон больших чисел соответствует моральным вещам, которые зависят от желания, интересов, просвещения и страстей человека так же, как вещам физического разряда. И по существу здесь дело совсем не в природе причин, но в изменении их отдельных влияний и числа необходимых случаев, чтобы беспорядочность наблюдаемых событий уравнивалась в средних результатах. Величина этих чисел не может быть установлена заранее, она различна в различных вопросах, и, как сказано выше, она тем значительнее, чем, в общем, больше амплитуда беспорядочности. Но в этом отношении нельзя считать, что влияния внезапного желания, ослепления страстями, недостатка просвещения изменяются в более широких пределах, чем человеческая жизнь, границы которой определяются младенцами, умирающими при рождении, и людьми, доживающими до ста лет. Предвидеть их труднее, чем обстоятельства, которые приводят к потери судна в длительном плавании; они более капризны, чем случай, который определяет [полученную игроком] карту или исход выбрасывания кости. Не этими идеями [влияниями?] мы объясняем действия и их причины, а вычислениями и наблюдениями, которые одни только и могут установить вероятные пределы их изменений при очень большом числе испытаний.

Из этих примеров всевозможной природы следует, что всеобъемлющий закон больших чисел уже является для нас общим и неоспоримым фактом, который вытекает из опыта и никогда не будет опровергнут. Этот закон к тому же является основанием всех приложений исчисления вероятностей. Отныне он представляет события независимо от природы вопроса совершенно одинаково, идет ли речь о физических или моральных вещах, лишь бы наблюдения обеспечили соответствующие данные, которых требует вычисление в каждой задаче. Но, имея в виду его значимость, этот закон необходимо было непосредственно доказать. И это то, что я постарался сделать, и я верю, что в конце-концов достиг своей цели, как усматривается здесь ниже.

Упомянутая выше теорема Якоба Бернулли совпадает с этим законом больших чисел в том частном случае, когда шансы событий остаются постоянными в течение ряда испытаний. Это по существу и предполагает доказательство, данное автором, который, как известно, 20 лет размышлял [о ней]. Его теорема, однако, недостаточна для проблем, относящихся к повторению моральных вещей или физических явлений, шансы которых, вообще говоря, непрерывно изменяются, притом чаще всего без какой-либо закономерности. И, чтобы дополнить ее, следовало изучить вопрос с более общей точки зрения и всестороннее, но состояние математического анализа в эпоху Якоба Бернулли такой возможности не давало.

Когда рассматриваешь это постоянство отношений, которое устанавливается и сохраняется между количествами появления события и очень большим числом испытаний несмотря на изменения шанса этого события в течение рассматриваемого времени, то пытаешься приписать эту столь примечательную закономерность действию некоей сокровенной и беспрестанно действующей причины. Но теория вероятностей устанавливает, что постоянство этих отношений является естественным состоянием вещей в физическом и моральном разрядах, которое само по себе поддерживается без содействия какой-либо посторонней причины и лишь вмешательство некоей подобной причины может, напротив, воспрепятствовать ей или нарушить ее.

Правительство опубликовало отчеты *Comptes généraux de l'administration de la justice criminelle* за девять минувших лет, с 1825 по 1833 гг. Именно в этом достоверно представленном с замечательной тщательностью сборнике я почерпнул все использованные документы. Число ежегодных дел, рассмотренных ассизами королевства составляло примерно 5000, а число обвиняемых – примерно 7000. С 1825 по 1830 гг.

включительно уголовное законодательство не менялось, и осуждения судами присяжных выносились большинством, начиная с семи голосов против пяти, исключая случаи вмешательства суда при указанном наименьшем большинстве. В 1831 г. подобные вмешательства были отменены и установлено наименьшее большинство в восемь голосов против четырех, что должно было привести к более частым оправданиям. Отношение их числа к числу обвиняемых в течение шести первых лет [1825 – 1830], если пренебречь тысячными долями, было равно 0.39; в течение одного единственного года оно опустилось до 0.38, а в другой раз поднялось до 0.40. Из этого следует, что в указанном периоде оно изменялось от одного года к другому в одну или другую сторону лишь на сотую долю своего среднего значения[17].

При законодательстве, которое действовало до 1831 г., можно поэтому принять 0.39 за значение этого соотношения и считать 0.61 отношением числа осуждений к числу обвиняемых. В этот же период отношение числа осужденных, вынесенных наименьшим большинством семи голосов против пяти к общему числу обвиняемых, составило 0.07 и оно также очень мало изменялось от года к году. Вычитая эту дробь из 0.61, получим 0.54 для пропорции числа осуждений, которые были вынесены более сильным большинством. Отношение числа оправданий к числу обвиняемых было поэтому равно 0.46 если для осуждения требовалось большинство не меньшее восьми голосов против четырех. И так по существу и случилось в течение 1831 г., ибо тогда разность между этим отношением, выведенным по прошлым годам, и его наблюденным значением едва составила полутысячную.

В 1832 г., когда сохранялось то же самое наименьшее большинство, что и в 1831 г., закон предписал [решать] вопрос о *смягчающих обстоятельствах* и сокращать наказание в положительных случаях. Влияние этой меры должно было облегчить осуждения судами присяжных, но в какой степени? Один лишь опыт может ответить нам, это нельзя вычислить заранее в отличие от повышения числа оправданий, которое произошло при изменении наименьшего возможного большинства голосов. Опыт показал, что в 1832 г. пропорция оправданий снизилась до 0.41 и оставалась почти до одной тысячной той же самой в 1833 г., в котором законодательство не изменилось. Отношение числа осуждений к числу обвиняемых до, в течение и после 1831 г. составило соответственно 61/100, 54/100 и 59/100, так что, после убывания на 0.7 [на 0.07] ввиду требования усилить большинство голосов на единицу, оно увеличилось лишь на 0.5 [на 0.05] под влиянием вопроса о *смягчающих обстоятельствах* на сознание присяжных[18].

В течение 1832 и 1833 гг. число политических процессов, представленных ассизам, было значительным. Если вычесть общее число уголовных дел, для которых пропорция оправданий составила 0.41, то окажется, что она повысится до 0.43. Это уже указывает на влияние рода рассматриваемых дел на число оправданий, выносимых присяжными, и оно отчетливо видно в *Comptes généraux*. Уголовные дела там разделены на две главные категории: деяния, имевшие целью кражу или другие посягательства на собственность, и относящиеся к покушениям на личности. Последние составляли примерно треть первых или четверть всех преступлений. С 1825 по 1830 гг. отношение числа оправданий к числу обвиняемых составляло лишь 0.34 в первой категории, а во второй оно повысилось до 0.52, т. е. превысило число осуждений на 0.04[19].

Годичные значения каждого из этих двух отношений изменялись всего-навсего на 0.02 в ту или иную сторону от указанных дробей 0.34 и 0.52. Следует также заметить, что число осуждений, вынесенных наименьшим большинством в семь голосов против пяти, составило лишь 0.05 числа обвиняемых в преступлениях против собственности и дошло до 0.11 в случае обвиняемых в преступлениях против личности. Таким образом, не только осуждения пропорционально более многочисленны в первом случае, чем во втором, но они также в общем были вынесены более сильным большинством.

