III

Теория вероятностей и статистика в XVIII веке

Lo sviluppo della teoria della probabilità e della statistica.
Storia della Scienza, t. 6. Roma, Ist. Enc. Ital., 2002, pp. 529 – 541

1. Введение

Эта статья, рукопись которой мы представили на английском языке, появилась в печати в итальянском переводе (без библиографии); вопреки договору, английский текст не был опубликован. Ниже он приводится в переработанном переводе.

Теорию вероятностей можно начать с переписки **Паскаля** и **Ферма** 1654 г. и с посвященного ей трактата **Гюйгенса** 1657 г. Моральная достоверность и приложение статистических вероятностей обсуждались в философской литературе (Арно и Николь 1662), и это в известной степени повлияло на **Якоба Бернулли**, сыгравшего громадную роль в истории теории вероятностей (п. 2). Во второй половине XVII в. **Петти** и **Граунт** создали политическую арифметику, самые интересные и важные задачи которой относились к статистике населения и ее закономерностям. Имея в своем распоряжении весьма несовершенные данные, Граунт сумел составить первую таблицу продолжительности жизни и вывести важные заключения, относящиеся к медицинской статистике. В 1694 г. **Галлей** составил вторую такую таблицу, намного более точную, и заложил основы страховой математики. **Ньютон** применил вероятностные рассуждения для исправления древней хронологии, а в рукописи 1664 – 1666 гг. придумал простой мысленный опыт, чтобы показать, что еще не известная геометрическая вероятность могла иметь дело с иррациональными соотношениями шансов. Этот материал мы описали в статье [II], а предысторию теории вероятностей – в [I].

2. Первая предельная теорема

Искусство предположений, – посмертный и неоконченный труд **Якоба Бернулли**, – было опубликовано в 1713 г. Оно содержало перепечатку трактата Гюйгенса 1657 г. с важными комментариями; исследования в области комбинаторного анализа (с введением *чисел Бернулли*); решение задач на азартные игры; и, наконец, исчисление вероятностных предположений и доводов и доказательство бессмертной теоремы, – (слабого) *закона больших чисел* по терминологии **Пуассона**. В этой же последней части появилось (но не было использовано) не вполне, правда, формализованное *классическое* определение вероятности, обычно приписываемое **Лапласу**. Не было, однако, объявленного автором приложения "предыдущего учения в гражданских, моральных и экономических делах".

Исчисление предположений и доводов также не было существенно использовано, но интересно, что оно фактически применяло теоремы сложения и умножения шансов, – т. е., неявно, вероятностей. Кроме того, эти вероятности были неаддитивными; нечто могло иметь 2/3 достоверности, а ему противоположное – 3/4 (1713/1986, с. 38). Подобные вероятности начал изучать Koopman (1940), Бернулли же мог исходить из средневековой теории пробабилизма, которая считала вероятным мнение каждого отца церкви.

И вот теорема Бернулли. Он рассматривал *испытания Бернулли*, а именно $\nu = (r + s)n$ независимых испытаний, в каждом из которых исследуемое событие А появлялось (как мы скажем) с вероятностью $p = r/(r + s)$. Если число наступлений А равнялось μ, то, как доказал Бернулли,

$$P(|\frac{\mu}{\nu} - p| \le \frac{1}{r+s}) \ge \frac{c}{1+c},$$

где c было произвольно, а $\nu \ge 8226 + 5758 \lg c$. Таким образом, оказалось, что

$$\lim P(|\frac{\mu}{\nu} - p| < \varepsilon) = 1, \nu \to \infty. \qquad (1)$$

Это означало, что статистическая вероятность μ/ν равносильна теоретической p, поскольку при большом числе испытаний она обеспечивала моральную достоверность. Бернулли четко указал, что хотел установить, существует ли предел (1) и действительно ли он равен 1, а не какому-либо меньшему (положительному) числу, потому что в противном случае индукция (исходящая из ν испытаний) оказалась бы менее надежна, чем дедукция. Закон больших чисел обосновал применимость статистических исследований, и, следовательно, новый (после ее приложения к проблемам смертности [II, п. 4.2.3]) выход теории вероятностей из области азартных игр.

Добавление к пункту 2

Печальным обстоятельством следует считать появление статьи Чайковского (2001), состоящей поровну из самоуверенности и глупостей. В ней можно найти вымышленное описание закона больших чисел (ЗБЧ), произвольное истолкование многих других вопросов, равно как и внесение наукообразных терминов типа *познавательная модель* (= аксиома) и бессмысленные утверждения (*в годы торжества Максвелла и Дарвина баланс стали трактовать как равнодействующую всех случайностей*).

Якоб Бернулли будто бы пытался объединить априорную, апостериорную, моральную (которая оказалась субъективной) и логическую вероятности. Две последние являются трудно различимыми разновидностями априорной, и верно только то, что Бернулли не отличал явно субъективной вероятности от объективной, что никак нельзя назвать попыткой объединения чего-то.

Бернулли "туманно" определил вероятность? Так ведь он привел четкий пример. Формулы (1) у него не было? Не было только в явном виде. А вообще ЗБЧ следует называть теоремой Кардано – Бернулли … Причин для этого великого переворота несколько. Во-первых, именно Кардано, а не Арно и Николь (1662), указал, что априорную вероятность можно определить по статистической, Бернулли же просто перепутал их с Кардано (на которого нет ссылки в библиографии автора). Ну, нет, не мог Бернулли перенять отсутствовавший у Кардано пример с нечестным нотариусом, и сам Чайковский (с. 45), не сознавая этого, глухо назвал по этому поводу французских авторов, у которых указанный пример-то и есть.

Во-вторых, Чайковский (с. 51) утверждает, что идея доказательства ЗБЧ, брать все исходы "ровно по одному разу", содержалась у Кардано. Так этой идеей пользовались все ученые, начиная с Орема и Кеплера [I, п. 8.1.2], которых автор забыл.

В третьих, и это у него главное, Кардано косвенно заявил, что при бесконечно большом числе испытаний апостериорная вероятность совпадет с априорной, и Чайковский четко добавил, что эту идею Бернулли также перенял у Кардано. Повторяем, что точной ссылки на Кардано нет, и проверить автора трудно, нет и никакого доказательства, что Бернулли был знаком с сочинением

Кардано. И неясно, высказался ли Кардано мимоходом и притом лишь в контексте азартной игры, или обратил особое внимание на свое утверждение.

Идея Кардано не была новой. В XVI в. мы видим утверждение о том, что с возрастанием числа измерений убывает погрешность среднего [IV, п. 5.5] и знаем [IV, Прим. 8], что Тихо наблюдал на нескольких инструментах, чтобы повысить точность своих результатов. Подобный подход и соответствующие идеи относятся к предыстории ЗБЧ, но не более того.

Так воздадим же бернуллиево Бернулли, а карданово – Кардано, Чайковский же пусть останется у разбитого корыта.

Далее. Бернулли, оказывается, не верил в случайность, – см., однако, начало части 4 его книги. Лейбниц "несомненно помог" Бернулли? Да, но совсем не в смысле автора, после смерти которого он к тому же приписал начало его работы в теории вероятностей своим "увещеваниям" [II, п. 2.4.4].

Идем дальше. Гоббс не признавал случайности? См. [I, п. 9.1]. Устойчивость статистических частот объяснил только Лексис? А мы думали, что Бернулли и Пуассон! Переиначив цитированное им же высказывание Паскаля, Чайковский заявил, что ни Паскаль, ни Ферма не высказали "даже смутных статистических догадок". И они удовольствовались своей перепиской и к теории вероятностей не вернулись? Ферма вообще занимался другими исследованиями, Паскаль имел в виду ввести в науку *геометрию случая* (о чем автор упоминает!), но ушел в религию. Лаплас "изящно" доказал ЗБЧ, но как? И что нового было у него? Он был строгим детерминистом и случайности не признавал? Ср., однако, п. 9! Наконец, теория вероятностей будто бы основана на понятии вероятности, на самом же деле – на понятии случайной величины.

Ну, хватит. Я уже весь в дерьме.

3. Монмор

Его трактат (1708) об азартных играх оказался весьма полезным, в частности **Муавру**. В нем Монмор исследовал многие старинные и новые игры, одна из которых, рассмотренная в простейшем варианте еще **Галилеем**, требовала подсчета шансов выбросить k очков при броске n f-гранных костей (или даже n костей с разным количеством граней). В связи с этой задачей Монмор использовал формулу включения и исключения для событий A_i расположенных как угодно друг относительно друга

$$P(\sum A_i) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i A_j) + \sum P(A_i A_j A_k) - \ldots,$$

где $i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n, i < j, i < j < k, \ldots$

При f = Const = 6 (например) указанная задача равносильна определению вероятности сумме n взаимно независимых случайных величин, с равной вероятностью принимающих значения 1, 2, …, 5, 6, равняться k.

Во второе издание свой книги 1713 г. Монмор включил свою весьма интересную переписку с **Николаем Бернулли**; одну из рассмотренных ими задач мы упоминали ранее [II, Прим. 2]; о некоторых других темах их переписки см. пп. 7.1 и 10.2.

В предисловии к своей книге Монмор (1798/1713, с. vi – vii); перевод Шейнин 2006, с. 52 – 53) сообщил о предрассудках в связи с играми и вообще "во всех жизненных делах, в которых случай играет какую-то роль", а **Лаплас** (1814) уделил специальную главу иллюзиям, в том числе в играх и лотереях, см. перевод, 1999, с. 835 левый столбец. Монмор справедливо заметил, что прошедшее не влияет на будущее, а **Бертран** (1888, с. XXII) выразился аналогично, но гораздо убедительнее: рулетка "не имеет ни воли, ни памяти".

Вообще же серии событий изучались неоднократно (а их теория является предметом математической статистики). Решение соответствующих задач можно найти у Муавра, а в 1767 г. **Эйлер** исследовал серии выхода числовых последовательностей в выборках без возвращения; в 1793 г. **Джон Дальтон** встретился с сериями при изучении влияния северных сияний на погоду (Шейнин 1984, п. 5.2), и именно в метеорологии, уже в XIX в., **Кетле** вплотную занялся сериями событий и создал элементы теории серий (там же, п. 5.3).

4. Муавр

Его основным сочинением было *Учение о шансах* (1718), в которое, начиная со второго издания 1738 г., он включил вывод своей предельной теоремы, отпечатанный частным образом в 1733 г., но написанный им "дюжину лет или более" до того. А мемуар Муавра 1712 г., появившийся еще до посмертного выхода в свет *Искусства предположений* **Якоба Бернулли**, можно считать предварительным ядром *Учения* … Именно там, т. е. до Бернулли, он опубликовал *классическое* определение вероятности.

Учение … было написано для широкого круга читателей и содержало решение многих задач из области азартных игр, хотя часто без обоснования. Тем не менее, там оказались и весьма важные результаты, см. ниже и в п. 10.1, и о ее переводе на французский язык помышляли и **Лагранж**, см. его письмо **Лапласу** 30.12.1776 г. в томе 14 его Трудов, и Лаплас (там же).

И вот упомянутая выше теорема. Стремясь определить закономерность мужских и женских рождений (см. наш п. 7.1), Муавр доказал, что при n испытаниях Бернулли при вероятности *успеха* p в единичном испытании число успехов μ подчинялось предельному закону

$$\lim P\left(\alpha \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} \exp(-z^2/2)dz,\ n \to \infty, \qquad (2)$$

$q = 1 - p$. Заметим, что $np = E\mu$ и $npq = D\mu$ – ожидание и дисперсия числа успехов; понятие дисперсии по существу ввел **Гаусс**. Сходимость к пределу равномерна по α и β, но и это понятие появилось лишь в XIX в.

При выводе своей формулы Муавр широко пользовался разложениями функций в степенные ряды (иногда – в расходящиеся ряды, учитывая суммы лишь их начальных членов).

Так в теорию вероятностей было введено нормальное распределение (которое неявно появилось уже у **Николая Бернулли**, см. п. 7.1). Муавр доказал (2) для случая $p = q$ (в его обозначениях: $a = b$), но справедливо заметил, что его рассуждения могут легко быть обобщены. Более того: название его мемуара 1733 г., который он включил во второе и третье издания *Учения* …, упоминало “бином $(a + b)^n$, разложенный в ряд”. Впрочем, Муавр не указал, что погрешность его формулы в случае конечных значений n возрастала с убыванием p (или q) от 1/2 и не исследовал скорости предельного перехода.

