Одиннадцатая хрестоматия

по истории теории вероятностей и статистики

Составитель и переводчик О. Б. Шейнин

Москва
2014

Верстка и обложка Вячеслава Демидова,
владельца издательства NG Verlag, Берлин

Оглавление

От составителя

В первом разделе мы перевели отдельные главы из общеизвестного и до сих пор полезного, хоть и сильно устаревшего сочинения И. Тодхантера, и в качестве приложения, краткую заметку о нём известного статистика М. Дж. Кендалла. Для перевода мы выбрали описание трудов почти забытых авторов. Как и другие математики того времени, Тодхантер смешивал понятия *вероятное* и *среднее* (или *ожидаемое*) и старомодно применял наравне термины *шанс* и *вероятность*. Хуже того, он вводил вероятности, превышающие единицу (Прим. 52). Тодхантер не заметил Стрюйка, и мы в некоторой мере восполнили этот недостаток, приведя в конце перевода выдержку из книги Hald (1990). Нет в книге и нескольких других учёных, занимавшихся математической обработкой измерений, но о них Тодхантер написал позднее (1873). Библиографические ссылки см. в конце раздела.

Назовём общие современные источники по истории теории вероятностей того периода: только что названная книга Хальда и Шейнин (2013).

Тодхантер справедливо указал на недостатки сочинений Уоринга (§ 828 и далее), а в § 839 показал, что этот математик проявил себя как Хлестаков в науке, но в конце этого параграфа сообщил, что величайшие учёные оказали ему честь. Мы обязаны добавить: Уоринг (прим. 1736 – 1798) был членом Королевского общества и ему была присуждена медаль Копли. Известен он своими работами в теории чисел (проблема Уоринга) и исследованием алгебраических уравнений.

В нескольких местах мы вставили замечания Pearson (1978) или выдержки из этого сочинения, обозначая автора инициалами.

Мы ввели не известные в то время обозначения для числа сочетаний и факториала.

Второй раздел состоит из переводов статей из энциклопедии, указанной в Содержании (сокращённо IESS) и перепечатанных в *International Encyclopedia of Statistics* (сокращённо IES), vol. 1. New York – London, 1978. Editors William H. Kruskal, Judith M. Tanur. По своему содержанию отобранные статьи подразделяются на три категории: описание жизни и трудов отдельных статистиков; статистика населения (частично и социология); и эконометрия.

В статьях второй и третьей категории недостаточно учтены европейские достижения (о работах советских учёных мало что можно было бы добавить). Некоторые места мы выпустили как почти не имевшие отношения к статистике, а отдельные части, на которые авторы подразделили свои статьи, перенумеровали. Из обширных пристатейных библиографий мы главным образом отобрали лишь те источники, на которые были даны ссылки. Взятые в целом, статьи указанных категорий наводят на мысль, что статистику населения можно назвать приложением статистического метода к социологии.

Общие замечания к некоторым статьям второго раздела

[iii] Мы (Шейнин 2002) описали книгу Курно (1843), отметили его достижения в области теории вероятностей и статистики и особо положительные отзывы Чупрова о нём, но указали и недостатки книги. Добавим, что Курно не был знаком с измерениями и описал их обработку неудовлетворительно и не знал о серьёзных успехах статистики в метеорологии, астрономии и профилактике оспы, а мемуар Бейеса охарактеризовал недостаточно чётко. См. предисловие к нашему английскому переводу Курно (1843): Берлин, 2013 или Google, Oscar Sheynin, Download Area.

[iv] Андерсон был последним представителем Континентального направления статистики. В Болгарии должны были остаться документы, относящиеся к его жизни и творчеству, но они неизвестны. В *Хрестоматию* (2007) мы включили его некрологи Чупрова и Борткевича.

[viii] Автор статьи был известным статистиком и тема его статьи недостаточно известна, но написана она поверхностно, см. наши Примечания к ней, а некоторые из приведенных им примеров были бы уместнее в научно-популярной работе. В § 9 ему следовало бы сослаться на *Искусство предположений* Якоба Бернулли. В гл. 2 четвёртой части, в пунктах 2 и 3, Я. Б. рекомендовал рассматривать все доводы, учитывая приводящие и к некоторому утверждению, и к противоположному заключению.

Москва, январь 2014

Раздел первый

И. Тодхантер, *История математической теории вероятностей.* Отдельные главы

I. Todhunter, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to That of Laplace* (1865).
New York, 1949, 1965

М. Дж. Кендалл, История математической теории вероятностей Исаака Тодхантера

M. G. Kendall, Isaac Todhunter's
History of the Mathematical Theory of Probability.
Biometrika, vol. 50, 1963, pp. 204 – 205

Глава 1. Кардано, Кеплер, Галилей

1. Азартные игры должны были неизменно обращать внимание на некоторые простейшие соображения теории вероятностей. Либри отыскал самые ранние указания на различные вероятности всевозможных исходов бросков трёх костей в комментарии к *Божественной комедии* Данте, опубликованном в Венеции в 1477 г. Он процитировал выдержку из этого комментария, относящегося к первому стиху шестой песни второй части (*Чистилище*) книги (Libri 1838, т. 2, с. 188).

2. Некоторые другие указания на следы нашей темы у ранних авторов привёл Gouraud (1848, с. 3), но, к сожалению, без точной ссылки:

Древние, видимо, полностью пренебрегали этим видом анализа[1]. *Современное знание, правда, выявило его некоторые следы на варварском латинском языке в De Vetula, труде, сочиненном монахом Западной Римской империи в комментарии к Божественной комедии в конце XV в., и в сочинениях многих итальянских математиков средневековья и Возрождения, – Пачиоли, Тарталья, Певероне.*

3. Нашего внимания теперь требует сочинение Кардано *De Ludo Aleae*[2]. Оно было опубликовано в 1663 г., намного позже смерти автора (1576 г.). Монмор (1708/1713, с. XL) указывает, что в этом труде *видны лишь обширные познания и моральные рассуждения*. И вот Либри (1841, т. 3, с. 176):

Кардано написал специальное сочинение Ludo Aleae, в котором решил многие вопросы комбинаторного анализа.

Первый автор приписывает Кардано слишком мало, второй – слишком много.

4. Книга Кардано отпечатана очень плохо, и текст читается с большим трудом. Сам Кардано был заядлым игроком, и его сочинение лучше всего назвать руководством для игроков. Многое в ней относится к играм, как, например, их описание и сведения о мерах предосторожности для защиты от обмана. Обсуждение шансов занимает лишь небольшую часть книги.