Эти различия могут частично обосновать меньшую суровость присяжных, когда речь идет о преступлениях против личности, а не против собственности. Последние, как более частые, без сомнения считаются более опасными для общества, однако различия в методах суждения в этих двух категориях недостаточны, чтобы привести к такому существенному неравенству между пропорциями оправдания, указанному опытом. И вычисления обнаруживают, что это неравенство объясняется также более сильной презумпией виновности, которая проистекает из сведений, собранных до вынесения суждения, скорее по отношению к краже, чем касающихся иных обвиняемых.

Сборник *Comptes généraux* свидетельствует также о других соотношениях, которые большие числа делают почти неизменными, но которые я никак не использую. Так, например, с 1826 г., когда начали указывать пол обвиняемых, и до 1833 г. ежегодное отношение числа женщин, отданных под суд, к общему числу обвиняемых составляло почти 0.18. Один единственный раз оно повысилось почти до 0.20 и один единственный раз опустилось до 0.16. И оно было постоянно выше в делах о краже, чем в преступлениях против личности, а пропорция оправданных также была более значительна у женщин, чем у мужчин и доходила почти до 0.43, тогда как для обоих полов вместе она составила лишь 0.39.

Но постоянство этих различных пропорций, которое наблюдается каждый год во Франции в целом, не имеет места, когда рассматриваешь только ассизы. В одном и том же департаменте и при том же законодательстве пропорция оправданий значительно изменяется из года в год. Это показывает, что в юрисдикции одного такого суда годичное число уголовных дел совсем недостаточно для уравнивания беспорядочности голосования присяжных или чтобы отношение числа оправданий к числу обвиняемых оказывалось постоянным. Это отношение к тому же изменяется от одного департамента к другому и число дел в юрисдикции каждого ассиза также недостаточно велико, чтобы можно было решить с достаточной вероятностью, что они являются областями Франции, в которых суды присяжных более или менее склонны к суровости.

Лишь в департаменте Сены число уголовных дел достаточно, чтобы отмеченное отношение числа оправданий к числу обвиняемых изменялось не очень сильно, так что его можно сравнивать с тем, которое имеет место для Франции в целом. Число лиц, отдаваемых каждый год в суды ассиза, составляет в Париже примерно 800, т. е. почти девятую часть от всего королевства. С 1825 по 1830 гг. пропорция оправданий изменялась в пределах 0.33 и 0.40 и ее среднее значение было равно лишь 0.35, тогда как для Франции в целом оно повысилось до 0.39 или более чем на 0.04.Что касается отношения числа осуждений, вынесенных наименьшим большинством семи голосов против пяти, к числу обвиняемых, оно также было немного меньше для Парижа и составило всего 0.065 вместо 0.07 для всей Франции, если не различать категорий преступлений.

Таковы данные, которые нам доставил опыт до нынешнего времени относительно решений ассизов. Теперь, четкая цель теории это вычисление для суда присяжных, состоящего из определенного числа лиц, выносящего приговоры определенным большинством и имеющего очень большое количество дел, пропорцию оправданий и осуждений, которая весьма вероятно будет иметь место, и шанс ошибки судебного решения, принятого случайно выбранными лицами из тех, кто был или будет выбран присяжным. По моему, определение шанса ошибки при осуждении или оправдании в приговоре, вынесенном в известном отдельном деле, невозможно, во всяком случае если основываться на исчислении никак не надежных предпосылок, которые приведут к весьма различающимся результатам и почти к тем, которых желают получить в соответствии с принятыми предпосылками. Но для защиты общества и гарантии, которое оно должно предоставить обвиняемому, важнее всего знать не этот относительный шанс частного судебного решения, который еще надлежит определить, а тот, который относится к множеству дел, переданным ассизам за один год или за много лет и который выводится из наблюдения и вычисления.

Вероятность ошибки какого-то обвинительного решения, умноженная на шанс, что оно имеет место, является истинной мерой опасности, которое общество подвергает невиновного. Произведение шанса ошибки в оправдании и вероятности, что оно вынесено, измеряет ту же опасность, которой подвергается само общество и которая равным образом должна быть известна, потому что только мера этой опасности может оправдать возможность неправедного осуждения. В этом важном вопросе человечности и общественного порядка ничто не может заменить аналитических формул, выражающих эти различные вероятности.

Без их помощи, если дело идет об изменении числа присяжных или о сравнении двух государств, в которых оно было различным, как же узнать, где представляется бóльшая гарантия обвиняемым и обществу, если в одном суд присяжных состоит из 12 лиц и выносит приговоры большинством [не менее чем] в восемь голосов против четырех, а в другом – например, из девяти лиц, избранных из того же списка как в первом случае, выносящих приговоры тем или иным большинством.

Как было решено, что система, которая существовала во Франции до 1831 г., с судебными решениями, принимаемыми также большинством в семь голосов против пяти и вмешательством судей в случае наименьшего большинства, более полезна или менее благоприятна, чем та, которая имеет место сегодня, – с тем же большинством и с влиянием вопроса о *смягчающих обстоятельствах*? Исследовать это сейчас нельзя ввиду отсутствия данных наблюдения, относящихся к нынешнему времени.

Формулы, которые будут определять нашу цель и которые включены в это сочинение, выведены без всяких предположений из общих и известных законов исчисления вероятностей. Они содержат две особые величины, зависящие от морального состояния государства, применяемого способа уголовного судопроизводства и опытности служащих судебного ведомства, которым поручено управлять им. Одна из них выражает вероятность, что присяжный, случайно выбранный из списка в юрисдикции какого-нибудь ассиза, не ошибется при голосовании, другая – вероятность, существующая перед началом прений сторон, что обвиняемый виновен. Таковы два существенных элемента в вопросе об уголовных судебных решениях. Их численные значения должны быть выведены из данных опыта, подобно постоянным, содержащимся в астрономических формулах, выведенных из наблюдений. И всё решение задачи, которая предложена в этих исследованиях, требует соответствия теории и опыта.

Я использовал две величины, данные наблюдениями, и число определяемых элементов тоже равно двум. Это 1) количество осуждений большинством не менее семи голосов против пяти, и 2) то же количество при наименьшем большинстве, притом оба количества делятся на общее число обвиняемых. Прлученные отношения весьма различны для преступлений против личности и посягательств на собственность и я рассматриваю эти две категории по-отдельности. Они также не одинаковы в различных депертаментах. Но необходимость их вывода по очень большим числам заставила меня объединить по каждой из указанных категорий решения всех ассизов королевства. Значения, которые я после этого вывел для этих двух определяемых элементов, являются лишь приближенными и предполагают, что они не очень изменяются от одного департамента к другому.

Но новый закон при восстановлении наименьшего большинства при осуждении в семь голосов против пяти предписал судам присяжных указывать приговоры, вынесенные таким образом. И после этого [нововведения] нам известно по каждому департаменту довольно значительные числа осуждений, вынесенных и таким, и каким-либо иным большинством, что достаточно для определения наших двух элементов. И таким образом мы будем знать, заметно ли изменится шанс ошибки присяжных от одного места к другому. Для департамента Сена в отдельности вычисления уже установили, что этот шанс немного ниже, чем для остальной Франции.