Следуя после-ньютоновской английской традиции, Муавр не применял обозначения интеграла, а английский язык был плохо известен на континенте Европы. Далее, Тодхантер, историческое исследование (1865) которого многие десятилетия оставалось единственным в своем роде, поверхностно описал формулу (2) и, в частности, ни слова не сказал о фактической общности результата, см. его с. 192 – 193. Наконец, **Лаплас** (1814/1999, с. 861 – 862) одобрительно отозвался о теореме Муавра, но недостаточно четко разъяснил ее значение. Неудивительно, что континентальная Европа распознала суть открытия Муавра лишь в конце XIX в.

В 1812 г. сам Лаплас доказал ту же теорему (и по инициативе **Маркова** она теперь называется теоремой Муавра – Лапласа) при помощи формулы суммирования **Эйлера – Маклорена** и вычислил ее поправочный член, учитывавший конечность значений *n*.

Развитие науки потребовало изучения случайных переменных, подчинявшихся не только биномиальному распределению, как в исследованиях Якоба Бернулли и Муавра, однако же стремление сумм этих переменных к нормальному закону осталось в силе при весьма общих условиях. Этот факт описывает *центральная предельная теорема* (термин Полиа 1920 г.), и формула (2) оказалась ее простейшим частным случаем.

В том же *Учении* … Муавр применил возвратные последовательности (теорию которых он сам и разработал), сформулировал в Предисловии теорему умножения вероятностей (уже не шансов) и определил независимость событий *A* и *B* формулами (в современных обозначениях)

$$P(B) = P(B/A),\ P(A) = P(A/B),$$

для зависимых же событий (например, трех) указал формулу

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB).$$

Основную цель своего сочинения Муавр видел в отделении случайности от предначертания (иначе: от необходимости), т. е. в задаче, которую мы сегодня отнесли бы к математической статистике. Лишь постепенно понятие случайности начало уточняться указанием соответствующих законов распределения, Муавр же понимал случайное в смысле *равномерной* случайности. В Посвящении первого издания *Учения* … **Ньютону** (перепечатано на с. 329 третьего издания) Муавр назвал именно указанную цель и добавил, что ее достижение позволит, “исходя из Вашей [Ньютона] философии”, устанавливать “свидетельства утонченной [божественной] мудрости и предначертания”.

5. Бейес

Его основополагающий посмертный мемуар 1764 г. представил и

комментировал статистик Прайс. Бейес изучал *обратную* задачу, как назвал ее Прайс, а именно, определение неизвестной теоретической вероятности события по статистической вероятности его появления в испытаниях Бернулли. Вот суть его рассуждения. Шар падает $\alpha + \beta = n$ раз на отрезок AB единичной длины, притом местоположения точек падения и некоторой точки c, расположенной на нем, равновероятны. Далее, α раз шар падает левее c (α успехов) и β раз – правее (β неудач), статистическая вероятность успеха равна α/n. Требуется установить положение точки c. Для каждого отрезка $[a; b]$
принадлежащего AB

$$P(c \in [a; b]) = \int_a^b C_n^\alpha x^\alpha (1-x)^\beta dx \div \int_0^1 C_n^\alpha \; x^\alpha (1-x)^\beta dx. \qquad (3)$$

Таково апостериорное распределение точки c при ее равномерном априорном распределении, т. е. при нашем до-опытном незнании. Величина x в формуле (3) обозначает также длину отрезка Ac, которая изменяется после каждого нового испытания. Теперь известно, что

$$P = I_b(\alpha + 1; \beta + 1) - I_a(\alpha + 1; \beta + 1),$$

где I – символ неполной бета-функции. Знаменатель формулы (3), как Бейес легко установил, был при каждом допустимом значении α равен

$$P(\text{число успехов равно } \alpha \text{ вне зависимости от } Ac) = 1/(n + 1).$$

Добавим: равен соответствующему значению полной бета-функции, умноженному на C_n^α.

Вплоть до 1930-х годов было исключительно трудно оценить числитель той же формулы при больших значениях α и β, и некоторые комментаторы даже посчитали, что Бейес не был по этой причине удовлетворен своими результатами и не стал сам публиковать их. Во всяком случае, он вряд ли был удовлетворен предельными соотношениями, потому что их нельзя было непосредственно применять к конечным значениям n; Прайс, кстати, так и заявил по поводу предельной теоремы **Муавра**. И всё-таки Тимердинг, редактор немецкого перевода мемуара Бейеса (1908 г.), доказал, что вычисления английского математика, содержавшиеся в дополнении 1765 г. к основному мемуару, могли быть приведены к формуле

$$\lim P\left(a \le \frac{x-\alpha/n}{\sqrt{\alpha\beta/n^{3/2}}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp(-z^2/2)dz,\ n \to \infty,$$

в которой, как мы заметим, $\alpha/n = \mathrm{E}x$ и $\alpha\beta/n^3 = \mathrm{D}x$.

Сам Бейес об этом предельном выражении умолчал, быть может потому, что, как он заявил в отдельной заметке, также посмертной, недопустимо (по примеру Муавра и других математиков того времени) использовать расходящиеся ряды. Примечательно, что Бейес (как и Муавр), конечно же, не владел понятием дисперсии, но видимо понял, что элементарное и формальное преобразование левой части формулы (2) приводит к

$$P\left(a \le \frac{\mu/n - p}{\sqrt{pq/n}} \le b\right)$$

и потому не обеспечивает надлежащего ответа *обратной* задачи.

И именно мемуар Бейеса, как допустимо считать, завершил построение исходного варианта теории вероятностей; ее вершинами были закон больших чисел и решение прямой и обратной задач (по терминологии Прайса), т. е. результаты Муавра (2) и Бейеса (3).

Основной результат Бейеса кроме того устанавливал, что, зная лишь весьма приближенно закон распределения случайной величины, можно уточнить его по наблюдениям: равномерное распределение положений *c* на *AB* удалось заменить распределением (3).

Прайс дополнил мемуар Бейеса примерами, в которых предполагалось полное предварительное незнание, и вот самый известный из них. Восход Солнца наблюдался миллион раз подряд; насколько вероятен следующий восход? По формуле (3) при $a = 1/2$, $b = 1$, $\alpha = 10^6$ и $\beta = 0$ соотношение шансов *успеха* и *неудачи* оказывается равным двум в миллионной степени к единице. **Чебышев** (1879 – 1880, с. 158), следует сказать, сформулировал ту же задачу на житейском уровне: студент ответил на несколько вопросов, какова же вероятность, что он ответит на следующий?

Как и в случае с Муавром (п. 4), математики на континенте Европы ознакомились с мемуаром Бейеса с сильным запозданием. Этому помешал английский язык автора и отсутствие должного пояснения его весьма тонких рассуждений. "Бейесовский подход" некоторое время (с 1930-х годов и в течение примерно 30 лет) отрицался, в первую очередь Р. Фишером, видимо в связи с введением плохо известных априорных распределений, но затем Корнфильд (1967, с. 41) заметил, что теорема Бейеса "вернулась с кладбища". По поводу недавних баталий см. также Gillies (1987).

Пусть событие B может произойти с одним и только одним из несовместимых событий A_1, A_2, …, A_n, вероятности которых были вначале равны $P(A_i)$. Тогда, после наступления B, эти вероятности окажутся равными

$$P(A_i/B) = P(B/A_i)P(A_i) \div \sum_{j=1}^{n} [P(B/A_j)\, P(A_j)]. \qquad (4)$$

Такова так называемая теорема Бейеса (**Курно** 1843, § 88), которой, однако, в мемуаре Бейеса не было; этим термином мы склонны называть его предельную теорему (3). Формула (4) появилась у **Лапласа** (1774b), выразившего ее, впрочем, только на словах и обосновавшего ее позже (1781, с. 414). Он (1786) также распространил метод Бейеса на иные априорные распределения и решил несколько задач, приводящих к формулам типа (3); своего предшественника Лаплас упомянул лишь позже (1814/1999, с. 862 левый столбец). Более других известна его собственная оценка вероятности последующего восхода Солнца (там же, с. 837 левый столбец), которую он обосновал ранее (1781):

$$P = (\alpha + 1)/(\alpha + 2).$$

При помощи того же метода Лаплас (1774b) изучал урновые задачи, а в 1781 г. перешел к исследованию закономерности мужских и женских рождений, см. наш п. 7.1. Впрочем, указанное исследование уже не содержало ничего принципиально нового, и мы на нем не останавливаемся.

Вот задача из первого мемуара: урна содержит бесконечное число белых и черных шаров. Было извлечено без возвращения p белых шаров и q черных, и требуется определить вероятность появления белого шара при последующем тираже.

Обозначим неизвестное соотношение белых шаров к их общему числу через x, тогда вероятность получения указанной выборки будет пропорциональна $x^p(1 - x)^q$ и при равной вероятности всех значений x искомая вероятность будет равна

$$P = \int_0^1 x \cdot x^p(1-x)^q dx \div \int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{p+1}{p+q+2},$$

откуда (при $p = \alpha$ и $q = 0$) и следует приведенная выше формула для вероятности последующего восхода Солнца. Заметим, что полученный результат численно равен ожиданию случайной величины с плотностью

$$\varphi(x) = Cx^p(1-x)^q,\ C = 1 \div \int_0^1 x^p(1-x)^q dx.$$

Теперь требуется определить вероятность извлечения m белых и n черных шаров в последующих $(m + n)$ тиражах при условии малости этих чисел по сравнению с p и q. Прибегнув к приближенным вычислениям, Лаплас получил

$$P = \frac{p^m q^n}{(p+q)^{m+n}}$$

и заметил, что это соответствует (как и должно было быть) значению $x \approx p/(p + q)$.

Наконец, в том же мемуаре Лаплас доказал, что при произвольных $\alpha > 0$

$$\lim P\left(\frac{p}{p+q} - \alpha \le x \le \frac{p}{p+q} + \alpha\right) = 1,\ p,\ q \to \infty.$$

В 1781 г. он использовал этот результат, чтобы заявить, что обширные статистические данные позволят определить соотношение мужских и женских рождений сколь угодно точно [если только оно остается постоянным!]. В п. 11 мы опишем еще одну подобную задачу, исследованную Лапласом. При больших p и q расхождения между статистическими и теоретическими значениями таких величин, как $p/(p + q)$, можно оценить при помощи теоремы Муавра – Лапласа. Действительно, при p, $q \to \infty$ вероятности извлечения шаров каждого цвета остаются постоянными даже при тиражах без возвращения.

6. Геометрические вероятности. В XVIIIв. теория вероятностей обогатилась понятием “геометрическая вероятность”. Первым на возможность применения геометрических вероятностей указал **Ньютон** [II, п. 5]. **Д. Бернулли** воспользовался ей в 1735 г. в астрономическом контексте и ее же фактически применяли все авторы, начиная с Николая Бернулли, вводившие непрерывные распределения. Всеобще известной стала задача Мичелла (Michell 1767): определить вероятность того, что две звезды из общего их числа, равномерно распределенных по небесной сфере, находятся не далее, чем в 1° друг от друга. Если выбрать произвольную точку (A) на сфере с центром O и провести малый круг, перпендикулярный OA на расстоянии 1° от A, то искомая вероятность окажется отношением площадей поверхностей полученного шарового сегмента и шара. Особое внимание этой задаче уделили в XIX в., а **Бертран** (1888, с. 170 – 171) заметил, что без изучения иных возможных особенностей звездной системы нельзя решить, расположены ли звезды случайно.

По-настоящему ввел геометрические вероятности **Бюффон** (1777); впрочем, краткое сообщение о своей работе он анонимно опубликовал еще в 1735 г. Вот его основная задача: игла длиной $2r$ падает “случайным образом” на пучок параллельных прямых, расположенных на расстоянии $a > 2r$ друг от друга. Требуется определить вероятность того, что игла пересечет одну из них. Оказывается, что

$$P = 4r/\pi a.$$

Сам Бюффон, правда, определил лишь отношение r/a для заданной P = 1/2. Многие комментаторы описывали и обобщали задачу Бюффона. Первый из них (**Laplace** 1812/1886, гл. 5, с. 366), заметил, что формула Бюффона позволяла экспериментально [но с небольшой точностью] определить число π. Основной целью Бюффона было, как он указал, “ввести геометрию в свои права в науке о случае” (1777, § 23).

Формальное определение геометрической вероятности, а точнее, общее определение, пригодное и для дискретного, и для непрерывного вариантов, появилось лишь у **Курно** (1843, § 18), который заменил отношение тех и других шансов отношением их протяженностей (étendue). Мы бы сейчас применили термин *мера*. В конце того же XIX в. Бертран (1888, с. 4) придумал свою знаменитую задачу о длине “случайной” хорды данного круга и указал для нее три различных решения в зависимости от истолкования “случайного”. Чубер (1903, с. 107 – 108) отыскал три дополнительных естественных решения, а другой автор (De Montessus 1903) вообще доказал, что количество решений несчетно.