5. В качестве примера мы укажем содержание гл. 13. В ней Кардано указывает число шансов, благоприятных при каждом броске двух костей. Так, и 2, и 12 можно получить только одним способом, 11 – двумя способами (6 и 5 и 5 и 6), 10 – тремя (либо 5 на каждой кости, либо 6 и 4 или 4 и 6) и т. д.

Кардано указывает [следует латинская фраза]. Это, видимо, означает, что при броске двух костей требуемый исход также достигается, если он появился *только* на одной кости. Для шести или меньшего числа очков поэтому дополнительно появляется 11 благоприятных случаев.

Далее Кардано правильно указывает число случаев, благоприятных для каждого броска трёх костей. Так, и 3, и 18 может быть получено только одним способом, 4 и 17 – тремя способами, и т. д. Он, кроме того, приводит число случаев для *Fritillo*:

1 очко – 108 и далее 2/111, 3/115, 4/120, 5/126,
6/133, 7/33, 8/36, 9/37, 10/36, 11/33, 12/26

Воспользовавшись словесными объяснениями автора, мы здесь исправили две опечатки. Значение чисел таблицы неясно. По аналогии со сказанным выше можно предположить, что при броске трёх костей требуемый исход осуществляется, если он достигнут только на одной или двух из них или на всех трёх. Это согласуется с замечанием Кардано о том, что для числа очков, превышающих 12, благоприятных случаев будет столько же, сколько и при обычном подсчёте. Но этот вывод противоречит приведенной таблице. Так, в 5^3 случаях из 6^3 одно очко не появляется ни на одной кости и выбрасывается один или несколько раз в $6^3 - 5^3 = 91$ случаях, тогда как в таблице указано число 108.

Соотношение между числами при обычной игре и в указанной таблице, видимо, таково. Пусть n и N случаев соответственно благоприятны в этих вариантах данному броску трёх костей, а m случаев благоприятны для данного броска двух костей в первом из них. Тогда для любого исхода не меньшего 13, $N = n$. Для исходов 7 – 12 включительно $N = 3m + n$ и для исходов 1 – 6, $N = 108 + 3m + n$. От этих выводов отклоняется только исход в 12 очков: предположенный нами закон приводит к 3 + 25 = 28, в таблице же указано 26. Впрочем, мы не усматриваем никакого простого варианта игры с тремя костями, который приводил бы к указанному нами закону.

6. Некоторый дополнительный отчет о книге Кардано содержится в книге Morley (1854, т. 1, с. 92 – 95). Он (с. 92), кажется, неверно понял слова Кардано, потому что заключил, что тот

хладнокровно и философски указывает в качестве одной из своих первых аксиом, что в кости и карты следует играть на деньги.

На самом же деле в цитированной выдержке Кардано скорее считает уместной умеренность в ставках, а не просто их необходимость. Именно этот подход Кардано рекомендует, например, в гл. 2. Книга Кардано кратко упоминается в статье *Probability* в *English Cyclopaedia.*

7. Некоторые замечания о шансах оставил Кеплер (1606). Он исследует различные мнения о причинах появления Новой звезды, которая ослепительно сияла в 1604 г., и в частности ссылается на эпикурейскую идею о том, что эта звезда произошла от случайного сочетания атомов[3].

Весь этот отрывок любопытен, но нам нет нужды воспроизводить его, потому что его можно найти в публикуемых ныне *Opera omnia* Кеплера и в […]. На этот отрывок обратил внимание Stewart (1854 – 1858, т. 1, с. 617).

Можно привести несколько слов Кеплера, которые свидетельствуют об обоснованности его мнения: он указывает, что даже события, подобные броскам кости, не происходят без причины [следует выдержка на латинском языке без указания страницы][4].

8. Следующее исследование, которое мы должны заметить, это заметка Галилея[5]. Дата её составления неизвестна, а умер Галилей в 1642 г. Видимо, знакомый захотел узнать его мнение по поводу следующего затруднения: при броске трёх костей и 9, и 10 очков можно получить шестью различными способами, однако по опыту известно, что 10 очков выпадает чаще.

Галилей тщательно и точно изучает все возможные исходы и показывает, что из 216 возможных случаев 27 благоприятны выпадению 10 очков, и 25 – появлению 9 очков. Из библиографии сочинений Галилея (1856, т. 15) мы узнаём, что его заметка впервые появилась в свет в 1718 г. […].

9. Libri (1841, т. 4, с. 288) замечает по поводу Галилея:

Его письма указывают, что он длительное время интересовался щекотливым и ещё не решенным вопросом, равным образом касающимся и исчисления вероятностей, и политической арифметики: как учитывать погрешность, в арифметической, или в геометрической прогрессии?

Либри сослался на т. 2, с. 55, *Трудов* Галилея, изданных во Флоренции в 1718 г. Впрочем, он несомненно имел в виду т. 3. Письма Галилея опубликованы также в т. 14, с. 231 – 284, его *Трудов*, изданных там же в 1855 г. В те времена, как сообщается, дворяне того города, вместо ухаживания за дамами или посещения конюшен и чрезмерного увлечения азартными играми, обычно просвещались в учёных беседах в изысканном обществе.

На одной из их встреч обсуждался следующий вопрос: лошадь на самом деле стоит 100 эскудо; некто оценил её в 10, а другой – в 1000 эскудо, так кто же из них оценил её хуже? Среди тех, к кому обратились за советом, был Галилей, и он заявил, что обе оценки одинаково плохи, потому что отношения 1000 к 100 равно отношению 100 к 10. С другой стороны, священник Ноццолини, к которому также обратились, решил, что вторая оценка более непомерна, потому что разность 1000 – 100 значительнее, чем 100 – 10.

Были опубликованы и другие письма Галилея и Ноццолини, равно как и письмо Benedetto Castelli, который согласился с первым. Можно понять, что вначале Галилей был того же мнения, что и Ноццолини, но затем изменил его. Этот вопрос обсуждался спорщиками очень оживлённо, и были опубликованы забавные иллюстрации. Кажется, однако, что спор не представлял никакого научного интереса, никакой значимости, и что своим описанием Либри придаёт письмам Галилея гораздо больше, чем они заслуживают. Дворяне Флоренции, отказавшиеся от легкомысленного поведения, могли бы исследовать более важные темы.

К. П., с. 164. Пирсон считал, что, напротив, этот вопрос был очень важным, и что действительная стоимость товара, не являющегося необходимым, по существу определяется покупателями, – при отсутствии конкуренции продавцов, добавим мы сами. И кроме того: откуда было известно, сколько стоила лошадь *на самом деле*? О. Ш.

Глава 6. Различные исследования 1670 – 1700 гг.

69. Эта глава содержит сведения о различных сочинениях по нашей теме, относящихся к периоду после публикации трактата Гюйгенса (1657) и до появления более тщательно разработанных трудов Якоба Бернулли, Монмора и Муавра.