Вот, фактически, основные численные результаты, которые включены в наше сочинение и сводку которых мне представляется полезным привести здесь. До 1831 г. для Франции в целом вероятность присяжному не ошибиться при своем голосовании была немного выше 2/3 в случае преступлений против личности и почти равна 13/17 для преступлений против собственности. Без различия этих категорий шанс оказался немного ниже 3/4, – все это для всей Франции, – и немного выше этой дроби для департамента Сена в частности. В то же время, другой элемент уголовных судебных решений, т. е. вероятность виновности обвиняемого до вынесения решения, не намного превышала 1/2 и находилась между 0.53 и 0.54 для всей Франции по делам о преступлениях против личности. Она несколько превышала 2/3 для преступлений против собственности, а без различия между этими категориями она почти равнялась 0.64 и повышалась примерно до 0.68 в юрисдикции парижских ассизов. Вычитая эти различные дроби из единицы, мы получаем вероятности соответственно ошибки присяжного и осуждения.

Можно заметить, что вероятности виновности обвиняемого перед судебным решением всегда выше отношения числа осужденных к числу обвиняемых. Так, например, в случае, когда эта вероятность ниже всего и превышает 1/2 всего на 3 или 4 сотых, это отношение, как сказано выше, находится примерно на 2 сотых ниже 1/2. Это общий результат и формулы вероятности устанавливают, что это имеет место всегда при любой опытности служащих судебного ведомства, шансе ошибки присяжного и большинства, требуемого для осуждения. Следует также заметить, что эта вероятность виновности обвиняемых, предшествующая судебным решениям, относится лишь к осуждению судом присяжных в соответствии с их способом судить, т. е. в соответствии с неизвестной степенью вероятности, которую они требуют для осуждения и которая несомненно ниже вероятности, что обвиняемый действительно виновен в соответствии с предварительными данными. По существу каждый не задумываясь поставит, например, более одного к одному за то, что обвиняемый, судимый в ассизах за преступление против личности, виновен, хотя предварительная вероятность его вины, определенная для этой категории преступлений, очень мало превышает дробь 1/2.

В 1831 г. большинство, достаточное для осуждения, изменилось, а два элемента, которые мы рассматриваем, должны остаться без изменения. В следующие годы вопрос о *смягчающих обстоятельствах* без сомнения повлиял на их значение, но нам за 1832 и 1833 гг. только известно отношение общего числа осуждений к числу обвиняемых, что недостаточно для определения этих элементов, и мы не знаем, стал ли в это время шанс присяжного ошибиться выше или ниже, чем раньше. Мы сможем это узнать лишь если введем для второго элемента предположение, которое, возможно, намного уклонится от истины. И мы также не знаем, не изменился ли вновь шанс ошибки под влиянием действующего законодательства по причине предписанного присяжным тайного голосования[20]. Когда станет возможным по достаточному числу будущих наблюдений определить и его, и шанс виновности, выводимый из сведений, предшествующих судебному решению, мы также узнаем, повторяя вычисления для все более дальних эпох, не изменяются ли во Франции эти два элемента постоянно в одну или в другую сторону. И это окажется важным документом о моральном состоянии нашего государства.

Несмотря на очень большой опыт уголовных дел, которым безусловно обладают наши судьи, их шанс не ошибиться при голосовании, как представляется, тем не менее лишь немногим отличается от того же шанса для присяжных. По существу, с 1826 по 1830 гг. осуждения при большинстве, составлявшим лишь семь голосов против пяти, имели место во всей Франции 1911 раз. Ассизы, насчитывавшие в то время пять судей, и призванные вмешиваться в таких случаях, 314 раз приняли сторону меньшинства. И вычисление показывает, что они должны были присоединиться к нему примерно 282 раза, если предположить, что вероятность не ошибиться одна и та же для судей и для присяжных. И хотя эти два числа, 314 и 282, не так уж велики, чтобы можно было с очень высокой вероятностью решить, в чем это предположение отклоняется от истины, малая разность между ними дает основание для мысли о том, что разность между шансами ошибки судьи и присяжного также весьма мала. Таким образом, для присяжных этот шанс не появляется, как можно было бы предполагать, от недостатка навыка.

При прочих равных условиях ясно, что доля осуждений убывает по мере того, как от суда требуется более сильное большинство. Если, как в Англии, и для осуждения, и для оправдания должно быть единогласие 12 присяжных, и если принять в качестве значений [наших] двух элементов уголовного судопроизводства те, которые относятся ко всей Франции без различия категорий преступлений, вероятность осуждения будет мало отличаться от одной пятидесятой, а вероятность оправданий – почти вполовину ниже. Решения оказываются весьма затруднительными и по крайней мере там очень часто происходят своего рода соглашения между присяжными и какая-то часть из них жертвует своим мнением. Очевидно также, что без этого единогласные оправдания оказались бы более затруднительными и более редкими чем осуждения в отношении 2:1. Лишь выбрав случайно одно дело из 22, можно ставить один к одному за то, что осуждение или оправдание окажутся единогласными[21].

После судебного решения вероятность, что обвиняемый виновен, намного выше или ниже чем до него в соответствии с тем, осужден или оправдан обвиняемый. Формулы в нашем сочинении указывают это значение по заданному большинству, при котором было принято судебное решение, если только оба элемента, которые включены в них, определены из наблюдений. Если большинство, необходимое для осуждения, должно было быть по крайней мере равно восьми голосам против четырех, вероятность вины осужденного немного превысило дробь 0.98 для преступленний против личности и дробь 0.998 для преступлений против собственности. Это сводит шансы ошибки осуждения к немногому менее двух сотых и двух тысячных соответственно. Если учитывать вероятность никогда не быть оправданным, то шансы ошибочного осуждения оказываются примерно равными одной стопятидесятой и лишь четырем десятитысячным соответственно[22]. В то же время оказывается, что вероятности невиновности оправданного обвиняемого примерно равны в этих случаях 0.72 и 0.82.

Приняв во внимание вероятность не быть осужденным, можно также установить, что шансы виновного быть оправданным примерно равны 0.18 и 0.07, так что среди очень большого числа оправданных более 1/6 и примерно 1/14 должны были бы быть осуждены.

В течение семи лет с 1825 по 1831 гг. число осужденных большинством не менее восьми голосов против четырех во всей Франции оказалось равным примерно 6000 для преступлений против личности и примерно 22 000 для преступлений против собственности. В соответствии с шансами неверного осуждения, указанными выше, можно полагать, что примерно 40 и 9 этих обвиняемых не были виновны[23]. В то же время число оправданных, но виновных, должно было составлять более чем в 50 раз больше[24] чем не осужденных обвиняемых, т. е. равняться примерно 360.

Но нельзя упускать из вида то значение, которое мы придаем слову *виновный* и которое объяснено выше. Из него следует, что число 18 не является верхним пределом действительно невиновных осужденных, тогда как 360, напротив, это нижний предел числа оправданных, хотя никак не невиновных. Этот результат вычислений далек от того, чтобы понизить уважение, которое нам следует иметь к рассматриваемому предмету или уменьшить доверие к решениям судов присяжных. Напротив, он подходящ для того, чтобы воспрепятствовать всякому преувеличению ошибки, которой можно опасаться в осуждениях. По существу, их суть не позволяет проверить их по опыту. Но эти результаты имеют общее со многими другими приложениями математики, которые не в большей степени допускают проверку и достоверность которых, как и здесь, опирается лишь на строгость выводов и точность данных наблюдения.