7. Приложения теории вероятностей

7.1. Статистика населения. Основоположники политической арифметики (п. 1) сомневались в том, что статистические данные нужны кому-либо кроме высших должностных лиц государства. И действительно, первые социальные программы начали появляться (в Германии) лишь в 1880-е годы; до того времени правительства интересовались лишь числом налогоплательщиков и мужчин, способных носить оружие.

Новым предметом изучения в статистике населения оказалось соотношение мужских и женских рождений, интересное в связи с общей целью отделения случайного от предначертания (ср. п. 4). **Кеплер** и **Ньютон** сумели добиться этой цели в отношении системы мира, и ученые начали отыскивать закономерности в движении населения.

В 1712 г. **Арбутнот** опубликовал статистику крещений за 82 года (1629 – 1710) в Лондоне, которая выявила, что число мальчиков среди новорожденных неизменно превышало число девочек. Арбутнот заключил, что, будь вероятности мужских и женских рождений одинаковы, подобный результат имел бы вероятность 2^{-82} и что преобладание мальчиков поэтому является божественным законом, который "возмещал" более высокую смертность и их самих, и мужчин по сравнению с девочками и женщинами.

Это рассуждение не было строгим. Во-первых, исходные данные имелись только по Лондону (даже не по Англии), притом только по христианской части населения. Во-вторых, число крещений не совпадало с числом рождений; **Граунт** (1662/2005, конец гл. 3), например, косвенно засвидетельствовал, что между 1650 и 1660 гг. "менее половины населения Англии было убеждено в необходимости крещения" [новорожденных]. В третьих, сравнительная смертность мужчин и женщин не была изучена, и соответствующее (верное) утверждение Арбутнота оставалось необоснованным. В четвертых, указанная выше вероятность, конечно же, пренебрегаема, но точно такую же ничтожную вероятность имела бы любая последовательность 82 символов *м* и *ж* (*м* означало бы преобладание мальчиков в данном году, а *ж* – преобладание девочек). Даже в наше время определение случайной последовательности (тем более конечной) остается исключительно трудной задачей.

Арбутнот упустил возможность опередить Лапласа, который с методической целью решил подобную же задачу (**Даламбера –**

Лапласа): из букв составлено длинное слово (Константинополь). Какова вероятность его случайного составления? Поскольку слово имело смысл, то, несмотря на равную вероятность любого расположения букв, можно полагать, что оно было составлено преднамеренно. Задачу придумал Даламбер (1767, с. 254 – 255), но ответил на нее неубедительно.

Наконец, Арбутнот вполне мог бы истолковать свои данные подчинением рождений биномиальному распределению, оставив на долю провидения выбор его параметра. Так, между прочим, и заявил **Муавр** (1733/1756, с. 253; перевод: Шейнин 2006, с. 108).

Николай Бернулли (**Монмор** 1708/1713, с. 388 – 394; перевод: Шейнин 2006, с. 71 – 73) исследовал данные Арбутнота по-своему. Обозначим соотношение рождений (пусть будут рождения) мальчиков и девочек через m/f, число всех ежегодных рождений – n, из которых μ – мальчики, и, далее,

$$n/(m + f) = r,\ m/(m + f) = p,\ f/(m + f) = q,\ p + q = 1 \text{ и } s = 0(\sqrt{n}).$$

Тогда

$$P(|\mu - rm| \le s) \approx (t - 1)/t,\ t \approx [1 + s(m + f)/mfr]^{s/2} \approx \exp[s^2(m + f)^2/2mfn],$$
$$P\ (|\mu - rm| \le s) \approx 1 - \exp(s^2/2pqn),\ P[|\mu - np|/\sqrt{npq} \le s] \approx 1 - \exp(-s^2/2).$$

Он таким образом косвенно ввел в теорию вероятностей экспоненциальную функцию отрицательного квадрата (только что мы сами явно записали ее). Впрочем, результат Бернулли не был ни интегральной предельной теоремой, поскольку s было ограничено по условию, ни локальной теоремой, так как он не содержал множителя $\sqrt{2/\pi}$. Об отсутствии этого множителя не упомянул Хальд (1998, с. 17), а по его описанию трое современных математиков (Юшкевич 1986) заключили, что Бернулли близко подошел к локальной теореме. Мы этого не понимаем.

Отцом статистики населения оказался **Зюссмильх** (1741). Он собрал обширный материал о движении населения, которым пытался обосновать божественное провидение о роде человеческом. Само название его книги свидетельствовало об этом: *Божественный порядок в изменениях рода человеческого, выведенный из рождений, смертей и размножения*, а в § 14 книги он поэтически представил свой основной вывод; вот заглавие параграфа, обусловленное тем, что Зюссмильх был военным священником: *Армейский полк* [переменного состава!] *на* *марше и Божественный порядок.*

Впрочем, Зюссмильх обрабатывал свои данные малоудовлетворительным образом; например, объединяя результаты по городам и сельским местностям, он не учел соответствующих весов, пусть даже приближенно назначенных. Вместе с тем, он привлек внимание к статистике населения и проложил дорогу **Кетле**, а его таблицы смертности оставались в употреблении еще в начале XIX в.
Наконец, некоторые рассмотренные им вопросы (внебрачные рождения, самоубийства, преступления) позднее стали предметом изучения моральной статистики.

Эйлер активно участвовал в подготовке второго издания книги 1765 г., и одна из ее глав была даже частично включена в *Полное собрание* его сочинений (*Opera omnia*, серия 1, т. 7). В ней Эйлер (вряд ли Зюссмильх) заключил, что население возрастает в геометрической прогрессии, и этот вывод в общем и целом остался в силе, и его же (без ссылок) в свое время подхватил Мальтус.

И в своих сочинениях, и при ставших неизбежными столкновениях с чиновниками Берлина и Пруссии Зюссмильх заявлял, что правители обязаны заботиться о населении и в интересах государства, и во исполнение заповеди о необходимости заселения Земли. Он (1758) также указывал, что бедность и невежество способствуют распространению эпидемий.

В том же томе *Opera omnia* опубликованы несколько мемуаров Эйлера, посвященных статистике населения. Переписей (в современном понимании) в те времена еще не было, и он не смог представить себе значимость некоторых демографических факторов, но он решил несколько важных конкретных задач и выработал основную часть математической теории смертности. Успешно занимался Эйлер и страховой математикой и заложил ее основы, а его формулы оставались в ходу еще в начале XIX в., возможно и долее. Особое внимание он уделял мерам по исключению чрезмерных рисков, сопровождал изложение многочисленными примерами и составил множество полезных таблиц.

В 1766 – 1771 гг. **Даниил Бернулли** опубликовал три мемуара по статистике населения. В первом из них он исследовал преимущества вариоляции, – передачи ослабленной формы оспы от больного здоровому. Вплоть до начала XIX в. эта, не вполне безопасная прививка, от которой умирал один человек из нескольких сотен, оставалась единственным средством спасения от болезни, уносившей миллионы жизней.

Приняв определенные предпосылки о заболеваемости оспой и смертности от нее, Бернулли составил и решил соответствующее дифференциальное уравнение и установил, что вариоляция, практически исключавшая последующее заболевание, увеличивает средний срок жизни более, чем на два года, а потому исключительно полезна. Этот вывод не был безупречным, и **Даламбер** (1761b), не отрицая принципиальной пользы вариоляции, заявил, что не всякий согласится подвергнуться пусть малому риску немедленной смерти в обмен на удлинение жизни в будущем. К тому же (что ранее высказал и **Кондамин**), прививка детей сопряжена с моральной проблемой.

Серьезной опасностью было возможное распространение инфекции в результате вариоляции, которую Бернулли, правда, считал пренебрегаемой, и, наконец, всё его рассуждение главным образом обосновывало пользу вариоляции для государства в целом, а не для отдельного человека. В общем, однако, его мемуар оказался исключительно полезным, поскольку он применил математику, а точнее вероятностный метод, к решению существенно новых задач, но вот о степени его влияния на общественное мнение мы ничего сказать не можем.

В своем втором мемуаре Бернулли исследовал продолжительность женитьб, что было существенно для совместного страхования жизни супругов. Математически он (1768a) исходил из соответствующей урновой модели, урны, наполненной полосками двух различных цветов, вероятности извлечения которых были либо равны друг другу, либо различны. Второй случай, разумеется, соответствовал различной смертности мужчин и женщин.

Свой последний мемуар по статистике населения (1770 – 1771) Бернулли посвятил исследованию соотношения мужских и женских рождений; напомним, что эту классическую задачу рассматривали **Арбутнот, Николай Бернулли** и **Муавр**. Предположив вначале, что и те, и другие рождения равновероятны, Бернулли записал вероятность, что из $2N$ новорожденных m окажутся мальчиками:

$$P = [1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2N-1)] \div [2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2N] = q(N).$$

Эту дробь он вычислил не по формуле **Валлиса**, и не по локальной теореме Муавра (которую он, видимо, не знал, см. ниже), а при помощи дифференциальных уравнений. Вычислив $q(N-1)$ и $q(N+1)$ и оба соответствующих значений Δq, он получил

$$dq/dN = -\,q/(2N + 2),\ dq/dN = -\,q/(2N - 1)$$

и “в среднем” $dq/dN = -\,q/(2N + 1/2)$. Полагая, что подходящее частное решение этого уравнения проходит через точку $N = 12$ и $q(12)$, он вывел значение

$$q = 1.12826/\sqrt{4N+1}.$$

Применение дифференциальных уравнений было его обычным методом в теории вероятностей.

Бернулли также определил вероятность рождения примерно m мальчиков:

$$P(m = N \pm \mu) = q\ \exp(-\,\mu^2/N),\ \mu = 0(\sqrt{N}) \qquad (5)$$

и перешел к общему случаю, – к неравенству вероятностей мужских и женских рождений. Исходя из некоторых статистических данных, он сравнил друг с другом два возможных значения искомого соотношения рождений, но так и не пришел ни к какому определенному решению.

Особо заметим, что Бернулли определил значение μ, при котором сумма вероятностей (5) от $\mu = 0$ до этого значения равнялась 1/2, но не интегрированием, а суммированием. На Муавра он не сослался.

В 1772 г. **Ламберт** в свою очередь занялся статистикой населения. Он предложил умозрительный закон смертности (основанный лишь на аналогии с вытеканием воды из цилиндра и с термическими процессами), исследовал распределение детей в семьях и детскую смертность от оспы. Ламберт произвольно увеличил общее число детей вполовину, видимо стараясь учесть мертворожденных и умерших, а в последнем упомянутом исследовании несколько дополнил соответствующий мемуар Даниила Бернулли. Об одном важном исследовании **Лапласа** см. п. 11.

Важные теоретические исследования, обусловленные запросами страхования жизни, начали появляться с 1725 г. (**Муавр, Симпсон**).
Муавр был самым значительным автором своего времени в области математического страхования жизни, которым он занимался с начала 1720-х годов. Исходя из таблицы **Галлея** [II, п. 2.4.5], он (1725/1756, с. 262 – 263) принял равномерный непрерывный закон смертности для всех

возрастов начиная с 12-ти лет и максимальную продолжительность жизни в 86 лет. Из его многочисленных результатов мы опишем некоторые из числа тех, которые потребовали приложения интегрального исчисления.

1) Определить ожидание продолжительности жизни для человека данного возраста, если максимальное значение (комплемент) этой величины (т.е. 86 минус возраст) равно n (с. 288). Ответ Муавра: $n/2$. Реконструкция проста:

$$\int_0^n xdx/n = n/2.$$

2) Определить вероятность одному человеку пережить другого, если комплементы их жизней n и p, $n > p$ (с. 324). Вот по существу решение Муавра. Обозначим случайные продолжительности жизни A и B через ξ и η. Тогда, поскольку в некоторый момент времени x комплемент жизни A равен $(n - x)$,

$$P\,(\xi \geq x, \eta = x) = [(n - z)/n]dz/p,\ P(\xi > \eta) = \int_0^p [(n - z)/n]dz/p\ = 1 - p/2n.$$

3) Определить ожидание срока, в течение которого два человека с теми же комплементами жизни, что и в предыдущей задаче, остаются в живых (с. 288). Муавр привел лишь ответ, а реконструкция решения (Czuber, замечание 22 к немецкому переводу сочинения Муавра 1906 г.) такова:

$$P\,(x \leq \xi \leq x + dx \text{ или } x \leq \eta \leq x + dx) = [(n - x)/n]dx/p + [(p - x)p]dx/n,$$
$$\mathrm{E}\zeta = \int_0^p \{[(n - x)/np] + [p - x)p/n]\}dx = p/2 - p^2/6n.$$

Заметим, что из вероятности типа $P(\xi \geq x)$ очень просто получить соответствующую интегральную функцию распределения $F(x)$.