70. В 1670 г. иезуит Джон [Жуан] Карамюэль опубликовал *Mathesis Biceps*, курс математики в двух томах большого формата[6]. В начале первого тома он поместил список своих сочинений, из которого следует, что весь курс должен был состоять из четырёх томов. Раздел *Combinatoria* (с. 921 – 1036) частично посвящён нашей теме.

Карамюэль прежде всего разъясняет комбинации в современном понимании этого термина, однако особого внимания его описание не заслуживает. Здесь приведены обычные результаты и примеры, но алгебраических доказательств нет. Автор часто ссылается на Христофа Клавия [1537 – 1612] и Izquierdus как на своих руководителей. Затем Карамюэль поясняет *Ars Lulliana*, т. е. метод, облегчающий рассуждения, или, скорее, дискуссии, предложенный Рамоном Люллем [1235? – 1315].

71. Мы теперь переходим к его сочинению о шансах *Kybeia* […], в котором перепечатан трактат Гюйгенса, приписанный, однако, другому лицу. [Следует выдержка из указанного сочинения на латинском языке, в которой упомянут Лонгомонтанус (1562 – 1647).]

72. Николай Бернулли очень сурово отозвался о Карамюэле (Montmort 1708/1713, с. 387 [письмо Монмору 30 дек. 1712]):

Иезуита Карамюэля, которого я упоминаю в своей диссертации [1709], *но который дал только кучу рассуждений, я не ставлю ни во что*.

При перепечатке [1711] своей диссертации Н. Б. не упомянул Карамюэля. Иоганн Бернулли в письме Лейбницу благоприятнее отозвался о нём (Leibniz 1855, с. 715).

73. Николай Бернулли преувеличил грубые ошибки этого иезуита. Карамюэль рассматривает, и притом верно, следующие вопросы: шансы исходов при броске двух костей; простые случаи раздела ставки между двумя игроками; шанс по меньшей мере однократного выпадения одного очка при двух и трёх бросках; и игру passe-dix[7]. Он ошибся в решении двух простых случаев раздела ставки между тремя игроками, а также в двух других задачах, одну из которых рассматривал Гюйгенс в своём трактате под номером 14, вторая же была точно того же типа.

Вот метод Карамюэля в первой из этих задач[8]. Пусть ставка составляет 36. Тогда шанс игрока A при первом броске равна 5/36 и (5/36)·36 = 5. Игроку B остаётся 31 и его шанс равен 6/36, а (6/36) 31 = 51/6 можно считать ценой его первого броска. Карамюэль и считает, что у этих игроков указанная цена равна 5 и 51/6. Остаток 255/6 он предлагает разделить поровну между игроками, но это неверно. Надо было продолжать описанный процесс, приписав вначале игроку A 5/36 от 255/6, а игроку B – 6/36 от остатка и т. д. Доля каждого игрока определялась бы бесконечной геометрической прогрессией и результат был бы верен.

Странно, что, имея перед собой трактат Гюйгенса, Карамюэль ошибся. Он, очевидно, следовал за своим предшественником при обсуждении раздела ставки при двух игроках, но затем отошёл от него.

74. В журнале *Journal des Sçavans* за февраль 1679 г. J. Sauveur привёл без доказательства некоторые формулы, относящиеся к выгоде банкомёта при игре bassette. Доказательства можно найти в *Искусстве предположений* Якоба Бернулли, с. 191 – 199 [часть 3, задача 21, с. 226 – 232 в издании 1975 г.][9].

Я исследовал формулы, которые он привёл, по амстердамскому изданию журнала. Их шесть серий. В первых пяти, в которых встречаются затруднения, автор и Я. Б. согласны. Последняя серия получается просто вычитанием второй из пятой, и в ней либо Sauveur ошибся, либо была допущена опечатка. Николай Бернулли, видимо, преувеличил это различие [между автором и Я. Б. Следует выдержка на латинском языке.]. Montucla (1758/1799 – 1802, т. 3, с. 390) и Gouraud (1848, с. 17), видимо, тоже считают, что Sauveur ошибся серьёзнее, чем на самом деле.

После смерти Sauveur похвальное слово о нём опубликовал Фонтенель в *Hist. Acad. Sci. Paris* за 1716 г. Он указал, что игра bassette оказалась для покойного полезнее, чем большинству тех, кто неистово играл в неё. Sauveur исследовал эту игру по просьбе Маркиза Dangeau, затем был представлен двору и имел честь пояснить свои вычисления королю и королеве. См. также Montmort (1708/1713, с. XXXIX).

75. Якоб Бернулли (1685) предложил две задачи о шансах. В каждой из них два игрока подбрасывают игральную кость; выигрывает тот, у кого первого выпадет одно очко. В первой задаче игроки подбрасывают кость по одному разу, затем – по два, по три, … раза. Во второй задаче игрок A подбрасывает кость 1 раз, игрок B – 2 раза, A – 3 раза, …

Обе задачи пришлось решить самому Бернулли (1690), но в том же томе *Acta Eruditorum* их решил и Лейбниц. Появившиеся бесконечные ряды не были суммированы. Эти же задачи Бернулли включил в своё *Искусство предположений* (с. 52 – 56)[10].

76. Лейбниц всерьёз интересовался теорией вероятностей и показал, что вполне понимал её значимость, хоть нельзя сказать, что он способствовал её успехам. Особое внимание он уделял всевозможным играм, отыскав в них средство для упражнения своей изобретательности. Он полагал, что именно, развлекаясь ими, человек в наибольшей степени выказывает это качество, и что даже игры детей могут с пользой привлечь внимание крупнейших математиков[11].

Лейбниц также считал желательным составление систематического трактата об играх, которые зависят лишь от чисел; от расположения, как шахматы; и, наконец, от движения, как бильярд. Это, по его мнению, было бы полезно для совершенствования искусства изобретать, или, как он выразился в другом месте, искусства искусств, т. е. искусства рассуждать. См. Leibniz (1768, t. 5, c. 17, 22, 28, 29, 203, 206; t. 6, pt. 1, c. 271, 304) и (1840, с. 175), а также (1768, т. 6, ч. 1, с. 36) о намерении описать оценку вероятностей заключений, полученных в дискуссиях.

77. Впрочем, у Лейбница (1768, том 6, ч. 1, с. 217) можно найти пример склонности к ошибкам, которая, видимо, особенно присуща нашей теме:

Двумя костями можно, к примеру, с одинаковой лёгкостью выкинуть и 12, и 11 очков, потому что оба эти исхода можно получить только одним способом. Но 7 очков получаются равновозможными комбинациями 6 и 1, 5 и 2 и 4 и 3, т. е. втрое легче.