В годы, предшествовавшие 1831 г., для всей Франции вероятность ошибки в осуждении, вынесенном наименьшим большинством в семь голосов против пяти, была примерно равна 0.16 или 0.04 для преступлений против личности и против собственности соответственно. Без различия этих категорий ее значение было 0.06. По формуле Лапласа этот шанс ошибки был одним и тем же в обоих случаях и почти впятеро выше чем 0.06. Но кроме того следует заметить, что вмешательство суда было в то время необходимо при указанном наименьшем большинстве, так что, если судьи подтверждали решение присяжных, шанс ошибки, равный 0.06, убывал немного меньше, чем на одну сотую. Таким образом, из 1597 осуждений, которые были вынесены при наименьшем большинстве в течение пяти лет с 1826 по 1830 гг., как можно полагать, примерно 15 или 16 были ошибочны[25], т. е. обвиняемых, хотя и не невиновных, не следовало осудить.

Отличительная суть этой новой теории вероятностей судебных решений по уголовным делам состоит, стало быть, в априорном определении, по данным очень большого числа дел того же самого вида, шансов ошибки судей и виновности обвиняемого до начала прения сторон. Этот [последний?] шанс должен соответствовать всем видам судебных решений, – уголовной [исправительной?] полиции, военной юстиции, судопроизводства в гражданских делах, – лишь бы в каждом из них было достаточно данных для определения этих двух элементов. Он должен также применяться к судебным решениям, которые выносились в очень большом числе особыми трибуналами в злополучные революционные эпохи. Но в этом отношении, чтобы не оставлять никаких сомнений в общности и точности теории, необходимо некоторое пояснение. Трудность, которую этот исключительный случай представляет, никак не ускользнет от тех, кто хочет со вниманием отнестись к результатам моего труда.

Подсудимый может быть осужден либо потому, что виновен, а судьи не ошиблись, либо потому, что невиновен, а судьи ошиблись. Отношение числа осуждений к числу обвиняемых не изменяется при изменении вероятности виновности обвиняемого до судебного решения и безошибочности голосов каждого судьи. Оно остается прежним когда, например, эти вероятности равны 2/3 и 3/4, и когда они равны лишь 1/3 и 1/4. Прежним оно оказывается и тогда, когда обе эти вероятности очень мало отличаются от достоверности или единицы, и когда они почти нули. И в этих крайних случаях число осуждений очень мало отличается от числа обвиняемых. По этой причине уравнения, которые следует решить, чтобы определить эти вероятности, всегда допускают два действительных и взаимнообратных корня. Тем не менее, каждое из этих решений имеет отличающее его свойство. Принимая одно из них, получим вероятность виновности осужденного более высокую, чем его невиновности; напротив, принимая другое, получим обратное. В обычных случаях следует выбирать именно первое решение, потому что неразумно предполагать, что трибуналы как правило несправедливы или что они чаще всего судят противно здравому смыслу. Но это уже не так, когда судебные решения выносятся под влиянием страстей. И тогда уже следут принимать не разумный корень уравнения, а другое решение, которое приписывает столь высокую вероятность несправедливости.

Большая доля осуждений, вынесенных революционными трибуналами, недостаточно обосновывало юридическую вину обвиняемых. По этой причинеп, мы никак не можем выделить осужденных, бывших виновными и не виновными в соответствии с законами той эпохи, которые этим трибуналам было поручено применять. Следут всегда обращать внимание на то, что в этой теории несправедливость судьи и страсти прокурора считаются шансами ошибок, равно как и чрезмерное сострадание и избыток снисходительности и что вычисления основаны на результатах голосования, каковы бы ни были причины, которые его определяли.

В трибуналах уголовной [исправительной?] полиции отношение числа осуждений к числу обвиняемых для Франции в целом в среднем за девять последовательных лет находилось в пределах от 0.86 и 0.85. Но этого указания недостаточно для определения ни априорной вероятности виновности обвиняемого, ни вероятности безошибочности судьи при голосовании. Предполагая, что судебные решения выносятся тремя судьями, что обычно имеет место, нам следует также знать какие доли осуждений выносятся единогласно и простым большинством двух голосов против одного. Эти доли, которые не указаны наблюдениями, можно дополнительно определить лишь при некоторых произвольных допущениях.

В случае военных трибуналов нет также двух данных, необходимых для определения специальных значений двух элементов, содержащихся в формулах для вычисления вероятностей. Военные суды состоят из семи судей и осуждения не могут выноситься меньшим большинством чем пяти против двух. Общее число осуждений оценивается равным 2/3 числа обвиняемых. Но мы не знаем доли тех, которые произошли ни единогласно, ни простым большинством. Не имея этих данных, нельзя точно сравнить военную юстицию с ассизами относительно шанса ошибки осуждений и оправданий, а иметь такую возможность было бы очень интересно.

Когда речь идет о судебных решениях в гражданских делах, формулы вероятности включают лишь одну специальную величину, а не две, и именно ту, которая выражает шанс судьи не ошибиться при голосовании. Решения трибуналов первой инстанции выносятся как правило тремя судьями в соответствии с описанием, которое я привел. Но отношение числа дел, решение по которым принято единогласно, к числу тех, которые были решены простым большинством двух голосов против одного, неизвестно, и это делает невозможным непосредственное определение шанса ошибки при голосовании. По судебным решениям, на которые поданы апелляции в королевские суды, этот шанс можно вычислить по сравнению подтвержденных и неподтвержденных приговоров, если полагать, что шанс ошибки судей обоих трибуналов один и тот же. Хотя это предположение быть может намного уклоняется от истины, я все-таки принимаю его, чтобы иметь возможность дать пример вычисления ошибки, которой можно опасаться в судебных решениях по гражданским делам. Истина или справедливость следует из решений, по необходимости единогласных, судей, у которых нет никакого шанса ошибки. Ни в каком деле эта *абсолютная справедливость* не известна. Тем не менее, по ошибочным голосованиям и решениям можно понять то, что ей противоположно и вопрос состоит в том, чтобы определить их вероятности и, следовательно, пропорции, в которых они происходят почти точно и с высокой вероятностью при достаточно большом числе дел.

В сборнике *Compte général* [разночтение!], который публикуется правительством, можно найти количество решений судов первой инстанции, подтвержденных и отмененных королевскими судами в течение последних трех месяцев 1831 г. и в 1832 – 1833 гг. Отношение первого из этих чисел к их сумме для Франции в целом почти равно 0.68. Оно не менялось от одного года к другому даже на 1/70 своего значения, так что, несмотря на разнообразие дел, которое должно было иметь место, и несомненно на неравенство в просвещении служащих судебного ведомства, достаточно примерно 8000 выносимых ежегодно приговоров, чтобы это отношение приняло почти постоянное значение. Это является еще одним весьма примечательным примером всеобъемлющего закона больших чисел. В юрисдикции королевского суда Парижа это отношение заметно выше и дошло примерно до 0.76.