Подробное изложение работы Муавра и его основного соперника, Т. Симпсона, см. Hald (1990, с. 515 – 546). Симпсон усовершенствовал, а в нескольких случаях исправил результаты Муавра. Рассмотрев один из вариантов совместного страхования, Хальд (с. 546) заключил, что соответствующие выводы Симпсона были “значительным шагом вперед”.

7.2. Приложения к юриспруденции и экономике. В 1709 г. **Николай Бернулли** опубликовал диссертацию о применении искусства предположений в юриспруденции [II, п. 2.2]. Вероятностным изучением юридических вопросов много позже занялся Кондорсе, но многие последующие авторы отрицали пользу этого подхода. Его наиболее известными противниками оказались Милль (1843/1886, с. 353; перевод 1914, с. 490) и **Пуанкаре** (1896/1912, с. 20; перевод 1999, с. 22), который заявил, что в судах люди ведут себя как баранье стадо. Фактически они пошли намного дальше **Лейбница** (письмо **Якобу Бернулли** 1703 г.); немецкий перевод с латинского см. Gini (1946, с. 405), который полагал, что

Оценка вероятностей исключительно полезна, хотя в примерах из юриспруденции и политических наук тонкие вычисления не так необходимы, как точное перечисление всех обстоятельств.

Да, учет обстоятельств исключительно важен, но он вовсе не исключает вычислений. **Гаусс**, например, счел, что теория вероятностей обеспечивает “путеводную нить” для установления желательного числа свидетелей и судей (присяжных); так от его имени заявил в письме 1841 г. W. E. Weber, см. т. 12, с. 201 – 204 Собрания сочинений Гаусса (1929 г.).

Кондорсе (Тодхантер 1865, гл. 17) пытался установить и указанные числа, и вероятность исключительных событий, о которых сообщает свидетель. Его изложение было, однако, тяжеловесным, и он не указал, что рассматривает лишь идеальный случай независимости решений в суде. Он, правда, заметил, что “люди” должны быть образованы и лишены предрассудков. Мы обязаны, впрочем, упомянуть Крепеля (Crepel 1988), который в своем резюме “настаивал”, что “точка зрения Кондорсе изобретательна, строга и ясна”. Если это и так, то всё-таки *точка зрения* и *изложение* – это разные вещи.

Кондорсе заинтересовался теорией вероятностей в 1772 г., что усматривается из его тогдашнего (3 сент.) письма Тюрго (Henry 1883/1970, с. 97 – 98): “Я забавляюсь, вычисляя вероятности, напишу на эту тему небольшую книжку. […] В основном я придерживаюсь мнения Даламбера, и мы отличаемся друг от друга лишь в нескольких деталях”. Впрочем, о высказываниях Кондорсе в духе Даламбера нам ничего не известно. Crepel (1987) опубликовал резюме упомянутой *книжки*, которая так и не появилась в свет несмотря на его указание.

К мнению Кондорсе **Лаплас** добавил, что государство должно быть представлено образованной и четко мыслящей элитой. Лишь в одном месте и мимоходом он (1816, с. 523) разъяснил, что предполагает независимость суждений присяжных.

Одна из простых формул Кондорсе (1784 – 1787/1994, с. 433), также Тодхантер (с. 400), которая косвенно встречалась и у **Якоба Бернулли**, в гл. 3 части 4 *Искусства предположений*, и впоследствии у Лапласа в 1812 г., относилась к исключительным событиям. Если вероятность такого события сама по себе и правдивость сообщения о нем обозначить через p_1 и p_2, то вероятность события окажется равной

$$P = \frac{p_1 p_2}{[p_1 p_2 + (1-p_1)(1-p_2)]}.$$

Вряд ли этот вывод имел какое-либо значение. При $p_1 = 1/10\ 000$ и $p_2 = 0.99$, оказывается, что $P \approx 0.01$, и вряд ли суд признал бы событие имевшим место; потребовался бы второй свидетель.

Моральная статистика, изучавшая женитьбы, самоубийства и преступления, по меньшей мере обращала внимание общественности на необходимость сбора соответствующих данных и способствовала оценке возможных изменений законов и порядка судопроизводства. Впрочем, она получила должное развитие лишь в XIX в.

Приложение теории вероятностей к экономике началось с 1738 г., – с исследования петербургской игры (п. 10.2) **Даниилом Бернулли**. Он предположил, что выгода (y) игрока и его выигрыш (x) связаны дифференциальным уравнением (кажется, первым в теории вероятностей)

$$y = f(x) = c \ln(x/a),$$

в котором a означало начальный капитал игрока. Бернулли затем принял, что взамен ожидания в азартных играх следовало исходить из *морального ожидания*, т. е. не из

$$\sum p_i x_i / \sum p_i, \text{ а из } \sum p_i f(x_i)/\sum p_i,$$

где p_i как и раньше означали вероятности соответствующих выигрышей (или проигрышей).

Это нововведение позволило Бернулли заменить несообразное со здравым смыслом бесконечное ожидание выигрыша в петербургской игре конечным (моральным) ожиданием. Он также заметил, что новое понятие устанавливает, что даже справедливая игра невыгодна для каждого игрока и применил его, чтобы показать, что (в соответствии с общепринятым мнением) морские грузы выгоднее отправлять на нескольких судах, а не на одном-единственном. Доказал это, однако, Лаплас (1812, гл. 10), см. также Тодхантер (1865, § 383).

Сам термин *моральное ожидание* Бернулли, впрочем, не применял; предложил его швейцарский математик Габриель Крамер в письме 1728 г. **Николаю Бернулли**, текст которого Даниил изложил в своем мемуаре. Новое понятие стало настолько популярным, что Лаплас (1812/1886, с. 189) заменил классическое ожидание *математическим ожиданием*. Его предложение укоренилось во французской и русской литературе, хотя, казалось бы, что от него давно уже следовало отказаться.

В 1888 г. **Бертран** (с. 66) заявил, что моральное ожидание, хоть и стало притчей во языцех, бесполезно, но уже в то время экономисты начали исходить из него при построении теории предельной полезности. Можно добавить, что в 1999 г. мемуар Бернулли был переведен на русский язык.

8. Теория ошибок

8.1. Основная задача. Допустим, что m неизвестных величин x, y, z, … определяются из избыточной системы физически независимых уравнений числом n ($m < n$)

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + s_i = 0 \qquad (6)$$

(понятие линейной зависимости в XVIII в. еще не существовало). Коэффициенты этих уравнений задаются соответствующей теорией, свободные члены – это результаты измерений, а приближенные значения x, y, z, … известны (хотя бы из каких-то предварительных прикидок), так что линейность системы (6) не была ограничением. Подобные системы были несовместны, и за их решение приходилось считать любой набор чисел, устанавливаемый в соответствии с тем или иным дополнительным условием, и приводящий к приемлемым остаточным свободным членам (v_i). Выбор оптимального в каком-либо смысле решения и определение степени его надежности и было основной задачей уравнивания *косвенных наблюдений*.

Случай *прямых наблюдений* ($m = 1$) следует рассмотреть особо. Даны наблюдения $s_1, s_2, \ldots, s_n$ неизвестной константы x, *истинное значение* которой, равно как и его надежность, требовалось определить. Выбор среднего арифметического в качестве оценки неизвестной постоянной прослеживается с начала XVII в. (Шейнин 2005, с. 25 – 26), и лишь в 1722 г. появилось сочинение **Котса**, в котором рекомендовалось, правда, без должного обоснования, придерживаться среднего арифметического.

В древности астрономы обрабатывали свои наблюдения произвольным образом, и в этом смысле древняя астрономия не была еще количественной наукой. Но они знали, что их наблюдения весьма неточны, а в наше время известно, что при *плохих* плотностях распределения среднее арифметическое не лучше (а возможно даже хуже) отдельного наблюдения.

Термин *истинное значение* (Шейнин 2007е) встречается в явном виде с 1760 г. (**Ламберт**) и косвенно отождествляется при этом со средним арифметическим. Такой была и точка зрения **Лапласа** (1795/1912, с. 161), добавивший, однако, условие равновозможности ошибок обоих знаков, формально же определил это понятие **Фурье** (1826/1890, с. 533 – 534), который в свою очередь имел в виду бесконечное число измерений. Независимо от него это определение повторили многие последующие авторы и в том числе **Мизес**, а **Гаусс** (1816, §§ 3 и 4) и другие ученые, включая **Фишера**, применяли термин (стало быть, и понятие) *истинное значение* даже для величин, вообще не существовавших в природе (например, для мер точности).

Ньютон теоретически установил, что Земля является эллипсоидом вращения с экваториальным радиусом (a), превышающим полярный радиус (b). Естественным образом появились классические задачи, – опытная проверка теории и, при ее подтверждении, определение подходящего эллипсоида вращения для фигуры Земли. Решать их можно было одновременно, и в принципе для этого было достаточно двух градусных измерений, но ввиду неизбежных ошибок геодезических и астрономических измерений/наблюдений (и местных уклонений Земли от ее общей фигуры), требовалось намного больше.

В настоящее время для фигуры Земли принят эллипсоид вращения с параметрами (приближенно) $a = 6378.1$*км* и $b = 6356.8$*км*, причем оказывается, что $2\pi a = 39\,941$*км*, что не случайно близко к 40 тысячам: в 1791 г. *метр* был определен как $1/10^7$ четверти парижского меридиана. Этот стандарт длины просуществовал до его замены в 1872 г. длиной *архивного метра* (по месту хранения в Париже) – платинового жезла, изготовленного ранее в качестве носителя исходного определения. Впрочем, с 1960 г. метр определяется в единицах длины световой волны.

8.2. Решение систем уравнений. Системы (6) приходилось решать неоднократно, в основном в связи с запросами астрономии и геодезии, а с начала XIX в. – также для нужд физики и химии. В классическом случае определения фигуры Земли появлялись системы с двумя неизвестными, и было принято составлять все возможные пары уравнений, решать эти подсистемы, а затем осреднять частные решения (уже для трех неизвестных этот метод оказывался чересчур громоздким). В XIX в. обнаружилось, что при надлежащем взвешивании частных решений результат совпадал с решением по методу наименьших квадратов.

Бошкович (Maire & Boscovich 1770, с. 501) предложил другой метод, а именно введение дополнительных условий

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0,\ |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| = \min. \qquad (7a, 7b)$$

Первое из них можно исключить, если сложить уравнения и выразить одно неизвестное через остальные. И, как заметил **Гаусс** (1809, § 186), условие (7b) приводило в точности к m нулевым остаточным свободным членам. Можно сказать, что это следовало из важной теоремы в то время еще не известного линейного программирования. Другими словами, метод Бошковича требовал выбора и решения (m – 1) уравнений из исходных n – но каких именно? Сам Бошкович выбрал требуемую подсистему простым геометрическим приемом, а после него тот же метод уравнивания и для той же цели (обработка градусных измерений) применял **Лаплас** (например, в т. 2 своей *Небесной механики*, 1799 г.), но уже вооружившись для этого аналитическим приемом.

Бошкович ввел свой метод после того, как не удовлетворился сочетаниями уравнений (см. выше). Но интересно, что он применял сочетания даже в простейшем случае (Cubranic 1961, с. 46): он вывел среднее арифметическое из четырех величин только после того, как вычислил полусуммы всех их попарных разностей. Возможно, что он хотел таким образом, не изменяя окончательного результата, получить представление о погрешностях своих исходных данных.

Особым условием *минимакса* решения систем (6) было

$$|v_{max}| = \min.$$

Кеплер (1609/1992, с. 286/113), который заявил, что не смог согласовать птолемееву систему мира с наблюдениями **Тихо Браге**, как можно думать, безуспешно пытался добиться этого по принципу минимакса (не зная еще соответствующего алгоритма и, естественно, имея дело не с линейными и даже не с алгебраическими уравнениями). Действительно, если не подходит даже минимаксное решение, то либо теория неверна, либо наблюдения негодные.

В 1749 г. **Эйлер** был в этом отношении удачливее при обработке градусных измерений, но ни его решение, ни минимаксные решения вообще не обладают никакими оптимальными вероятностными качествами, и Лаплас (1789, с. 506) так и сказал.