[Тодхантер доказывает, что 11 очков может быть получено двумя способами, а 7 – шестью.][12]

78. Монтукла (с. 391) сообщает, что в 1692 г. в Лондоне вышло в свет сочинение *Of the Laws of Chance* (*О законах случая*), автором которого считается Benjamin Motte. Он, однако, добавляет:

Я не видел этой книги и не могу говорить о ней. Предполагаю, впрочем, что её написал Benjamin Motte, секретарь Королевского Общества[13].

По поводу этой же книги Lubbock & Drinkwater (1830 или 1844?, с. 43) сообщают:

Этот очерк отредактировал и, как обычно считают, написал Benjamin Motte, секретарь Королевского общества. В нём содержится перевод трактата Гюйгенса и приложение его принципов к установлению преимуществ банкомёта в играх фараон, hazard и др., а также к некоторым проблемам лотерей.

Аналогичное заявление сделал Galloway (1839, с. 5).

79. Но члена Королевского Общества по фамилии Motte, видимо, не было. В своей книге *History of the Royal Society* Thomson не включил его в список этих членов. Я не сомневаюсь, что автором был Арбутнот, ибо есть английский перевод 1714 г. трактата Гюйгенса. Переводчик W. Browne в своём обращении к читателям указывает по поводу этого трактата:

Помимо латинских изданий имеется и английское, которое опубликовал *учёный Арбутнот вместе с приложением общего учения к некоторым играм, бывшим в то время более всего в ходу. Оно настолько распространёно за рубежом* (dispersed abroad), *что мы можем только встретить отчёт о нём*[14].

Это наверное означает, что никакого другого перевода не было, а *приложение … к некоторым играм* … очень хорошо согласуется с текстом на с. 28 четвёртого издания: *Этот метод легко применить к распространённым у нас играм*. Watt (1824) указывает автора и дату: Арбутнот, 1692.

80. Я видел только один экземпляр этой книги, который мне одолжил профессор Де Морган. Вот её титульный лист:

О законах случая или о методе вычисления шансов в игре, легко доказанного и приложенного к наиболее распространённым сейчас играм. Этот материал легко распространить на самые сложные случаи шансов, какие можно только вообразить. Четвёртое издание, пересмотренное Джоном Хамом. Он добавил доказательство преимущества банкомёта при всех обстоятельствах игры фараон и метод определения соотношения шансов в игре туз червей или справедливый шанс; арифметическое решение некоторых задач, относящихся к лотереям; и несколько замечаний об игре Hazard и о нардах. Издательство B. Motte и […], 1738.

81. Я опишу четвёртое издание этой книги. Её формат 1/8 листа, и можно считать, что она состоит из двух частей. Первая доходит до с. 49 и содержит перевод трактата Гюйгенса и некоторый дополнительный материал. С. 50 пуста, а с. 51 – это титульный лист, повторяющий часть титульного листа, приведенного выше.

Lubbock & Drinkwater (см. § 78) видимо не подразделяют книгу на две части. В первой нет ничего о *преимуществе банкомёта* […], а исследования во второй части не могли, как я полагаю, появиться уже в 1692 г.; они, очевидно, были переняты у Муавра. Вот что говорит этот учёный (1718/1756, с. i) в Предисловии [, указав, что оно было написано в 1717 г.]:

В то время [по контексту, несколько лет назад] *я не прочёл ничего по этой теме, кроме сочинения Гюйгенса* […] *и небольшой английской брошюры (по сути, перевода Гюйгенса) написанной весьма изобретательным автором. Он мог бы далеко продвинуть эту тему, но ограничился следованием оригиналу, лишь прибавив вычисление преимущества банкомёта в игре hazard и некоторые другие вещи*.

82. Книга предваряется предисловием, написанным живо, но не лишённым вульгарности. Мы приведём несколько выдержек, чтобы показать, что автор имел здравые взгляды и был прозорлив в своей надежде.

Составление предисловия считается необходимым и таким же вежливым, как поднесение стакана рейнвейна приглашённому к обеду другу. А поскольку эта книга достаточно искалечена отсутствием посвящения, я решил, что она не будет к тому же лишена послания читателям. Я не берусь устанавливать, законна ли игра в кости, об этом пусть спорят фанатичные священники и шулеры, я же уверен, что игра законна, как и другие эпидемические расстройства. […]

Большую часть этого трактата занимает перевод сочинения Гюйгенса […]. *По совершенствованию философии его превосходит лишь один человек* [Ньютон], *равного же ему, как я полагаю, почти или совсем нет. Всю работу я проделал для своего собственного развлечения и чтобы удовлетворить некоторых друзей, которые будут временами пререкаться о пропорциях шансов в некоторых здесь исследованных случаях.*

Потребовалось лишь несколько свободных часов и небольшой работы мозгами. Публикуя эту книжку, я имел в виду сделать её более общеупотребительной и быть может убедить нескольких богачей удерживать деньги в своих карманах. Если же из-за этого отчёта я навлеку на себя шумные протесты шулеров, то я не стану особо обращать на них внимания, потому что мир не обязан обеспечивать подобных типов.

К. П., с. 139. *Здесь вы найдёте очень простой и лёгкий метод вычислений случайностей в играх. Его можно понять, не зная ничего о квадратурах* (!) *кривых, учении о рядах или законах центростремительности тел или периодов* [обращения] *спутников Юпитера, – да, поистине, даже без элементов геометрии Евклида. Чтобы понять всё содержание, требуются лишь здравый смысл и коммерческая арифметика, и только чуточка алгебры в первых трёх предложениях. И чтобы понять их, читатель, не будучи заподозрен в папизме, сможет воспользоваться глубокой неявной верой. Впрочем, должен признать, что в этом смысле работа не очень нравится мне, но лучше бы он попытался разобраться в этом, и тогда, как я полагаю, он обнаружит, что размышления окажутся приятными.*

Успех каждого в любом деле пропорционален его поведению и удаче. Для большинства удача означает появление события, зависящего от случая и соответствующего пожеланиям, а неудача обозначает событие, противное пожеланию. Если непосредственные причины события неизвестны, оно считается зависящим от случая, так что его нельзя ни предвидеть, ни осуществить. Нет, ведь, никакой ереси в том, чтобы поверить, что провидение допускает, что обычные дела определяются вторичными причинами.

И я предположу, что в таких случаях мудрый человек может *обосновывать свои дела только на таких событиях, которые зависят от наибольшего числа или наиболее мощных вторичных причин. Это положение верно и по отношению к великим событиям в мире, и к обычным играм*.

Тодхантер. *Игральная кость, брошенная с определённой силой в определённом направлении, не может не упасть на определенную грань. Поэтому я называю случаем лишь недостаток знания*.