Прилагая его значение для Франции в целом и принимая 7 для числа советников каждого королевского суда, который выносит апелляционные приговоры в гражданских делах, мы найдем число, немного большее 0.68, для вероятности такого советника или судьи первой инстанции, выбранного случайно по всему королевству, не обманывать и не ошибаться при суждении о деле, также случайно взятом из тех, которые ежегодно подаются в суды этих двух инстанций. Кроме того, возможно, что эта вероятность различна для дел, решенных в первой инстанции, на которые ни одна из сторон не подавала апелляции.

По примеру этой дроби 0.68 можно найти, пренебрегая тысячными, 0.76 для вероятности добротности судебного решения первой инстанции, 0.95 для вероятности, относящейся к апелляционному суду, когда он подтверждает суждение первой инстанции и 0.64, когда он отменяет это суждение, и, наконец, 0.75 для вероятности в случае, когда неизвестное решение королевского суда подтверждается вторым королевским судом, который исходит из тех же данных, что и первый. Значения вероятности, что и трибунал первой инстанции, и первый апелляционный суд судят добротно; что трибунал – плохо, а суд – хорошо; суд – плохо, а трибунал – хорошо; и оба – плохо, примерно равны соответственно 0.649, 0.203, 0.113 и 0.035 и в сумме составляют единицу.

Вопросы, относящиеся к вероятности судебных решений, принципы и полученные ответы на которые указаны здесь, находятся в пятой, последней главе этого труда. В четырех первых главах содержатся правила и общие формулы исчисления вероятностей, что освобождает читателя от их поиска в других источниках и позволяет рассматривать некоторые другие вопросы, чуждые специальной цели этих исследований, но подходящие для их освещения исчислением вероятностей. Читатель также найдет [в гл. 3-й] решение задачи, которая указывает как большинство избирательной ассамблеи может измениться после новых выборов совершенно или в гораздо большей степени, чем казалось бы по соотношению избирателей, распределенных по избирательным участкам и голосующих не единогласно в каждом из них.

Примечания

1. По ошибке пропущен §12, так что после §11 следует §13. *Пуассон.*

2. Словом *вещь А* Пуассон обозначал случайную величину.

3. Пуассон (как и Чебышев после него) ни разу не упомянул в этой связи неотрицательного числа, меньшего единицы.

4. Слово части совершенно излишне.

5. Применяя это общее предложение, например, к *терапевтике*, мы получаем то, что, к тому же, соответствует простому здравому смыслу. Если лекарство было успешно применено в очень большом числе схожих случаев, так что количество неудач было очень невелико по сравнению с общим числом опытов, весьма вероятно, что оно окажется успешным и при новом испытании. Медицина не станет ни наукой, ни искусством, если не будет основываться на многочисленных наблюдениях, на такте и должном опыте врача, при помощи которых он судит о сходности случаев и оценивает исключительные обстоятельства. *Пуассон*

6. Представляется, что эти тела во время их появления очень удалены от Земли и находятся на расстоянии, на котором плотность атмосферы никак не ощутима, так что трудно приписать, как это [все-таки] делается, их раскаленность трению о молекулы воздуха. Нельзя ли предположить, что электрические флюиды, находящиеся в нейтральном состоянии, образуют своего рода атмосферу, которая простирается намного выше воздушной массы и, хоть и является физически невесомой, подвержена притяжению Земли и потому следует в своих движениях за земным шаром? В соответствии с этим предположением, тела, о которых идет речь, и вообще *аэролиты* [каменные метеориты] входя в эту невесомую атмосферу, разлагают нейтральные флюиды своим неравным воздействием на электричества [на электрические заряды] двух родов и нагреваются и раскаливаются ввиду электризации. *Пуассон*

7. Это заметил и Остроградский (1838), который зачитал свой доклад в 1834 г.

8. Светский человек – А.Г. Де Мере (1607 – 1684), строгий янсенист – Б. Паскаль. Янсений (1585 – 1638) – голландский богослов, см. БСЭ, 2-е изд., т. 49, 1957.

9. Лаплас рассматривал эту задачу в гл. 11-й своего труда и в Первом Дополнении к нему.Обратим внимание на то, что Пуассон как правило применял термин *исчисление вероятностей*. Так же поступали впоследствии Бертран, Пуанкаре и Марков. До 1900 г. последний, впрочем, пользовался в своих литографированных курсах термином *теория вероятностей*.

10. Споры о бейесовском подходе не утихли до сегодняшнего дня.

11. Сам Лаплас отделял себя от геометров, см. посвященный ему раздел в этом сборнике.

12. Ассизы – выездные суды с участием присяжных.

13. Пуассон указал предварительное заключение и arrêt d'accusation (постановление о привлечении к суду в качестве обвиняемого?).

14. Пуассон неизменно писал *опыт* и не упоминал статистику.

15. Пол начали различать в таблицах смертности еще до 1832 г. (Qetelet & Smits 1832, p. 33).

16. В конце 1837 г. они были запрещены. В то время в Париже было 7 игорных домов (*La Grande Enc.*, t. 21, p. 152), однако указания на *игры Парижа* мы не нашли.

17. Да, на одну сотую, но почему "своего среднего значения"?

18. В отчете администрации уголовной юстиции за 1834 г., который правительство только что опубликовало, мы находим, что в течение этого года, когда законодательство оставалось тем же, что в двух предшествовавших годах, отношение числа осуждений к числу обвиняемых повысилось до 0.60, лишь на 1/100 по сравнению с указанными годами. Правительство Бельгии по примеру нашего также публикует *Compte général de l'administration de la justice criminelle* в своем королевстве. Суды присяжных были [там] вновь учреждены в середине 1831 г. и наименьшее большинство, необходимое для осуждения, установлено в семь голосов против пяти. Отношение числа оправданных к числу обвиняемых оказалось равным 0.41, 0.40 и 0.39 в 1832, 1833 и 1834 гг. соответственно.

И примечательно, что его среднее значение, 0.40, отличалось лишь на 1/100 от того, которое имело место во Франции при том же большинстве. Перед восстановлением судов присяжных уголовные трибуналы в Бельгии состояли из пяти судей и осуждения могли выноситься простым большинством трех против двух. Отношение числа оправданных к числу обвиняемых также очень мало изменялось от года к году, но доходило примерно лишь до 0.17, т. е. менее чем до половины той величины, которая имеет место в решениях судов присяжных. Это различие больше чем вдвое между пропорциями оправдания не вызвано лишь различием в количествах судей и присяжных (5 и 12) или лишь различием в наименьшем большинстве (три против двух и семь против пяти). Оно, это различие, предполагает также, как усматривается из указанного отчета, что для осуждения судьи требуют вероятность, заметно низшую, чем присяжные каковы бы ни были шансы ошибки у тех и у других. *Пуассон.*

19. Пропорция осуждений, следовательно, составляла 0.48; 0.52 – 0.48 = 0.04.