С начала XIX в. основным при уравнивании косвенных наблюдений стало, конечно же, условие наименьших квадратов.

8.3. Уравнивание прямых наблюдений. В 1756 г. **Симпсон** доказал, что для дискретных равномерного и треугольного распределений среднее арифметическое в вероятностном смысле предпочтительнее отдельного наблюдения. Он таким образом нашел новое поле приложения теории вероятностей и по существу ввел понятие случайной ошибки наблюдения, т. е. ошибки, принимающей множество значений с соответствующими вероятностями.

Симпсон воспользовался производящей функцией, которую **Муавр** (1730, с. 191 – 197) ввел для вычисления шансов выбросить определенное число очков при броске некоторого числа костей. Впервые он решил эту задачу в 1712 г. (но не привел никакого обоснования), несколько раньше **Монмора** (1708/1713), который применил другой метод решения.

Симпсон (1740) описал те же вычисления комбинаторным методом, а в 1756 г. (*Замечание* к *Предложению* 1) отметил общность старой и новой задач. Рассмотрим к примеру треугольное распределение, при котором вероятности погрешностей

$$-v, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, v \qquad (8)$$

были пропорциональны числам

$$1, \ldots, (v-2), (v-1), v, (v-1), (v-2), \ldots, 1.$$

Производящая функция (всё еще безымянная) была равна

$$f(r) = r^{-v} + 2r^{-v+1} + \ldots + (v + 1)\, r^0 + \ldots + 2r^{v-1} + r^v,$$

так что шанс сумме t ошибок равняться m оказался коэффициентом при r^m в функции $f^t(r)$.

В 1757 г., изменив масштаб, Симпсон пришел к непрерывному треугольному распределению. Интервалы между целыми числами (8) теперь стремились к нулю и отрезок $[-v; v]$ можно было считать как бы состоящим из бесконечного числа указанных интервалов. В заключение Симпсон ошибочно заявил, что его доказательство носит всеобщий характер.

В 1776 г. **Лагранж** распространил выводы Симпсона (на которого он так и не сослался, быть может ввиду яростных приоритетных споров последнего с Муавром) на другие, чисто теоретические распределения. Он, однако, ввел при этом интегральные преобразования, сумел применить производящие функции к непрерывным распределениям и получил другие важные общематематические результаты.

8.4. Ламберт. Допустим, что $\varphi(x;\ \hat{x})$ с неизвестным параметром $\hat{x}$ является плотностью распределения для независимых ошибок $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда произведение

$$\varphi(x_1;\ \hat{x}) \cdot \varphi(x_2;\ \hat{x}) \ldots \cdot \varphi(x_n;\ \hat{x}) \qquad (9)$$

укажет вероятность действительного получения соответствующей серии наблюдений, а максимальное значение (9) – вероятнейшее значение $\hat{x}$. Если, как всегда принималось в классической теории ошибок, $\varphi(x - \hat{x})$ – кривая с единственной вершиной в точке $x = \hat{x}$, то отыскание истинного значения неизвестной постоянной можно будет заменить вычислением вероятнейшего значения $\hat{x}$. Математическая статистика действительно заменила отыскание первых вычислением оптимальных (в этом случае – вероятнейших, соответствующих *принципу наибольшего правдоподобия*) оценок параметров сдвига функций плотностей.

Ламберт первым сформулировал этот принцип в 1760 г. для одновершинной кривой (без указания ее уравнения) и в том же сочинении исследовал обработку наблюдений вообще. В 1765 г. он вернулся к этой теме и, в частности, сделал первую (неудачную) попытку оценить точность наблюдений и умозрительно установил плотность распределения ошибок наведения геодезического прибора. Поскольку “не было причин” для ее “угловатости”, он решил, что кривая плотности – полуокружность.

Это *отсутствие причин* стало позднее называться принципом *недостаточного основания*; именно им можно (нестрого) обосновать равновероятность событий в примерах из жизни и естествознания. **Пуанкаре** и последующие авторы смягчили положение, введя понятие о *произвольных функциях* (**Хинчин** 1961, с. 88 – 89).

Ламберт (1765, § 321) также ввел термин *теория ошибок* (на немецком языке), включив в нее и детерминированную, и вероятностную части. **Бессель** начал пользоваться новым термином, и в середине XIX в. он как-то сразу вошел во всеобщее употребление, хотя до этого ни **Лаплас**, ни **Гаусс** его ни разу не упомянули.

Классическим примером детерминированной ветви теории ошибок было вычисление погрешностей вычисляемых элементов прямолинейных и сферических треугольников по известным погрешностям их измеренных элементов (**Котс** 1722). Погрешности Котс заменил соответствующими дифференциалами и применил простые формулы дифференциального исчисления. Пусть функция (результат наблюдения) y зависит от нескольких параметров, $y = f(x; a; b; \ldots)$. Тогда ее дифференциал dy, т. е. ошибка наблюдения Δy, может быть вычислена для любых заданных множеств $a, b, \ldots$ и $\Delta a, \Delta b, \ldots$ Таким образом, при заданных погрешностях параметров можно заранее выбрать наилучшие значения $a, b, \ldots$

Growing (1983, с. 91 – 108) описал это исследование, перевел его небольшую часть, включил сводку результатов указанных вычислений Котса и описал весьма благоприятный отклик французских астрономов на него, но забыл упомянуть Лапласа (1814/1999, с. 862 левый столбец): “Правилу [рекомендации следовать среднему арифметическому, см. п. 8.1] Котса следовали все вычислители”.

8.5. Даниил Бернулли. В 1778 г. он заявил, что применение среднего арифметического подобно стрельбе вслепую и взамен него рекомендовал принцип наибольшего правдоподобия; на **Ламберта** он не сослался. За плотность распределения он умозрительно принял кривую второго порядка и в случае трех наблюдений пришел к алгебраическому уравнению пятой степени с неизвестным $\hat{x}$, оценкой наибольшего правдоподобия.

В комментарии того же года **Эйлер** отказался от принципа наибольшего правдоподобия: при наличии отклоняющегося наблюдения произведение в левой части (9) становится малым, к тому же слишком сильно сказывается на искомой оценке выбор решения о его отбраковке или оставлении.

Затем, неверно поняв одно из рассуждений Бернулли и исходя из принципа наибольшей суммы квадратов весов наблюдений, Эйлер вывел кубичное уравнение относительно искомой оценки, которая с хорошим приближением всё-таки совпала со средним арифметическим, поскольку оказывалось, что

$$(\hat{x} - x_1)^2 + (\hat{x} - x_2)^2 + \ldots + (\hat{x} - x_n)^2 = \min.$$

Эвристически его условие напоминало принцип наибольшего веса, из которого **Гаусс** исходил в 1823 г. в своем окончательном варианте метода наименьших квадратов: достаточно было условие Эйлера перенести на случай нескольких неизвестных и отказаться от предварительного выбора кривой плотности.

(Апостериорные) веса наблюдений появились потому, что принцип наибольшего правдоподобия и у Бернулли, и у Эйлера сводился к взвешенному среднему арифметическому.

В 1780 г. Бернулли исследовал маятниковые наблюдения. Основываясь на своем мемуаре 1770 – 1771 гг., он принял формулу (5), т. е. нормальный закон, для вычисления погрешности хранения времени, накапливающейся за 24 часа, и кроме того он подразделил ошибки наблюдения на *моментальные* и *хронические*, – действующие пропорционально корню квадратному из промежутка времени, и самому этому промежутку. Иначе говоря, он выделил случайные погрешности (но только подчиняющиеся нормальному закону, хоть их действие во времени и не обусловлено этим ограничением) и систематические (но только постоянные).

Принятые им предпосылки о погрешностях были слишком упрощены даже для появления нормального закона, и он ни слова не сказал о возможной зависимости между периодами смежных колебаний маятника, не заявил он и о пригодности своих выводов для наблюдений вообще. Но он ввел нормальный закон в теорию ошибок и первым явно подразделил ошибки на две основные категории.

8.6. Лаплас. Его основные достижения в теории ошибок относятся к XIX в. и связаны с применением нескольких нестрого доказанных им вариантов центральной предельной теоремы. В XVIII в. он опубликовал два мемуара (1774a; 1781), интересных теоретически, но практически вряд ли полезных (например, ввел без должного обоснования две явно не подходящие плотности). Но уже тогда, в 1781 г., Лаплас предложил свое основное условие для уравнивания прямых наблюдений: сумма ошибок, которых следует опасаться, умноженных на их вероятности (т. е. абсолютное ожидание) должна была быть наименьшей.

В XIXв. он обосновал этим условием принцип наименьших квадратов, что оказалось возможным лишь для погрешностей, подчиняющихся нормальному закону (который в силу центральной предельной теоремы имел место лишь при большом числе наблюдений). Также в 1781 г. Лаплас предложил в качестве плотности распределения функцию

$$\varphi(\alpha x) = 0,\ x = \infty;\ \varphi(\alpha x) = q \neq 0,\ x \neq \infty,\ \alpha \to 0.$$

Его рассуждения можно описать при помощи дельта-функции **Дирака**, однако один из его выводов основывался на рассмотрении интеграла от

$$\varphi[\alpha(x - x_1)] \cdot \varphi[\alpha(x - x_2)] \ldots \cdot \varphi[\alpha(x - x_n)]$$

(здесь – x_i результаты наблюдений), который не имеет смысла на языке обобщенных функций.

С самого начала теория ошибок принадлежала теории вероятностей (**Симпсон**), но ее принципы (наибольшего правдоподобия, наименьшего абсолютного ожидания, наименьших квадратов) впоследствии переняла математическая статистика. Теория ошибок оставалась основным полем приложения теории вероятностей вплоть до 1930-х годов. **Пуанкаре** (посм. публ. 1921/1980, с. 343) заявил, что теория ошибок “естественно” была “основной целью” его трактата 1896 г., а позднее со-основатель современной теории вероятностей **П. Леви** (1925, с. vii) заметил, что без теории ошибок это (его основное, посвященное устойчивым распределениям) сочинение “не имело бы смысла”.

9. Лапласов детерминизм

Хорошо известно его изречение (1814/1999. с. 835 левый столбец) о том, что для всесведущего ума, способного на любые вычисления, случайности не существовало бы, и “будущее, как и прошлое, предстало бы перед его взором”. Но таких умов нет, и допустимо считать, что Лаплас всё-таки каким-то образом признавал случайность даже в принципе (Дорфман 1974, с. 265). Фактически же он и не мог обойтись без нее, о чем свидетельствуют его основополагающие достижения в астрономии и работы по статистике населения. Он (1796, с. 504), к примеру, обсуждал также эксцентриситеты планетных орбит и другие небольшие уклонения “от закономерности” [I, п. 8.1.1].

Заметим, далее, что Лаплас не указал на неустойчивые состояния, при которых малые действия ведут к существенным последствиям. Именно такой схемой, кстати, **Пуанкаре** (1896/1912, с. 4; перевод 1999, с. 11) впоследствии главным образом объяснял суть случайных событий. И, наконец, *лапласов детерминизм* был присущ и **Мопертюи** (1756, с. 300), и **Бошковичу** (1758, § 385), которые упомянули вычисления прошлого и будущего (Бошкович, притом, "до бесконечности в обоих направлениях").

С другой стороны, однако, Лаплас (1776, с. 145) и прежде заявлял, что "случай […] сам по себе не существует"; многие явления могут изучаться лишь в вероятностном смысле, и "теория случаев или вероятностей" обязана своим появлением слабости человеческого ума. Правильнее, конечно, было бы сказать: обязана существованием вероятностных законов поведения сумм и других функций случайных величин, обязана диалектике взаимодействия случайного единичного события и закономерностью массовых случайных явлений.

Особо упомянем *статистический детерминизм* Лапласа (1814/1999, с. 842 левый столбец): он указал не только на закономерности статистики населения и моральной (женитьбы), но и на устойчивость числа писем, отправляемых без адреса, и доходов от лотереи Франции.

10. Некоторые примечательные задачи

10.1. Разорение игрока. А и В продолжают играть, пока один из них не разорится. Как долго будет продолжаться игра? Какова вероятность, что она не продлится более n партий? В своей простейшей форме эта задача восходит к **Паскалю** и **Гюйгенсу** [II, п. 4.1].