К. П., продолжение. *И поэтому я называю шансом лишь отсутствие возможности, и остаётся лишь держать пари на то, что имеет за себя наибольшее число случаев, а потому и высшую вероятность выигрыша. И всё искусство игры, в которой хоть что-то зависит от случая, сводится в конце концов к вычислению в сомнительных положениях на чьей стороне находится большинство шансов. Во время игры осуществить это в точности невозможно, но тот, кто знаком с принципами, сможет предположить подобное, и это окажется достаточным указанием. Если существуют хоть какие-то шансы против игрока, то он всё же может проиграть, но при выборе самого безопасного поведения он сможет легче перенести потерю своих денег.*

Тодхантер. *Пусть читатель усмотрит здесь мощь чисел, которые могут быть успешно применены даже к таким вещам, которые, как представляется, не подчиняются никаким правилам. Имеются лишь очень немногие известные нам вещи, которые не могут быть сведены к математическим рассуждениям, и в таких случаях наше знание о них очень невелико и беспорядочно. Когда же математическое рассуждение возможно, было бы очень глупо прибегать к какому-либо иному, и, как бы имея рядом свечу, искать что-то на ощупь в темноте. Я полагаю, что вычисление количества вероятности может быть улучшено и стать очень полезным и приятным размышлением, применимым к весьма большому числу случайных событий*[15] *помимо событий в играх*.

К. П. *Но тогда всё будет бесконечно сложнее перепутано, поскольку большинство не знает шансов. И, как я намекнул выше, вся политика в мире сводится только к особому роду анализа меры вероятности в случайных событиях, и хороший политик это лишь человек, одарённый способностью к подобным вычислениям. Но вот принципы, применяемые при решении подобных задач, нельзя изучить, сидя в кабинете, они познаются наблюдениями рода человеческого.*

Тодхантер. *Равным образом имеется вычисление количества вероятности, основанное на опыте, и его следует применять при любом виде пари. Существует* [например] *соотношение шансов, что беременная женщина родит мальчика, а если вы хотите узнать должное соотношение шансов, что беременная женщина родит мальчика, следует* *рассмотреть пропорцию мужских и женских рождений в бюллетенях.*

Замечено, что годичные бюллетени смертей находятся в соотношении 1:30 или 1:26 к числу живущих. Поэтому можно держать пари на равных, что 1 из 30 умрёт в течение года (что может служить хорошим, но ошибочным основанием известного глупого суеверия), потому что, приняв это соотношение, вы не проиграете пари при смерти одного из 26. Существует соотношение, равное всего лишь 1:18, что священник, которого вы увидите на улице, не является присяжным, потому что таких священников только 1 из 36.

83. На с. 1 – 25 опубликован перевод трактата Гюйгенса вместе с теми задачами, которые, как говорит наш автор,

он намеренно оставил без решения, чтобы изобретательный читатель смог получить удовольствие, самостоятельно применив описанный метод. В большинстве случаев эти задачи не столь трудны, сколь канительны. Я, например, рассмотрел только вторую и третью, потому что остальные можно решить тем же методом.

Наш автор решает вторую задачу в первом из трёх возможных, как заметил Якоб Бернулли [*Искусство предположений*, ч. 1, с. 143 – 147 в издании 1975 г.], вариантов. И он получил тот же результат, что и Я. Б[16]. Наш автор добавляет:

Здесь я принял, что при выборе жетона игрок не уменьшил их числа: если ему не достался белый жетон, он возвращает его и оставляет те же шансы для следующего игрока. В противном случае доля А оказывается равной 55/123, что меньше, чем 9/19.

Но в остальных вариантах Бернулли получил 77/165 и 101/125.

84. Затем следуют другие вычисления, также относящиеся к играм. У нас есть некоторые замечания о лотерее Королевский Дуб, аналогичные тем, которые привёл Муавр (1718/1756, Предисловие) об одноимённой игре.

Приводится таблица исходов бросков трёх костей. Страницы 34 – 39 как-то внезапно взяты у Паскаля и не содержат почти ничего нового по сравнению с переводом трактата Гюйгенса.

85. Наш автор касается виста и решает две задачи о лучших картах. Его решения являются приближённым, поскольку он не отличает того, кто сдаёт карты, от его противников. Он также решает задачу о сравнении шансов обеих сторон, имеющих соответственно 8 и 9 [козырей?]. Их соотношение, как он указал, равно 9:7 [= 1,29], но наше предыдущее замечание остаётся в силе. Более строгое решение Муавра (1718/1756, с. 176) привело его к соотношению 25:18 [= 1,39].

86. На с. 43 наш автор говорит:

Все предыдущие случаи могут быть вычислены при помощи теорем Гюйгенса, но более сложные требуют иных принципов. Чтобы, как и *раньше, легко и быстро вычислять, я приведу ещё одну теорему, доказанную по методу Гюйгенса. Вот она.*

Если я имею p шансов получить a, q шансов получить b и r шансов получить c, мой жребий (hazard) стоит

$$\frac{ap+bq+cr}{p+q+r}.$$

Наш автор доказывает эту теорему и мельком упоминает, что доказательство можно распространить на случай, при котором существует и s шансов получить d и т. д[17]. Затем, подобно Муавру (1718/11756, с. 160), наш автор исследует игру hazard и получает тот же результат.

87. Вот окончание первой части.

Все эти задачи предполагают, что появления шансов имеют равные вероятности, а иначе[18] *появятся различные случаи совсем другого рода, которые, пожалуй, можно будет с удовольствием рассмотреть. Я приведу ещё одну задачу подобного рода, оставив её решение тем, кто сочтёт, что она заслуживает их труда.*

Рёбра параллелепипеда находятся в соотношении a, b, c. Требуется определить вероятность выпадения его граней.

Впрочем, эту задачу обсуждал Симпсон (1740, задача 27)[19].

88. Вторую часть книги удобно рассмотреть после исследования работ Муавра.

89. Мы далее замечаем статью Roberts (1693). Три лотерейных билета не выигрывают ничего, три других приносят по 16 пенсов. В другой лотерее, соответственно, 4 и 2, приносящих по 2 шиллинга [= 24 пенса]. При одном тираже ожидания в этих лотереях равны 1/2 от 16 пенсов и 1/3 от 2 шиллингов, т. е. 8 пенсов в каждой. Пусть игрок платит шиллинг за билет в каждой лотерее; хотя ожидания *равны*, соотношения шансов против него равны соответственно 3:1 и 2:1 и в этом Робертс усматривает парадокс.