20. Присяжные не могут больше отказываться от своих решений после того, как примут участие в тайном голосовании. Но есть особый случай, который может иногда представиться и на который имеет смысл указать. Два человека, Пьер и Павел,обвиняются в краже. На вопрос, виновен ли Пьер, 4 присяжных ответили *да*, трое других – *да*, пятеро других – *нет*, и обвиняемый объявлен виновным большинством семи голосов против пяти. На тот же вопрос о Павле четверо первых ответили *да*, трое других, ответивших *да* по поводу Пьера, говорят теперь *нет*, пятеро последних отвечают *да*. Павел поэтому объявлен виновным при большинстве девяти голосов против трех. А теперь задается вопрос, осуществлена ли была кража *многими*, что при положительном ответе влечет за собой более суровое наказание. В соответствии со своим первым голосованием первые четыре присяжных отвечают *да*, а восемь остальных, которые решили, что либо Пьер, либо Павел невиновен, отвечают *нет*. Решение суда присяжных, без того, чтобы противоречить их голосованию, состоит, стало быть, в том, что оба обвиняемых виновны в краже и в то же время что кража не была совершена *многими*.

Пуассон

21. В соответствии с документами, опубликованными в Англии и видимо заслуживающими доверия (Porter), число обвиняемых, ежегодно предстающих перед судом присяжных в последнее время постоянно возрастает, и отношение числа осуждений к числу обвиняемых также монотонно возрастает. Вот результаты, извлеченные из этих документов, которые можно сравнить с имеющимися в нашем государстве. Числа относятся только к Англии и Уэльсу и соответствуют трем периодам по семь лет каждый, заканчивающиеся в 1818, 1825 и 1832 гг. В течение периода в 7 лет, который закончился в 1817 г. [?], число обвиняемых не поднималось до 35 000, а доля осуждений была немного ниже 0.60. За один 1832-й год, последний из всех этих периодов, число обвиняемых дошло до 20 829, из которых 14 947, или почти 3/4, были осуждены.

Я не знаю, возросло или убыло это число в последующие годы. Доли наиболее слабого наказания в Англии и во Франции мало отличаются друг от друга. В Таблице видно, что в Англии число [коротких] тюремных заключений составило почти 2/3 всех осуждений. В течение 1832 и 1833 гг. во Франции первое из этих чисел превысило половину второго. Кроме прочего, таблица показывает, что в последний семилетний период число казненных повысилось в среднем до 60 человек в год. Во Франции это число теперь вдвое меньше и не превосходит 30 в год. *Пуассон*

Таблица к прим. 21

	1	2	3	4	5	6
1-й период	64 538	41 054	0.636	5802	636	27 168
2-й период	93 718	63 418	0.677	7770	579	42 713
3-й период	127 910	90 240	0.705	9729	414	58 757

1.Число обвиняемых. 2. Число осуждений. 3. Отношение (2):(1). 4. Приговорено к смертной казни. 5. Казненных. 6. Приговорено к тюремному заключению сроком 2 года или менее. *Пуассон*

22. Слово *тысячным* исправлено в тексте Пуассона от руки на *десятитысячным*.

23. Аналогичное исправление: число 88 зачеркнуто, вместо него указано число 9. Числа ни здесь, ни чуть ниже не пояснены.

24. *Более чем в 40 раз* переправлено на *более чем в 50 раз*.

25. Очевидно, 15 или 16 ежегодно.

Библиография

Остроградский М.В. (1838, франц.), Извлечение из мемуара о вероятности судебных ошибок. *Полн. собр. трудов*, т. 3. Киев, 1961, с. 65 – 70.

Buffon G.L.L. (1777), Essai d'arithmétique morale. В книге автора *Oeuvr. Philos*. Paris, 1954, pp. 456 – 488.

Condorcet M.J.A.N. (1785), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des decisions rendues à la pluralité des voix*. New York, 1972.

Poisson S.-D. (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*. Paris.

Porter G.R. *Tables of the Revenue, Population, etc of the United Kingdom*, pt. 2. Пуассон не указал ни места, ни года издания. Установить эту книгу нам не удалось.

Quetelet A., Smits E. (1832), *Recherches sur la reproduction et la mortalité de l'homme.* Bruxelles.

14. Флоренс Найтингейл

Найтингейл (1820 – 1910) не интересовалась теорией статистики, но некоторые ее работы имели непосредственное отношение к составлению вопросников, т. е. к малозаметному, но очень важному этапу статистических исследований. Мы сочли целесообразным дополнить ее высказывания аналогичными рассуждениями Н.И. Пирогова, о котором, впрочем, см. наши статьи (1995; 2001). Приведенные ниже выписки свидетельствуют о сходном отношении Найтингейл и Пирогова (которые ни разу не упомянули друг друга) к сбору статистических данных.

Найтингейл рано обратилась к статистике, но особо занялась ей во время Крымской войны, в 1854 г., при своей самоотверженной работе в английских военных госпиталях; за первые семь месяцев войны смертность от болезней в армии превышала 60%. Пирогов также заинтересовался статистикой достаточно рано, и также вплотную столкнулся с ней на Крымской войне (разумеется, на российской стороне фронта).

Подчеркнем, что Найтингейл также основала учение об уходе за больными и ранеными и что после возвращения в Англию она упорно и успешно занималась улучшением санитарного состояния армии, смертность в которой почти вдвое превышала смертность в тех же возрастах вне ее, а также общественной гигиеной, переписями населения и госпитальной статистикой.

Трудно выбрать обширный отрывок из сочинений Найтингейл, непосредственно относящийся к нашей теме, но мы надеемся, что приводимые цитаты окажутся интересными.

1.Уход за больными. (Nightingale 1859a)

Цель важнейшего практического урока, который можно преподать сестрам, это научить их что́ наблюдать, как наблюдать, какие признаки указывают на улучшение, и, напротив, – какие из них существенны и напротив, какие свидетельствуют о пренебрежении и о каком виде пренебрежения (с. 194).

Неопределенность и неточность в ответе на вопрос "Лучше ли ему?", которым так злоупотребляют, казались бы нелепыми, не будь они тягостны (с. 194).

“*Думаете ли Вы, что пациент намного слабее, чем шесть недель назад?” “Нет, нет, сэр. Он уже очень давно встал с постели и оделся и может теперь пройти по палате”. Это означает, что сестра не заметила, что шесть недель назад пациент присаживался, но оставался в кровати, а теперь, хоть он и может “пройти по палате”, не способен и пяти секунд простоять на ногах* (с. 195).

Как мало тех, кто по пяти или шести четким вопросам мог бы установить все обстоятельства, точно выяснить и быть в состоянии сообщить, что происходит с пациентом (с. 196).

Почти все суеверия появляются ввиду плохого наблюдения, вследствие [ошибочного мнения, что] *post hoc, ergo propter hoc* [после этого и потому вследствие этого] *и почти все плохие наблюдатели суеверны* (с. 201).

И отсутствие привычки наблюдать, и закоренелый обычай подсчитывать средние часто равным образом вводят в заблуждение (с. 204 – 205).

Врач, который действительно заботится о своих пациентах, скоро приучится спрашивать и должным образом оценивать сведения, получаемые от сестры, которая и тщательно наблюдает, и четко докладывает (с. 206).

Средние совращают нас от внимательного наблюдения (с.207).

Хирургическая сестра должна постоянно быть начеку, постоянно бдительно бороться с грязью, спертым воздухом, отсутствием солнечного света и тепла (с. 209).