Допустим, что игрок А имеет a жетонов и вероятность его выигрыша в каждой партии равна p, и что для игрока В соответствующие величины равны b и q ($p + q = 1$). Обозначим через P_a вероятность потери всех a жетонов игроком А до того, как он выиграет все жетоны у В и через P_{an} – вероятность его разорения не более, чем в n партиях, а для игрока В соответствующие величины пусть будут P_b и P_{bn}. Игру можно представить как случайное блуждание точки С вдоль отрезка длиной ($a + b$) и именно влево – не более, чем на b единиц (шагов), и вправо – не более, чем на a. После каждой партии точка С перескакивает налево с вероятностью p или вправо – с вероятностью q, и игра заканчивается, когда С достигнет любого конца отрезка. Заметим, что случайное блуждание (которое может происходить и в трехмерном пространстве) является (грубой) моделью диффузии и броуновского движения.

Якоб Бернулли несколько раз обращался к этой задаче, но либо (как и

Гюйгенс) вникал в нее недостаточно, либо приведя свою соответствующую формулу (1713, ч. 1, комментарий к Задаче № 5) без обоснования.

Доказал эту формулу

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{a^q(a^p - b^p)}{b^p(a^q - b^q)}, a \neq b$$

Муавр (1712, Задача № 9) весьма остроумным рассуждением. Он также сформулировал правила для вычисления вероятностей ($P_{an} + P_{bn}$), P_{an}, P_{bn} и рассмотрел случай $a = \infty$. В 1718 г. Муавр решил и другие задачи на разорение игрока, но уже без обоснования, которое можно найти у Хальда (1990, § 20.5). Именно при этом он применил свой новый метод возвратных последовательностей, который мы упоминали в п. 4.

Лаплас обсуждал разорение игрока в нескольких мемуарах. В 1776 г. он применил при этом уравнения в частных разностях даже для случая трех игроков. Этот же тип уравнений применял и **Лагранж** в последнем параграфе своего мемуара 1777 г., притом для решения различных вероятностных задач.

10.2. Петербургский парадокс. В письме **Монмору** 1713 г. **Николай Бернулли** (Монмор (1708/1713, с. 402) описал придуманную им игру. Если А выбросит 6 очков при первом же броске кости, он получает 1 экю от В; если это же произойдет только при втором, третьем, четвертом, … броске, то он же получит 2, 4, 8, … экю. Каков его ожидаемый выигрыш (равный его взносу за право играть на таких условиях)? В 1728 г. Габриель Крамер предложил заменить игральную кость на монету, так что ожидаемый выигрыш А (оставшийся бесконечным) стал равным

$$E\xi = 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/8 + \ldots = \infty, \qquad (10)$$

тогда как ни один разумный человек не согласился бы считать его сколько-нибудь существенным.

В п. 7.2 мы упоминали и эту игру, и Крамера, и **Даниила Бернулли**, в мемуаре 1738 г. которого он был описан. Мемуар был опубликован в Петербурге, что и объясняет ее название. Игра была поистине примечательна, ибо

1. Она ввела в теорию вероятностей случайную величину с бесконечным ожиданием.

2. Она натолкнула на мысль о том, что низкой вероятностью выигрыша (ниже некоторого положительного α) следует пренебрегать; в данном случае – учитывать лишь несколько первых членов ряда (10). Но как выбирать α? И когда можно считать вероятность (1 – α) моральной достоверностью? Общего ответа нет, всё зависит от обстоятельств, не относящихся к математике. **Бюффон** (1777, § 8) рекомендовал значение α = 1/10 000, – вероятность здоровому человеку 56 лет умереть в течение ближайших суток. Его рекомендация хорошо воспринималась, но вряд ли когда-либо применялась: указанное значение было слишком низким, и в любом случае оно не должно было быть универсальным.

3. Парадокс игры привел Даниила Бернулли к мысли о моральном ожидании (п. 7.2), при помощи которого он, в частности, заменил бесконечное ожидание (10) конечной величиной.

4. Он также привел возможно к первому серьезному статистическому опыту. В том же сочинении 1777 г., в § 18, Бюффон сообщил о 2048 партиях петербургской игры, средний выигрыш А в которой оказался равным 4.9, а наибольшее число бросков монеты – девяти, да и то лишь в шести играх. Подобный опыт повторил Дутка (1988), но уже с применением компьютера.

5. **Кондорсе** (1784 – 1787/1994, 1-я часть мемуара), см. также Тодхантер (1865, с. 393), а затем **Лакруа** (1816, с. 129 – 130) заметили, что возможно бесконечная игра представляла собой лишь один опыт, и что разумное исследование должно было быть основано на среднем результате многих игр. Много позже Фрейденталь (1951) исследовал такую серию игр, в которой, однако, роли игроков каждый раз определялись заново по жребию.

10.3. Модель Эренфестов. В двух урнах находится по *n* шаров, белых и черных поровну. Определить (ожидаемое) число белых шаров, остающихся в первой урне после *r* циклических перекладок из одной урны в другую. Эту задачу **Даниил Бернулли** (1770) решил и комбинаторным методом, и при помощи дифференциальных уравнений. Он, далее, обобщил ее на случай трех урн и шаров трех цветов и заметил существование предельного состояния – равного числа (ожидаемых) шаров каждого цвета в каждой урне. Сейчас можно сказать, что этот факт следует из теоремы об однородных цепях **Маркова**.

В 1777 г. **Лагранж** решил аналогичную задачу при помощи уравнений в частных разностях для конечного числа урн. Тот же метод применил **Лаплас** в 1811 г. для решения подобной же задачи, а в своей *Аналитической теории вероятностей* 1812 г. он (с. 306) уточнил, что имел в виду средние количества и заметил, что окончательный результат не зависел от первоначального распределения шаров в урнах. Наконец, он (1814/1999, с. 843 левый столбец) указал, что ничего не изменится, если даже в процессе перекладок добавлять новые урны, опять-таки с произвольным распределением шаров в них. Он заключил, хотя, видимо, слишком оптимистически, что

Можно распространить этот результат на все сочетания в природе, в которых постоянные силы […] *устанавливают правильный образ действий, способный вызвать даже из недр хаоса системы, управляемые удивительными законами*.

Также поэтически, хотя лишь на основании действия закона больших чисел, **Бертран** (1888, с. XX) указал, что "во всякой игре случай подправляет свои капризы". Дальнейшая история подобных урновых задач включает знаменитую модель **Эренфестов** 1907 г., с которой принято начинать историю случайных процессов, но которая совпадает с описанной выше моделью.

11. Математическая статистика

Грубо говоря, различие между теорией вероятностей и математической статистикой обусловлено тем, что первая дисциплина дедуктивна, а вторая – частично индуктивна. Она оформилась в XX в., а термин математическая статистика вряд ли появился до Книса (Knies 1850, с. 163) и Вернадского (1852/1963, с. 237). Впрочем, выводы из количественных данных делались уже в древности. В Талмуде, в трактате Taanit (Шейнин 1998, пп. 5.1.2 и 5.3), было указано правило для разграничения случайного от необходимого, а именно, обычной смертности в городе от начала эпидемии чумы. Весьма неточными данными пользовался **Граунт** в 1662 г. и последующие статистики для оценки населения городов и стран и т. д. По **Муавру** (конец п. 4), цель теории вероятностей достигается, как мы сказали бы сейчас, методами математической статистики.

Новый этап в построении математической статистики появился вместе с **Бейесом** (п. 5), а именно со статистическим определением теоретической вероятности события. Для **Лапласа** основным средством открытия законов естествознания оказалась теория вероятностей, – но, можно сказать, в сочетании с математической статистикой. Так, установив, что существование некоторой астрономической величины, указанной наблюдениями, было весьма вероятно, он (1812, с. 361) посчитал желательным обосновать это существование аналитически и действительно добился успеха. И вообще несколько глав его *Аналитической теории вероятностей* можно было бы сейчас считать статистическими. А поскольку он в большой степени опирался на свои прежние мемуары, то неудивительно, что мы находим в них упоминание "нового жанра задач на случаи" (1774b, с. 56) и даже "новую ветвь теории вероятностей" (1781, с. 383). *Новая ветвь* – это выражение **Лагранжа** (письмо Лапласу 13.1.1775 в т. 14 его *Трудов*), который, однако, имел в виду вычисление некоторых вероятностей Лапласом. Он же (п. 6) указал на возможность вычисления π методом статистического моделирования.

Любопытное утверждение **Уильяма Гершеля** (1817, с. 579) свидетельствует, что статистикой иногда обосновывали неверные заключения. Он заявил, что любая звезда, выбранная "случайно" из 14 000 звезд первых семи величин, "вряд ли будет намного отличаться по своим размерам от среднего из всех". Размеры звезд были в то время совершенно неизвестны, и никакие выводы не могли исходить из незнания, см. [V, п. 9.4].

Теория выборочного метода является главой математической статистики, однако элементы этого метода применялись с XIII в. в Англии при контроле отчеканенной монеты (Стиглер 1977). Тот же Гершель много лет, начиная примерно с 1784 г., подсчитывал количества звезд в различных участках неба; он полагал, что его телескоп проникал до границ конечной, по его мнению, вселенной, и хотел определить ее очертания. И вот на одном отрезке Млечного пути он (1784, с. 158) сосчитал число звезд в шести "случайно" выбранных участках и принял среднее в качестве оценки для всего отрезка.

При отсутствии переписей (современного типа) **Лаплас** (1786) применил выборочный метод для оценки населения Франции; подробное описание его исследования см. Bru (1988). Ему было известно население выборочных районов страны и число ежегодных рождений и там, и во всей Франции. Предполагая отношение этого числа к населению постоянным, он сразу же вычислил искомое население, но главная его задача состояла в том, чтобы на основании своих прежних формул (п. 5) оценить погрешность вычисления.

В 1928 г. **Пирсон** заметил, что урновая модель Лапласа, которую он при этом применил, была теоретически несостоятельна, но что ошибка при оценке погрешности оказалась у него сравнительно небольшой, притом же Лаплас был первым, кто оценивал точность выборочного метода.

Продукцию сельского хозяйства Франции выборочно оценил маршал Вобан еще в самом начале XVIII столетия (Moreau de Jonnès 1847, с. 53 – 54). О выборочных исследованиях сельского хозяйства России в XVII – XVIII вв. см. Птуха (1961).

12. Противодействие

Развитие теории вероятностей встречало противодействие. **Лейбниц**, по крайней мере в 1704 – 1705 гг., не признавал статистических вероятностей, а потому и важности (еще не опубликованного) закона больших чисел **Якоба Бернулли** [II, п. 2.4.4]. **Муавр** (1718/1756, с. 254; перевод Шейнин 2006, с. 109) указал, что "имеются такие писатели […], которые внушают, будто учению о вероятностях нет места ни в каких серьезных исследованиях". В свою очередь, **Симпсон** (1756, с. 82; перевод Шейнин 2006, с. 116) определил цель своего мемуара (п. 8.3) как опровержение "весьма известных лиц", которые

Даже публично утверждали, что одному-единственному наблюдению, выполненному с должными предосторожностями, следует доверять настолько же, насколько среднему из большого числа наблюдений.

Естествоиспытатели могли придерживаться мнения **Бойля** (1772, с. 376) о том, что "опыты надлежит оценивать их значением, а не числом". Впрочем, два подхода к экспериментированию, таким образом намеченные им, не должны непременно противостоять друг другу.

Мы теперь упомянем Флемстида (1646 – 1719) и Брадлея (1693 – 1762), которые никак не противодействовали идеям теории вероятностей, но и не были настроены так решительно, как Симпсон. Флемстид (Baily 1835, с. 376)

Обычно принимал тот результат, который в тот момент казался ему наиболее удовлетворительным, не обращая никакого внимания на остальные. Он и не редуцировал все свои наблюдения (или их существенную часть). […] *И* […] *многие вычисленные им результаты* […] *он не включил ни в один из своих рукописных каталогов.*

Но не всё так просто. Флемстид никогда не торопился с публикацией своих наблюдений (Berry 1898, § 198) и неоднократно подчеркивал необходимость надежных наблюдений, например в письмах 1669 и 1672 гг. (Rigaud 1841, с. 129 – 133).

Представляется, что Брадлей (страница рукописи без названия и даты; впервые опубл. в 1787 г., см. Rigaud 1832, с. 78) учитывал все свои наблюдения, а в одном случае вывел среднее из 120 наблюдений. Впрочем, учитывал не совсем обычным образом (1750, с. 29):

Когда в течение нескольких дней сделано несколько наблюдений одной и той же звезды, я выписываю либо средний результат, либо то наблюдение, которое лучше всего соответствует ему.

И там же (с. 17) по поводу своего открытия нутации: "Это [открытие] указывает нам громадную пользу развития [астрономии] равно как и любой другой ветви естествознания, при помощи регулярных рядов наблюдений и опытов". Он же, заметим, открыл аберрацию света.