Но придумал его он сам своим произвольным определением соотношения шансов. Пусть в лотерее, состоящей из $(a + b)$ билетов, имеется b выигрышей по r шиллингов, и игрок уплачивает 1 шиллинг за участие в одном тираже. Тогда по Робертсу соотношение шансов против него будет равно произведению a/b на $1/(r - 1)$. Но это совершенно произвольно. Его алгебраические преобразования верны и представляют собой курьёзный образец исследований того времени. Напомним, что этого же автора Муавр в своём предисловии называет Robartes.

90. Теперь я заимствую сведения о работе, которую не видел, у Lubbock & Drinkwater (1830 или 1844, с. 45):

Достаточно лишь упомянуть очерк Крейга (1699) о вероятности *свидетельских показаний. Его попытка ввести математический язык и рассуждения в моральные темы вряд ли можно принимать всерьёз, выглядит она как безумная пародия на Математические начала Ньютона, которые в то время овладели вниманием математического мира*[20]. *Автор вначале указывает, что рассматривает рассудок как нечто движущееся, а доводы – как соответствующие движущие силы, которые приводят к сомнениям определённой скорости и т. д.*

Он серьёзно доказывает, что сомнения в любой истории, передаваемой в течение заданного времени (при прочих равных условиях) изменяются пропорционально квадрату времени, прошедшему с момента происхождения этой истории. Крейг вводит многое того же вида по отношению к оценке устойчивого либо равномерно ускоряющегося удовольствия и удовольствия, изменяющегося пропорционально любой степени времени и т. д.

В библиографических справочниках указывается, что книга Крейга была переиздана в Лейпциге в 1755 г. [на каком языке?] с опровержением (J. Daniel Titius) и что в 1701 г. Петерсон опубликовал некоторые Animadversiones (критические замечания). Prevost & Lhuilier (1800) упоминают сочинение Крейга; он, видно, решил [как они сообщают], что вера в Священное Писание, поскольку она зависела от устной традиции, исчезла примерно в 800 г., а зависящая от письменной традиции исчезнет в 3150 г. Приняв иной закон убывания веры, Петерсон заключил, что она исчезнет в 1789 г. См. Montmort (1708/1713, с. XXXVIII)[21] и журнал *Athenaum* за 7 ноября 1863, с. 611.

91. Взгляды в анонимной статье 1699 г.[22] не совпадают с современными. Lubbock и Drinkwater полагают, что её автором был Крейг. Пусть имеется n *последовательных* свидетелей, которые передают некоторое сообщение. Если правдоподобия их показаний равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то вероятность сообщения окажется равной произведению этих величин.

Далее, пусть показания *одновременны*. Если свидетелей двое, и показания первого оставляют неопределённость $(1 - p_1)$ и если показания второго устраняют долю p_2 этой неопределённости, то от неё остаётся $(1 - p_1)(1 - p_2)$ и аналогично для трёх свидетелей и т. д.

Соответствующая теория была принята в анонимной статье Probabilité, которую, видимо, написал Дидро, в первоначальной французской *Encyclopédie* и перепечатана в *Enc. Méthodique*[23]. Ту же теорию воспринял Bicquilley (1783).

Глава 10. Различные исследования 1700 – 1750 гг.

337. Здесь мы описываем различные исследования по нашей теме, выполненные в 1700 – 1750 гг.

338. Первое сочинение, требующее нашего внимания, это очерк Николая Бернулли, уже упомянутый в § 72.

339. Он заявляет, что прилагает математические вычисления к различным вопросам, преимущественно относящимся к вероятности человеческой жизни. За основу он принимает некоторые факты, которые вывел его [покойный] дядя, Якоб Бернулли, по сравнению бюллетеней о смертности, а именно сведений о том, что из 100 новорожденных 64 остаются в живых после шести лет жизни, 40 – после 16-ти лет и т. д[24]. Вот вопросы, которые рассмотрел Николай Бернулли.

Период, после которого безвестно отсутствующий может считаться умершим; стоимость пожизненной ренты; сумма, необходимая для того, чтобы обеспечить новорождённому уплату некоторой суммы после достижения им определённого возраста; морское страхование; проблема, относящаяся к лотерее. Он также касался вероятности свидетельств и невиновности подсудимого.

Очерк не дал автору возможности проявить свою математическую мощь, которая потребовалась ему в его переписке с Монмором [в других главах]. И всё же он проявил смелость, оригинальность и твёрдую веру в значимость и охват возможных приложений теории вероятностей. Мы рассмотрим два примера.

340. Пусть в течение a лет вымрет группа из b человек, смерть которых в любой момент этого периода равновероятна. Требуется определить вероятность продолжительности жизни последнего из этой группы. Н. Б. полагает, что эта задача равносильна следующей: Длина отрезка a измеряется от закреплённой точки; b точек случайно[25] расположены на нём, и требуется определить среднее (!) расстояние от этой точки до последней их них.

Пусть отрезок разделён на бесконечно большое число n равных интервалов длиной c, так что $nc = a$. Каждая из b точек может находиться на расстоянии c, $2c$, …, nc, но никакие две или более точек не могут располагаться в точности на одном и том же расстоянии. Полное число возможных случаев $\varphi(n, b)$ будет равно числу сочетаний из n по b. Обозначим расстояние последней точки через x. Тогда расстояния $(b - 1)$

точек будут короче, чем x, и число таких случаев равно числу сочетаний из $(x - 1)$ по $(b - 1)$, т. е. равно $\varphi(x - 1, b - 1)$. Искомое среднее расстояние равно

$$\sum xc\varphi(x - 1, b - 1)/\varphi(n, b),$$

где суммирование происходит от $x = b$ до $x = n$.

Предел этого расстояния при бесконечном n, как нетрудно заметить, равен[26]

$$ncb/(b + 1) = ab/(b + 1).$$

Таков по существу метод Николая Бернулли.

341. Н. Б. применял весьма странный метод оценивания вероятности невиновности подсудимого. Он принял, что ошибочность каждой улики вдвое вероятнее, чем её истинность. Обозначим через u_n вероятность невиновности подсудимого при наличии n различных улик. Имеется 2 шанса из трёх за то, что n-я улика ошибочна, и в этом случае положение подсудимого сводится к тому, что против него имеется только $(n - 1)$ улик. Но 1 шанс из трёх указывает на его виновность, и таким образом[27]

$$u_n = (2u_{n-1} + 0)/3 = 2u_{n-1}/3, \; u_n = (2/3)^n.$$

Таков в иных обозначениях метод и результат Николая Бернулли.