Добавим высказывания Пирогова (1850 – 1855, с. 382; 1865 – 1866, т. 5, с. 400):

Отбросьте бабьи толки, департаментские отчеты [!], *хвастливые рассказы энтузиастов, шарлатанов и слепорожденных, – спокойно следите за судьбой раненых, с пером в руках, из операционной комнаты в больничную палату, из палаты в ганренозное отделение, а оттуда в покойницкую – это единственный путь к истине.*

Под истиной, видимо, понимался верный метод лечения, – о чем Найтингейл, разумеется, не писала. Пирогов, конечно же, не считал, что каждый раненый попадал в гангренозное отделение (не говоря уже о покойницкой).

Вопросы ставить ограниченные и более определенные.

Заметим еще аналогичное высказывание Кетле (1846, с. 289): следует задавать вопросы “лишь об абсолютно необходимых сведениях и такие, на которые наверняка можно получить ответ”.

2. Больничная статистика (Nightingale 1859b)

Найтингейл (с. 171) выделила статистику хирургических операций и рекомендовала (с. 173) принять общую терминологию послеоперационных осложнений. К ним, как она заметила (с. 10), ведут плохие условия больницы:

Может быть наиболее тонкая проверка санитарных условий в больницах обеспечивается ходом и окончанием лечения после операций и происходящих осложнений. [...] *Возникновение и распространение лихорадки или больничной гангрены, рожи и пиэмии обычно представляют намного более верное мерило неудовлетворительного состояния больницы, чем статистические сведения о смертности* [которая зависит от вида болезней у пациентов, принимаемых больницей].

В 1860 г. Международный конгресс статистики (Congrès 1861, p. 247) принял предложения Найтингейл по единообразному плану больничной статистики. А вот начальные строки той же книги (Nightingale 1859b):

Быть может странно выдвигать в качестве первейшего требования к больнице, что она не должна вредить больным. [...] *Действительная смертность в больницах, особенно в больших многолюдных городах, намного выше, чем следовало бы ожидать от любого подсчета, основанного на смертности от того же вида болезней вне больниц.*

Это, конечно, являлось следствием госпитализма, – комплекса вредных влияний больничной обстановки на пациентов, и особо – распространения инфекции от одних пациентов или персонала другим. Термин *госпитализм* ввел, видимо, Симпсон (Simpson 1869 – 1870, заглавие), но его суть стала ясной по крайней мере несколько десятилетий раньше. Вот, например, утверждение Пирогова (1849, с. 193):

Важным условием успеха или неуспеха является "госпитальная конституция", т. е. следствие устройства госпиталя, его расположения, местности, и, наконец, нередко [...] *следствие известных болезней, пользуемых в том или другом госпитале.*

И вот авторитетное мнение Пирсона (K. Pearson 1924, p. 57):

Ее статистика была не только исследованиями, она действительно была ее религией. Как ученый, Кетле был для нее героем и каждую страницу подносного экземпляра его [1869] *она испещрила замечаниями. Найтингейл считала, и все свои действия всегда основывала на этом убеждении, что официальные лица могли быть успешными только если руководствовались статистическим знанием. Законодатели, не говоря уж о политиках, очень часто терпели неудачу ввиду отсутствия статистических знаний. Но нет, она шла еще дальше. Она считала, что вселенная, включая человеческие сообщества, развивается в соответствии с божественным промыслом и что человек обязан стараться понять этот промысл и направлять свои действия в согласии с ним. Но, как она считала, чтобы понять мысли Бога, мы* *должны изучать статистику, ибо она является мерой Его цели. Таким образом, изучение статистики было для нее религиозным долгом*.

Библиография

Пирогов Н.И. (1849), *Отчет о путешествии по Кавказу. Собр. соч.*, т. 3. М. – Л., 1959, с. 63 – 388.

--- (1850 – 1855), *Севастопольские письма. Собр. соч.*, т. 8. М., 1961, с. 313 – 403.

--- (1865 – 1866), *Начала общей военно-полевой хирургии. Собр. соч.*, т. 5 и т. 6, с. 55 – 309. М., 1961.

Шейнин О.Б. (1995), Н.И. Пирогов как статистик. *Изв. СПб унив. экономики и финансов*, №3 – 4, с. 144 – 151.

--- (2001), Pirogov as a statistician. *Hist. Scientiarum*, vol. 10, pp. 213 – 225.

Congrès (1861), *Congrès international de statistique. Compte rendus*. London.

Galton F. (1869), *Hereditary Genius.* London – New York, 1978. [*Наследственность таланта*. СПб, 1875.]

Kopf E.W. (1916), Fl. Nightingale as a statistician. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 15, pp. 388 – 404. Перепечатка в книге Kendall M.G., Plackett R.L., редакторы (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London, pp. 310 – 326.

Nightingale Fl. (1859a), *Notes on nursing. Sel. Writings*. New York, 1954, pp. 123 – 220.

--- (1859b), *Notes on Hospitals*. London, 1863.

Pearson K. (1924), *Life, Letters and Labours of Francis Galton*, vol. 2. Cambridge.

Quetelet A. (1846), *Lettres sur la théorie des probabilités*. Bruxelles.

--- (1869), *Physique sociale*, tt. 1 – 2. Bruxelles. Переиздание книги 1836 г. с измененным заглавием. [Bruxelles, 1997; *Социальная физика*, тт. 1 – 2. Киев, 1911 – 1913].

Simpson J.Y. (1869 – 1870), *Hospitalism. Works*, vol. 2. Edinburgh, 1871, pp. 289 – 405.

15. Жозеф Луи Франсуа Бертран

Бертран (1822 – 1900) хорошо известен в теории вероятностей ввиду своего трактата (1888), оглавление к которому мы воспроизводим в переводе. Написанный превосходным языком, он содержал интересные новые результаты, и особенно его парадоксальную задачу о длине случайной хорды данного круга (Шейнин (1994; 2003). Вместе с тем, Бертран допустил ряд грубых ошибок и неверных утверждений. Он оказал сильное влияние на Пуанкаре и, быть может вопреки безмерно критическому духу трактата, на возбуждение интереса к теории вероятностей во Франции (Bru & Jongmans 2001).

Исчисление вероятностей
Оглавление

Случай, когда два игрока обладают равными капиталами и делают одинаковые ставки. **95.** Вероятность, что игрок, который играет неопределенно долго, будет разорен. Могут представиться три случая. **96.** Случай, когда разорение не является достоверным, это тот, в котором игрок имеет преимущество. **97.** Численный пример. **98.** Вероятность разориться в точности после заданного числа партий. **99.** Приближенное значение этой вероятности. **100.** Вероятность разориться после μ-й партии. **101.** Наивысшее значение вероятности. **102.** Наивысшее значение приближения. **103.** Вероятное значение числа партий перед разорением одного из игроков. **104.** Случай, когда игра не безобидна. Теорема Руше. **105. Ее я**вная очевидность. **106.** Недостаточность доказательства. **107.** Сведение случая безобидной игры к общему случаю. **108.** Случай равных капиталов в начале игры. **109.** Когда два игрока играют друг против друга, оба могут быть разорены. Недостаточность одного, казалось бы очень простого рассуждения. **110.** Случай, когда Пьер и Павел каждый имеет по 2 франка. **111.** Случай, когда они имеют [по] 3 франка. **112.** Общий случай. **113.** Исследование комбинации, которая предположена для повышения шансов выигрыша.