Основное противодействие теории вероятностей оказал **Даламбер**, мнение которого, однако, не остановило ее развития. В 1754 г. и снова в мемуаре (1768a) он заявил, что вероятность выбросить подряд два орла при игре в орлянку равна 1/3, а не 1/4, и он считал, что после серии событий (например, орлов) более вероятным становится противоположное событие (решетка). Это недостойное ученого мнение он считал возможным обосновать статистически, – но ничего подобного не предпринял, а потому и не усомнился в своих словах. Далее, он (1768b) отказался понимать различие между средним и вероятным сроками жизни (что вполне было ясно уже **Гюйгенсу** [II, п. 4.2.3]. Наконец, Даламбер (1768c, с. 309 – 310) вообще начал отрицать теорию вероятностей, не относя ее "к точным и верным исчислениям ни по принципам, ни по результатам".

В письме 27 мая/7 июня 1763 г. **Эйлер** (Juskevic и др. 1959, с. 221) упомянул "невыносимое высокомерие" Даламбера и указал, что тот "самым бесстыдным образом защищает свои ошибки", – возможно, не только в теории вероятностей. И вот вторжение Даламбера (1759/1821, с. 167) в чуждую для него область: "Врач, который более всего заслуживает доверия, – это тот, который меньше всех верит в медицину".

Но Даламбер высказывал и дельные мысли. Вслед за **Бюффоном** (п. 10.2) он заметил, что низкими вероятностями следует пренебрегать и справедливо критиковал мемуар **Даниила Бернулли** о вариоляции оспы (п. 7.1). И вообще некоторые его замечания, опережавшие свое время, означали, что теорию вероятностей следовало строить на более прочном основании (что, впрочем, было вряд ли возможно в то время).

13. В преддверии нового столетия

Новый век начался в 1812 г. с *Аналитической теории вероятностей* **Лапласа**, на которую мы неоднократно ссылались. В ней он собрал воедино свои прежние мемуары (включая опубликованные в 1809 – 1811 гг.), хотя и не достиг цельности изложения. Он, правда, везде, где было возможно, применял тот или иной вариант нестрого доказанной им центральной предельной теоремы, однако не ввел даже эвристического определения случайной величины, а потому не смог считать плотности распределения и характеристические функции самостоятельными математическими объектами. Его теория вероятностей оставалась прикладной дисциплиной, и ее со временем пришлось строить заново.

Но что было достигнуто к 1801 г.? Были доказаны первые предельные теоремы и создан первый вариант теории вероятностей (п. 5); были введены и применялись производящие функции и конечно-разностные уравнения, а интегралы стало возможным вычислять новыми сложными методами (Лаплас). Изучение азартных игр привело к возникновению важных тем для исследования с будущими приложениями к естествознанию и экономике. Теория вероятностей могла бы широко применяться в статистике населения (практически, однако, этого не случилось по различным причинам) и действительно широко применялась при обработке наблюдений, но вот естествознание в основном оставалось еще в стороне. Задачи, по существу относящиеся к математической статистике, решались неоднократно, и пришло время для открытия принципа наименьших квадратов (**Гаусс** 1809).

Библиография

Источники

Чебышев П. Л. (лекции 1879/1880), *Теория вероятностей*. М. – Л., 1936.

Шейнин О. Б. (2005), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. Также www.sheynin.de.

--- (2007f), *История теории ошибок*. Берлин. Также www.sheynin.de.

D'Alembert J. Le Rond (1754), Croix ou pile. *Enc. ou Dict. Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*, t. 4. Stuttgart, 1966, pp. 512 – 513.

--- (1759), Essai sur les elemens de philosophie. Выдержку в тексте см. *Oeuvr. Compl.*, t. 1, pt 1. Paris, 1821, pp. 116 – 348.

--- (1761a), Réflexions sur le calcul des probabilités. *Opuscules math.*, t. 2. Paris, pp. 1 – 25.

--- (1761b), Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. Там же, pp. 26 – 95.

--- (1767), Doutes et questions sur le calcul des probabilités. *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, t. 5. Amsterdam, 1768, pp. 239 – 264.

--- (1768a), Sur le calcul des probabilités. Там же, т. 4, с. 73 – 79.

--- (1768b), Sur la durée de la vie. Там же, с. 92 – 98.

--- (1768c), Extraits de lettres sur le calcul des probabilités et […], § 1. Sur le calcul des probabilités. *Opuscules math.*, t. 4, pp. 283 – 310.

Arbuthnot J., Арбутнот Дж. (1712), An argument for Divine Providence taken from the constant regularity observed in the births of both sexes. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 30 – 34).

Arnauld A., Nicole P., Арно А., Николь П. (1662), *L'art de penser*. Paris, 1992. *Логика или искусство мыслить*. М., 1991.

Bayes T., Бейес Т. (1764), An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, с комментарием R. Price. Перепечатка: *Biometrika*, vol. 45, 1958, pp. 293 – 315 и E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 131 – 153). Немецкий перевод 1764 – 1765: Leipzig, 1908.

--- (1765), Вторая часть мемуара. *Phil. Trans. Roy. Soc*., vol. 54, pp. 296 – 325.

Bernoulli D., Бернулли Д. (1735), Recherches physiques et astronomiques […] Quelle est la cause physique de l'inclinaison des planes des planets […]. В книге автора (1987, pp. 303 – 326).

--- (1738, латин.), Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica*, vol. 22, 1954, pp. 23 – 36. Опыт новой теории измерений жребия. В книге *Теория потребительского поведения и спроса*. СПб, 1999, с. 11 – 27.

--- (1766), Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. В книге автора (1982, pp. 235 – 267).

--- (1768a), De usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi specimen. Там же, pp. 276 – 287.

--- (1768b), De duratione media matrimoniorum. Там же, pp. 290 – 303. О средней продолжительности браков при всяком возрасте супругов и о смежных вопросах. В книге Птуха (1955, с. 453 – 464).

--- (1770), Disquisitiones analyticae de nouo problemate coniecturale. Там же, pp. 306 – 324.

--- (1770 – 1771), Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata. Там же, pp. 326 – 360.

--- (1778, латин.), The most probable choice between several discrepant observations and the formation therefrom of the most likely induction. *Biometrika*, vol. 48, 1961, pp. 1 – 18. Перепечатка: Pearson & Kendall (1970, pp. 155 – 172).

--- (1780), Specimen philosophicum de compensationibus horologicis. В книге автора (1982, pp. 376 – 390).

--- (1982, 1987), *Werke*, Bde 2 – 3. Basel.

Bernoulli J., Бернулли Я. (1713), *Ars Conjectandi*. В книге автора (1975, pp. 107 – 259). *Искусство предположений*, ч. 1 – 3. Берлин, 2006. Также www.sheynin.de. *О законе больших чисел*. Ред. Ю. В. Прохоров. М., 1986. Содержит перевод ч. 4 *Искусства предположений* (с. 23 – 59).

--- (1975), *Werke*, Bd. 3. Basel.

Bernoulli N. (1709), De usu artis conjectandi in iure. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 287 – 326).

Bertrand J. (1888), *Calcul des probabilités*. Второе изд., 1907. Перепечатка: New York, 1970, 1972.

Boscovich R. G. (1758, латин.), *Theory of Natural Philosophy*. Cambridge (Mass.) – London, 1966. Перевод с изд. 1763 г.

Boyle R. (1772), A Physico-Chymical Essay. *Works*, vol. 1. Sterling, Virginia, 1999, pp. 359 – 376.

Buffon G. L. L., Бюффон Ж. Л. Л. (1777), Essai d'arithmétique morale. *Oeuvr. Phil*. Paris, 1954, pp. 456 – 488. Опыт моральной арифметики (частичный перевод). В книге Шейнин (2007b, с. 93 – 125).

Condorcet M. A. N. Caritat de (1986), *Sur les éléctions et autres textes*. Paris. Содержит Discourse préliminaire de l'essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des voix (1785), pp. 7 – 177 и Elements du calcul des probabilités (1805), pp. 483 – 623. Essai полностью (а не только Discourse) опубликовано отдельно: New York, 1972.

--- (1994), *Arithmétique politique*. Paris. Редакторы B. Bru, P. Crépel Содержит перепечатки Sur le calcul des probabilités (1784 – 1787), c. 385 – 448, статей автора из *Enc. Méthodique* и его ранее не опубликованные или частично опубликованные рукописи.

Cotes R. (1722), *Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici*. *Opera misc*. London, 1768, pp. 10 – 58.

Cournot A. A., Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.

De Moivre A. (1712, латин.), De mensura sortis, or, On the measurement of chance. *Intern. Stat. Rev*., vol. 52, 1984, pp. 237 – 262 с комментарием A. Hald (pp. 229 – 236).

--- (1718), *Doctrine of Chances*. London, 1738 и 1756. Перепечатка третьего изд.: New York, 1967. Последние два издания включают статью автора 1733 г. в его переводе с латинского: Method of approximating the sum of the terms of the binomial […]. В третьем изд. (с. 329) перепечатано Посвящение первого издания книги Ньютону.

--- (1725), *Treatise of Annuities on Lives*. В книге автора (1756, pp. 261 – 328). Немецкий перевод: Вена, 1906.

--- (1730), *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*. London.

Euler L. (1767), Sur la probabilité des sequences dans la lotterie Génoise. *Opera omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin, 1923, pp. 113 – 152.

--- (1778, латин.), Комментарий к Bernoulli D. (1778). Английский перевод опубликован вместе с англ. переводом мемуара Бернулли. Мемуары Эйлера по теории вероятностей, статистике и обработке наблюдений перепечатаны в его *Opera omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin, 1923.

Fourier J. B. J. (1826), Sur les résultats moyens déduits d'un grand nombre d'observations. *Oeuvres*, t. 2. Paris, 1890, pp. 525 – 545.

Gauss C. F., Гаусс К. Ф. (1809, латин.), Теория движения небесных тел, кн. 2, разд. 3. В книге автора (1957, с. 89 – 109).

--- (1816, нем.), Определение точности наблюдений. Там же, с. 121 – 128.

--- (1823, латин.), Теория комбинации наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам. Там же, с. 17 – 57.

--- (1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.

Graunt J., Граунт Дж. (1662), *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*. Baltimore, 1939. Много последующих изданий на разл. языках. Естественные и политические наблюдения над бюллетенями о смертности. В книге Граунт Дж., Галлей Э. (2005), *Начала статистики населения, медицинской статистики, математики страхового дела*. Берлин, с. 5 – 105. Также www.sheynin.de

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York.

--- (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York.

Henry M. Ch. (1883), *Correspondance inedite de Condorcet et de Turgot*. Genève, 1970.

Herschel W. (1784), Account of some observations. *Scient. Papers*, vol. 1. London, 1912, pp. 157 – 166. [London, 2003.]

Heyde C. C., Seneta E., редакторы (2001), *Statisticians of the Centuries*. New York.

Juskevic A. P. и др., редакторы (1959), *Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften in Briefwechsel L. Eulers*, Bd. 1. Berlin.

Kendall M. G., Plackett R. L., редакторы (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London.

Kepler J. (1609, латин.), *New Astronomy*. Cambridge, 1992.

Kotz S., редактор (2006), *Encyclopedia of Statistical Sciences*. Hobokan, New Jersey. Многотомное 2-е издание. Уровня энциклопедии никак не достигает.

Lacroix S.-F. (1816), *Traité élémentaire du calcul des probabilités.* Paris. Последующие издания 1828, 1833, 1864.

Lagrange J. L. (1867 – 1892), *Oeuvres*, tt. 1 – 14. Paris.

В т. 2 (1868): Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations (1776), pp. 173 – 234.

В т. 4 (1869): Recherches sur les suites récurrentes (1777), pp. 151 – 251.

В т. 13 (1882): Его переписка с Даламбером.

В т. 14 (1892): Его переписка с другими учеными.

Lambert J. H. (1760), *Photometria.* Augsburg.

--- (1765 – 1772), *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung*, Tl. 1 – 3. Berlin. Первая часть(1765) содержит *Anmerkungen und Zusätze zur practischen Geometrie* (pp. 1 – 313) и *Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche* (pp. 424 – 488). Третья часть (1772) содержит *Anmerkungen über die Sterblichkeit, Todtenlisten, Geburthen und Ehen* (pp. 476 – 569).

Laplace P. S., Лаплас П. С. (1798 – 1825), *Traité de mécanique céleste*, tt. 1 – 5. Paris. См. ниже его *Oeuvr. Compl.*

--- (1878 – 1912), *Oeuvres complètes*, tt. 1 – 14. Paris.