342. В переписке Н. Б. с Монмором была сделана ссылка на работу Barbeyrac, которую я не видел. Она, видимо, была диссертацией, показывающей, что ни религия, ни мораль не запрещает игры вообще и азартные игры в частности. Эта книга вышла в 1709 и 1744 г[28]. Утверждается также, что тот же автор опубликовал рассуждение *Sur la nature du sort* (О природе жребия (или судьбы)). См. о нём в *English Cyclopaedia* и *Biographie universelle* [*ancienne et moderne*, tt. 1 – 53. Paris, 1811 – 1828].

343. Теперь нам следует рассмотреть мемуар Арбутнота (1712), лейб-врача Её Величества и члена Коллегии врачей и Королевского общества, которому мы уже приписали элементарное сочинение по нашей теме (§ 79).

344. Вот начало мемуара:

Среди бесчисленных следов Божественного провидения в творениях природы есть весьма примечательное, наблюдаемое в точном равновесии, которое поддерживается между числами мужчин и женщин. Ибо этим обеспечивается вечное существование рода человеческого, потому что *каждый мужчина может иметь свою женщину, притом подходящего возраста. Это равенство численностей мужчин и женщин является результатом Божественного провидения, направленного к доброй цели, а не случая, и я доказываю это следующим образом.*

345. Приводятся сведения о рождаемости в Лондоне за 82 года, которые показывают, что каждый год рождалось больше мальчиков, чем девочек. Очень мало в мемуаре относится к теории вероятностей. Основной упор в следующем. Пусть имеется равный шанс обоих рождений, тогда шанс того, что в данном году родится больше мальчиков чем девочек окажется равным 1/2, а шанс того, что так произойдёт 82 года подряд, будет равен $1/2^{82}$. Он настолько мал, что можно заключить, что шансы мужских и женских рождений не одни и те же.

346. Этот мемуар привлёк внимание Николая Бернулли. В переписке с Монмором он не согласился с доводом Арбутнота, см. § 223 [но так и не пояснил своей точки зрения]. Есть и его письмо Лейбницу по этому поводу (Leibniz 1855, с. 989). Муавр ответил Николаю Бернулли (§ 335) [точнее: Муавр заметил, что возражение Н. Б. было непонятно].

347. Эту же тему обсуждал s'Gravesande (1774, т. 2, с. 221 – 248). Можно понять (см. с. 237), что при путешествии по Голландии Николай Бернулли встретил Гравезанда. С мемуара последнего мы начнём обсуждение темы. В нём содержится краткое указание на элементы теории вероятностей и выводится следующий результат.

Пусть шансы рождения мальчика и девочки одни и те же. Требуется определить шанс того, что в 11 429 рождениях будет от 5745 до 6128 мальчиков. Длительные арифметические вычисления приводят к шансу, примерно равному 1/4, так что шанс того же результата, происходящего 82 года подряд, равен $1/4^{82}$. Но именно это и произошло в Лондоне, и автор заключает, что шансы мужских и женских рождений не совпадают.

К. П., с. 302. Гравезанд принимает среднее, как он называет, число годичных рождений, т. е. 11 429. Найденная им наименьшая разность мужских и женских рождений произошла в 1703 г. Сведя данные к этому среднему, он получил соответственно 5745 и 5684. Аналогичная наибольшая разность, между числами 6128 и 5301, произошла в 1661 г. Как и Арбутнот, Гравезанд без дальнейших рассуждений принимает шанс, равный 1/2. Далее, за 82 года число годичных мужских рождений колебалось между 5745 и 6128. Пусть теперь 11 429 монет подбрасываются 82 раза и A держит пари против B на то, что это число не выйдет за указанные границы.

Гравезанд надлежащим образом замечает, что следует взять бином $(1/2 + 1/2)^{11\,429}$ и учесть все члены его разложения от $1/2^{5745}\cdot 1/2^{5684}$ до $1/2^{6128}\cdot 1/2^{5301}$. Пусть их сумма равна α, а сумма остальных членов – β. Тогда шанс игрока А в одиночном броске равен α/(α + β), а его полный шанс и шанс его противника

$$(\frac{\alpha}{\alpha+\beta})^{82} \div [1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}]^{82},\ [(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})^{82}-1]\div 1.$$

[…]

Каким-то образом Гравезанд указал окончательный результат с 47 значащими цифрами.

Тодхантер. Гравезанд, как оказывается, сообщил об этом Николаю Бернулли, ответ которого приведен. Он содержит доказательство знаменитой теоремы Якоба Бернулли, в основном повторяющее прежнее (Montmort 1708/1713, с. 389 – 393)[29]. Затем Гравезанд написал письмо с очень чётким отчётом о своих взглядах, и редактор заметил, что, судя по его ответу, Н. Б., видимо, благоприятно отнёсся к нему.

Вот как он подытожил полемику:

Довод Арбутнота состоит из двух частей. Первое, если предположить равенство рождений мальчиков и девочек, то вероятность того, что их количества окажутся очень близкими, будет низкой; и второе, низкая вероятность будет и для того, чтобы число мальчиков много раз превысило число девочек. Я опровергаю первую часть, но не вторую.

Николай Бернулли неверно представил довод Арбутнота. Он, кажется, полагал без какой-либо убедительной причины, что этот довод как-то противопоставлен теореме, известной по имени его, Н. Б., дяди.

348. Два мемуара по нашей теме, опубликованные в 1717 г. Николаем Бернулли и Муавром, относились к так называемой задаче Вальдеграва (§ 211)[30]. Н. Б. решил её по существу так же, как и в письме Монмору (Montmort 1708/1713, с. 381 – 387), Муавр же воспроизвёл своё решение в *Учении о случае*.

349. Теперь мы должны обратиться к переводу 1714 г. трактата Гюйгенса, выполненному Брауном (W. Braune). Он содержит Посвящение доктору Ричарду Миду[31], Объявление для читателей и 24 страницы перевода. Вот начало Посвящения:

Почтенный Сэр, Рассматривая тему нижеследующих сочинений, я не могу не посвятить их Вам, равно как не могу отказаться ни от одного Предложения этих наук (?)*, ясное доказательство которых я уже видел. Причина проста, поскольку Вы придали ярчайший блеск и славу весьма значительной части математики, внеся их* (?) *в их благороднейшую область, теорию физики.*

Тот, кто публикует любые истины аналогичной природы, кто желает видеть их доведенными до полного совершенства, конечно же, должен *искать Вашего покровительства и их приложения* (?). *Поступая столь благоразумно, он быть может увидит эти Предложения, которыми хотел лишь только научить людей управлять своими кошельками и указывать им, каким шансам и случайностям они могут безопасно подвергать свои деньги, – он в какой-то момент увидит намного более славную цель, обратившись к ограждению их от ловких приёмов слишком уже удачливой обманщицы, смерти, и к противостоянию закулисным козням любых скрытых заразных болезней*.