Гл. 7-я. Вероятность причин с. 142 – 174

114. То, что в исчислении вероятностей понимается под *причиной*. **115.** Изложение задачи. Формула, по которой она решается. **116.** Другое доказательство этой формулы. **117.** Задача о неизвестном составе урны. **118, 119.** Другой способ понимать изложение. **120.** Более общая задача. **121.** Приближенный закон вероятностей. **122.** Другой способ уточнить изложение. **123.** Неверные применения предыдущих результатов. **124.** Обсуждение опыта Бюффона. **125.** Обсуждение принятого метода приближения. **126.** Исключительный случай, в котором часто принимаемое рассуждение очевидно не имеет смысла. **127.** Закономерность мужских и женских рождений. **128.** Какая закономерность должна удивлять. **129.** Пример Бюффона. **130.** Пример Лапласа. **131.** Условия задачи должны быть подробно определены. **132, 133.** Некоторые примеры. **134.** Применение теории двойных звезд (Мичелл). **135.** Вероятность будущих событий. **136, 137.** Нелепое применение формулы вероятности восхода Солнца.

Гл. 8-я. Закон ошибок наблюдений с. 175 – 225

118. Постулат Гаусса. **139.** Другое неявное предположение. **140.** Случай, в котором постулат строго выполнен. **141.** Следствие принятых предположений. **142.** Сравнение результата с известной формулой. Кажущееся, но не реальное согласование. **143.** Другие противоречия, следующие из принятого закона. **144.** Следствие другого способа сочетания измерений. **145.** Наблюдение подтверждает правило Гаусса. Постоянные ошибки исключены. **146.** Метод проверки. **147.** Результаты Брадлея, обсужденные Бесселем. **148.** Определение параметра *k.* Различные формулы. **149.** Возможные проверки. **150.** Вероятное значение квадрата ошибки, допускаемой при использовании первой формулы. **151.** Вероятное значение, соответствующее второй. **152.** Сравнение двух результатов. **153.** Эти формулы можно заменить другими, более предпочтительными. **154.** Другое видоизменение

197. Теория средних в общем не применима к одновременному определению многих величин. **198.** Если многие значения одного и того же неизвестного независимы, можно принять среднее с учетом их весов. Первый пример. **199.** Второй пример. **200.** Третий пример. **201, 202.** Задача, в которой значения одного и того же неизвестного не независимы, решена по принципу, доказательство которого следует в деталях изменить[3]. **203.** Общая задача. Первое решение Гаусса. **204.** Если, как представляется, не предполагать ничего о законе вероятности, условия изложения не изменятся существенно. **205.** Подстановка наименьшего вероятного значения квадрата ошибки в вероятнейшую ошибку. **206.** Если число уравнений превышает число неизвестных, то между ошибками существуют необходимые соотношения, которые не могут быть удовлетворены. **207.** Выражение, принятое для одного из неизвестных. Оно приводит квадрат вероятного значения ошибки к минимуму. **208.** Если ошибки очень малы, решение является наиболее общим. **209.** Вероятное значение квадрата ошибки, которой следует опасаться. **210.** Первый пример. **211.** Второй пример. **212.** Вероятные значения квадратов ошибок не зависят от соответствия результатов. Пояснение этого парадокса. **213.** Доказаны формулы для наблюдений, которые еще не сделаны. **214.** Можно встать на весьма отличную точку зрения и задача станет неразрешимой. Обобщение этого на примере. Вероятное априорное значение неизвестного, которое будет вычислено апостериорно, является необходимым элементом решения. **215.** Задача относится к теории вероятностей причин[4]. Решение невозможно ввиду отсутствия одной из необходимых величин. **216.** Обсуждение аналогичной задачи. **217.** Исследование общей задачи, множество решений бесконечно. **218.** Первый пример. **219.** Второй пример. **220.** Оценка ошибки, которой следует опасаться, в очень простом случае при приравнивании истинного и вероятного значений. Числовые вычисления. **221.** Теорема наименьших квадратов. **222.** Упрощение вычисления. **223.** Пример. **224.** Теория Гаусса. **225.** Возражения Бьенеме. **226.** Поправки, предписанные методом наименьших квадратов, являются детерминированными функциями действительно совершенных ошибок. **227.** Выражение суммы квадратов поправок. **228.** Среднее значение этой суммы. **229.** Пример. **230.** Недостоверность некоторых утверждений подрывает теорию.

Гл. 12-я. Законы статистики с. 307 – 318

231. Существует более одного способа советоваться со случаем. Когда вероятность постоянна, среднее остается тем же в большом числе испытаний, но шансы уклонений миогут быть различными. **232.** Алгебраическое выражение задачи. **233.** Лаплас и Пуассон в своих исследованиях статистики рождаемости упустили это замечание. **234.** [**З**амена урны с заданной вероятностью извлечения шара требуемого цвета на ряд урн с той же средней вероятностью того же события уменьшает дисперсию числа появлений шара.] **235.** Влияние [?] важности застрахованной суммы на шансы уклонений от среднего. Формула, выведенная в предположении, что извлечения производятся из одной и той же урны, неприемлема. **236.** Закон смертности Гомпертца.

Гл. 13-я. Вероятность решений с. 319 – 327
237. Критическая сводка попыток применить исчисление вероятностей к юридическим решениям.

Таблица значений интеграла от функции отрицательного квадрата с. 329 – 332

Примечания
1. Бертран рассматривает здесь условные вероятности.
2. Бертран замечает, что Максвелл, при выводе закона распределения скоростей молекул, не учел зависимости между тремя составляющими скоростей.
3. Формулировка заглавия §203 крайне неудачна. Имеется в виду, что нельзя забывать о зависимости.
4. Как правило, Бертран употреблял термин *исчисление вероятностей.*

Библиография
Bertrand J. (1888), *Calcul des probabilités*. Тождественное 2-е изд., 1907. Перепечатки: New York, 1970, 1972.
Bru B., Jongmans F. (2001), Bertrand. В книге Heyde C.C., Seneta E., редакторы (2001), *Statisticians of the Centuries*. New York, pp. 185 – 189.
Rouché E. (1888), Sur un problème relatif à la durée de jeu. *C.r. Acad. Sci. Paris*, t. 106, pp. 47 – 49.
Sheynin O. (1994), Bertrand’s work on probability. *Arch. Hist. Ex. Sci*., vol. 48, pp. 155 – 199.
--- (2003), Geometric probability and the Bertrand paradox. *Historia Scientiarum*, vol. 13, pp. 42 – 53.

Именной указатель

Указатель не покрывает пристатейных библиографий. Для авторов, упомянутых в Оглавлении, соответствующие разделы не включены. Так, для Гюйгенса указаны отдельные страницы, но не включен раздел 2 (с. 28 – 42). Далее, имея в виду, что Р. Прайс фактически стал соавтором мемуара Бейеса, он, как и сам Бейес, не указан на соответствующих страницах 130 – 183. Наконец, поскольку Зюссмильх упоминал сравнительно многих авторов и иных лиц, мы составили для соответствующего раздела 10 свой отдельный именной указатель (с. 229 – 231).