В тт. 1 – 5 (1878 – 1882): перепечатка *Méc. Cél.* Англ. перевод: *Celestial Mechanics* (1832), vols 1 – 4. New York, 1966.

В т. 6 (1884): перепечатка изд. 1835 г. *Exposition du système du monde* (1796). *Изложение системы мира*. Л., 1982.

В т. 7 (1886): *Théorie analytique des probabilités* (1812) с Предисловием, *Essai philosophique sur les probabilités* (1814) и четырьмя Дополнениями (1816 – прим. 1819). Перевод *Essai*: Опыт философии теории вероятностей. В книге *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. Ред. Ю. В. Прохоров. М., 1999, с. 834 – 863.

В т. 8 (1891) содержится Sur les suites récurro-récurrentes (1774a), pp. 5 – 24; Sur la probabilité des causes par les événements (1774b), pp. 27 – 65 и Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies (1776), pp. 69 – 197.

В т. 9 (1893) содержится Sur les probabilités (1781), pp. 383 – 485.

В т. 10 (1894) содержится Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres (1785 – 1786), pp. 209 – 338.

В т. 11 (1895) содержится Sur les naissances, les mariages et les morts (1786), pp. 35 – 46, и Sur quelques points du système du monde (1789), pp. 477 – 558.

В т. 12 (1898) содержится Sur les integrals définies […] (1811), pp. 357 – 412.

В т. 14 (1912) содержится Leçons de mathématiques données à l'École normale en 1795 (1812), pp. 10 – 177.

Lévy P. (1925), *Calcul des probabilités.* Paris.

Maire [**C.**]**, Boscovich** [**R. G.**] (1770), *Voyage astronomique et géographique dans l'Etat de l'Eglise*. Paris. Уравнивание наблюдений обсуждается в кн. 5, написанной Бошковичем.

Maupertuis P. L. M. (1756), Lettres. *Oeuvres*, t. 2. Lyon, 1756, pp. 185 – 340.

Michell J. (1767), An inquiry into the probable parallax and magnitude of the fixed stars. *Phil. Trans. Roy. Soc. Abridged*, vol. 12, 1809, pp. 423 – 438.

Mill J. S., Милль Дж. С. (1843), *System of Logic*. [Возможно последнее издание: *Coll. Works*, vol. 8. Toronto, 1974.] *Система логики.* СПб, 1914. Перевод с изд. 1879 г.

Montmort P. R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris, 1713. Перепечатка: New York, 1980.

Newton I., Ньютон И. (1704), *Optics*. *Opera quae extant omnia*, vol. 4. London, 1782, pp. 1 – 264 (перепечатка издания 1718 г.). *Оптика*. М., 1954.

Pearson E. S., Kendall M. G., редакторы (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability*. London.

Pearson K. (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries* etc (лекции 1921 – 1933). London. Редактор E. S. Pearson.

Poincaré H., Пуанкаре А. (1896), *Calcul des probabilités*. Paris, 1912. Перепечатка: Paris, 1923 and 1987. *Теория вероятностей.* Ижевск, 1999.

--- (1921), Résumé analytique [собственных исследований]. В книге *Mathematical Heritage of H. Poincaré*. Providence, Rhode Island, 1983. Ред. F. E. Browder, pp. 257 – 357.

Rigaud S. P. (1832), *Miscellaneous Works and Correspondence of J. Bradley*. Oxford. [New York, 1972.]

--- (1841), *Correspondence of Scientific Men of the 17th Century*, vols 1 – 2.

Oxford.

Schneider I., Editor (1988), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeits-theorie von den Anfangen bis 1933*. Darmstadt. Хрестоматия. Большинство статей/отрывков на англ. языке.

Simpson T., Симпсон Т. (1740), *Nature and Laws of Chance*. London.

--- (1756), On the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 64, pp. 82 – 93.

--- (1757), Переработанный вариант мемуара. В книге автора *Misc. Tracts on Some Curious* […] *Subjects in Mechanics* […]. London, pp. 64 – 75.

Süssmilch J. P. (1741), *Die Göttliche Ordnung*. Несколько последующих изданий. Перепечатка изд. 1765 г. с дополнительным т. 3 издания 1776 г.: Göttingen – Augsburg, 1988.

--- (1758), Gedancken von dem epidemischen Krankheiten. Редактор Wilke J. (1994), *Die königliche Residenz und die Mark Brandenburg im 18. Jahrhundert*. Berlin, pp. 69 – 116.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Исследования

Вернадский В. И. (1852), Задачи статистики. В книге Дружинин Н. К. (1963), *Хрестоматия по истории русской статистики*. М.

Дорфман Я. Г. (1974), *Всемирная история физики*. М.

Птуха М. В. (1955), *История статистики*, т. 1. М.

--- (1961), Выборочные исследования сельского хозяйства России в XVII – XVIII вв. *Уч. зап. по статистике*, вып. 6, с. 94 – 100.

Хинчин А. Я. (1961), Частотная теория Мизеса и современные идеи теории вероятностей. *Вопросы философии*, № 1, с. 91 – 102, № 2, с. 77 – 89.

Шейнин О. Б., Sheynin O. B. (1972), Daniel Bernoulli's work on probability. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 105 – 132).

--- (1984), On the history of the statistical method in meteorology. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 31, pp. 53 – 93.

--- (1986), Quetelet as a statistician. Там же, vol. 36, pp. 281 – 325.

--- (1998), Statistical thinking in the Bible and the Talmud. *Annals of Sci.*, vol. 55, pp. 185 – 198.

--- составитель и переводчик (2006), *Хрестоматия по истории теории вероятностей и статистике*. Берлин. Также www.sheynin.de.

Содержит переводы статей/мемуаров Арбутнота (1712), Муавра (1733/1756), Симпсона (1756 – 1757), Бейеса (1764 – 1765), Даниила

Бернулли (1778) и Эйлера (1778), а также предисловия книг Монмора (1708/1713) и Муавра (1718/1756) и аннотированного автором Содержания книги Зюссмильх (1741/1765) и перевод § 14 этой книги.

--- составитель и переводчик (2007a), *Вторая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de. Содержит перевод гл. 4 *Аналитической теории вероятностей* Лапласа (1812) "О вероятности ошибок средних результатов".

--- составитель и переводчик (2007b), *Третья хрестоматия по истории теории вероятностей и статистике*. Берлин. Также www.sheynin.de. Содержит перевод мемуара Даниила Бернулли 1766 г. и частичный перевод *Опыта моральной арифметики* Бюффона 1777 г.

--- (2007c), Euler's work in probability and statistics. В книге *Euler Reconsidered. Tercentenary Essays*. Heber City, Uta, pp. 281 – 316.

--- (2007d), *Статьи по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. Также www.sheynin.de. Переводы статей, в том числе статей (1972; 1986; 1998).

--- (2007e), The true value of a measured constant and the theory of errors. *Hist. Scientiarum*, vol. 17, pp. 38 – 48.

Юшкевич А. П. (1986), Николай Бернулли и издание *Искусства предположений* Якоба Бернулли. *Теория вероятностей и ее применения*, т. 31, с. 333 – 352.

Baily F. (1835), *An Account of the Revd J. Flamsteed*. London.

Berry A. (1898), *Short History of Astronomy*. London. [New York, 1961.]

Bradley J. (1750), Letter […] concerning an apparent motion observed in some of the fixed stars. В книге Rigaud (1832, pp. 17 – 41).

Cornfield J. (1967), The Bayes theorem. *Rev. Intern. Stat. Inst.*, t. 35, pp. 34 – 49.

Crépel P. (1987), Le premier manuscript de Condorcet sur le calcul des probabilités (1772). *Hist. Math.*, vol. 14, pp. 282 – 283.

--- (1988), Condorcet et l'estimation statistique. *J. Soc. Stat. Paris*, 129[e] année, pp. 46 – 67.

Czuber E. (1903), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung*, Bd. 1. New York, 1968.

Cubranic N. (1961), *Geodetski rad R. Boskovica*. Zagreb.

De Montessus R. (1903), Un paradoxe du calcul des probabilités. *Nouv. Annales Math.*, sér. 4, t. 3, pp. 21 – 31.

Dutka J. (1981), The incomplete Beta function – a historical profile. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 24, pp. 11 – 29.

--- (1988), On the St. Petersburg paradox. Там же, vol. 39, pp. 13 – 39.

Eisenhart C. (1989), Laws of error. В книге Kotz (2006, т. 6, с. 4052 – 4086).

Farebrother R. W. (1993), Boscovich's method for correcting discordant observations. В книге P. Bursill-Hall, редактор, *Boscovich. Vita e attività scientifica. His Life and Scientific Work*. Roma, pp. 255 – 261.

Fieller E. C. (1931), The duration of play. *Biometrika*, vol. 22, pp. 377 – 404.

Freudenthal H. (1951), Das Petersburger Problem in Hinblick auf Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Nachr.*, Bd. 4, pp. 184 – 192.

Freudenthal H., Steiner H.- G. (1966), Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik. В книге Behnke, H. и др., редакторы, *Grundzüge der Mathematik*, Bd. 4. Göttingen, pp. 149 – 195.

Gillies D. A. (1987), Was Bayes a Bayesian? *Hist. Math.*, vol. 14, pp. 325 – 346.

Gini C. (1946), Gedanken von Theorem von Bernoulli. *Z. f. Volkswirtschaft u. Statistik*, 82. Jg, pp. 401 – 413.

Gowring R. (1983), *Roger Cotes – Mathematical Philosopher*. Cambridge.

Granger G.-G. (1956), *La mathématique sociale du Marquis de Condorcet*. Paris.

Henny J. (1975), Niklaus und Johann Bernoullis Forschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung. В книге J. Bernoulli (1975, pp. 457 – 507).

Jorland G. (1987), The St.-Petersburg paradox, 1713 – 1937. В книге Krüger L. и др., редакторы, *Probabilistic Revolution*, vol. 1. Cambridge (Mass.), pp. 157 – 190.

Knies C. G. A. (1850), *Statistik als selbstständige Wissenschaft*. Kassel.

Kohli K. (1975), Spieldauer. В книге J. Bernoulli (1975, pp. 403 – 455).

--- (1975), Aus de Briefwechsel zwischen Leibniz und J. Bernoulli. Там же, pp. 509 – 513.

Koopman B. O. (1940), The bases of probability. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 46, pp. 763 – 774.

Moreau de Jonnès A. (1847), *Eléments de statistique*. Paris.

Paty M. (1988), D'Alembert et les probabilités. В книге Roshdi, R., редактор, *Les sciences à l'époque de la Révolution Française*. Paris, pp. 203 – 265.

Pearson K. (1924), Historical note on the origin of the normal curve of errors. *Biometrika*, vol. 16, pp. 402 – 404.

--- (1925), James Bernoulli's theorem. Там же, vol. 17, pp. 201 – 210.

--- (1928), On a method of ascertaining limits to the actual number of marked individuals […] from a sample. *Biometrika*, vol. 20A, pp. 149 – 174.

Schneider I. (1968), Der Mathematiker A. De Moivre. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 5, pp. 177 – 317.

Seal H. L. (1949), Historical development of the use of generating functions in probability theory. *Bull. Assoc. Actuaires Suisses*, t. 49, pp. 209 – 229. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 67 – 86).

Shoesmith D. (1987), The Continental controversy over Arbuthnot's argument etc. *Hist. Math.*, vol. 14, pp. 133 – 146.

Stigler S. M. (1977), Eight centuries of sampling inspection. The trial of the pyx. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 72, pp. 493 – 500.

--- (1986), *History of Statistics*. Cambridge (Mass.) – London. Содержит клеветнические утверждения об Эйлере и Гауссе.

Takacs L. (1969), On the classical ruin problem. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 64, pp. 889 – 906.

Thatcher A. R. (1957), Note on the early solutions of the problem of the duration of play. *Biometrika*, vol. 44, pp. 515 – 518. Перепечатка: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 127 – 130).

Walker Helen M. (1929), *Studies in the History of the Statistical Method*. New York, 1975.

Westergaard H. L. (1932), *Contributions to the History of Statistics*. New York, 1968.

Yamazaki E. (1971), Dalembert et Condorcet: quelques aspects de l'histoire du calcul des probabilités. *Jap. Studies Hist. Sci.*, vol. 10, pp. 60 – 93.

Zabell Sandy L. (1988), The probabilistic analysis of testimony. *J. Stat. Planning and Inference*, vol. 20, pp. 327 – 354.

--- (1989), The rule of succession. *Erkenntnis*, Bd. 31, pp. 283 – 321. Перепечатка в книге автора *Symmetry and Its Discontents.* Cambridge, 2005, pp. 38 – 79.