В своём Обращении к читателям Браун ссылается на трактат Гюйгенса, переведенный Арбутнотом, и указывает на труды Монмора и Муавра. И далее:

Публикуя это издание, и пожелав, чтобы оно стало как можно нужнее, я решил добавить обширное Приложение, содержащее решение некоторых наиболее полезных и сложных задач, которые только мог вообразить себе и которые, насколько мне известно, ещё не были специально рассмотрены. Но несколько дней назад я узнал, что французская книга Монмора была только что переиздана в Париже с весьма значительными добавлениями, и я должен был прекратить работу над Приложением до тех пор, пока не смогу ознакомиться с его добавлениями из опасения, что некоторая часть задуманного мной быть может уже была удостоена вниманием указанного искусного автора.

Я не знаю, появилось ли когда-либо это Приложение.

350. В *Hist. de l'Acad. Sci. Paris*, опубликованной в 1730 г., на с. 53 – 57 помещено чьё-то объявление о некоторых результатах, которые получил Mairan (Anonymous 1730). Некто случайно выбирает какое-то число жетонов из их груды и предлагает другому лицу угадать, оказалось ли оно чётным или нечётным. Mairan утверждает, что оно скорее нечётно, и вот его рассуждение.

Пусть в исходной груде было нечётное число жетонов, например, 7. Из них можно было отобрать 1, 2, …, 7, и в четырёх случаях это число нечётно и чётно в трёх случаях. Если же исходная груда состояла из чётного числа жетонов, то число отобранных жетонов с равной вероятностью окажется чётным или нечётным. И таким образом Mairan заключает, что следует ставить на нечётное число.

Пусть в исходной груде было n жетонов. С современной точки зрения[32] 1 жетон можно выбрать n способами, 2 жетона – C_n^2 способами и т. д. Mairan замечает эту возможность, но отрицает её.

Эту же задачу решал Лаплас (1774a, § 5) и получил обычный результат, хотя и не по методу комбинаций. Он сослался на Мейрана и кратко указал, что не согласен с ним. Впоследствии он (1812/1886, с. 203 – 205) применил для той же цели метод комбинаций.

В статье pair ou non (чёт – нечет) в первоначальной французской энциклопедии 1765 г. описана точка зрения Мейрана. Статья была перепечатана в *Enc. Méthodique* в 1785 г. без указания мнения Лапласа.

351. На с. 68 *Hist. de l'Acad. Sci. Paris*, в том же томе, в котором был опубликован результат Мейрана, помещен следующий абзац:

Аббат Sauveur, *сын покойного академика Sauveur*, *указал метод, который он применил для определения вероятности выигрыша в игре кадриль*. […] *В этом сочинении* (?) *широко применялась трудная и изящная комбинаторика*.

352. Теперь мы должны обратиться к мемуару Nicole (1732a). Он по существу рассматривал раздел ставки весьма трудоёмким методом, а его мемуар был совсем излишен, потому что результаты уже получили, притом проще, Монмор и Муавр.

Можно отметить одно обстоятельство. Пусть *a* и *b* пропорциональны соответствующим шансам A и B выиграть партию. Они играют чётное число партий, например, 8, и каждый ставит *S*. Тогда преимущество A окажется равным

$$S\frac{a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3-56a^3b^5-28a^2b^6-8ab^7-b^8}{(a+b)^8}.$$

Это выражение предполагает, что если каждый выиграет 4 партии, каждый игрок останется при своём. Видно, что числитель делится на $(a+b)$ и что дробь можно упростить:

$$S\frac{a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3-35a^3b^4-21a^2b^5-7ab^6-b^7}{(a+b)^7}.$$

Полученное выражение в точности соответствует игре в 7, а не 8 партий. Николь замечает это и лишь указывает, что это не неразумно.

Мы можем без труда показать, что полученный результат справедлив во всех случаях. Пусть A и B договорились играть $(2n-1)$ партий и p_1 и q_1 – шансы того, что A опередит B или B опередит A в точности на одну партию, а p_2 и q_2 – шансы того, что опережение произойдёт на 2 или более партий. Тогда преимущество A будет равно $S(p_1+p_2-q_1-q_2)$. Пусть теперь партий будет $2n$; шансы того, что A опередит B или B опередит A на 2 или более партий будут равны

$$p_2+\frac{p_1a}{a+b},\ q_2+\frac{q_1b}{a+b}$$

и поэтому преимущество А будет равно произведению S на разность указанных сумм. Но нам известно, что $p_1/a = q_1/b$. Пусть эти дроби равны μ, тогда

$$\frac{p_1a - q_1b}{a+b} = \frac{\mu(a^2 - b^2)}{a+b} = \mu(a-b) = p_1 - q_1,$$

так что преимущество А при игре в $2n$ партий оказывается тем же, что и при игре в $(2n - 1)$ партий.

353. Там же опубликован мемуар Nicole (1732b) о разделе ставки при любом числе игроков, набравших одно и то же число очков[33]. Николь начинает своё трудоёмкое вычисление, но замечает, что шансы игроков выражены членами разложения некоторого многочлена и предлагает общее правило. Пусть игроков трое, а их шансы выиграть партию равны a, b, c. Если они должны играть 3 партии, то шанс выигрыша А равен $a^3 + 3a^2(b + c)$ и аналогичные выражения имеют место для В и С. Есть также шанс abc выигрыша одной партии каждым.

Аналогично, при игре в 4 партии шанс выигрыша А равен $a^4 + 4a^3(b + c) + 12a^2bc$, но есть шанс $6a^2b^2$ того, что А и В разделят ставку, не оставив ничего для С и т. д. Но всё это было уже хорошо известно, см. Montmort (1708/1713, с. 353) и De Moivre (1730, с. 210).

354. В 1733 г. Бюффон доложил в Академии наук в Париже решение нескольких задач на шансы, см. краткий отчёт Anonymous (1735). Эти решения включены в его сочинение (1777), и мы вернёмся к ним.

355. Мы теперь возвращаемся к сочинению Anonymous (1692/1738), вторую часть которого мы оставили для исследования, чтобы вначале дать отчёт о трудах Муавра, см. §§ 78 и 88 [и 80]. На титульном листе второй части её автором назван Джон Хам; Муавр ни разу не упомянут, но я полагаю, что наибольшую долю своих замечаний Хам перенял у последнего.

На с. 53 – 73 Хам исследует игру фараон. Думаю, однако, что он взял всё это из сочинений Муавра. Он включил ту же предварительную задачу (De Moivre 1718, задача 40; 1756, Задача 10). На с. 74 – 94 приведены некоторые примеры на игру туз червей или справедливый шанс и на лотереи. Часто применяются результаты Муавра о числе испытаний, после которого исследуемое событие с равной вероятностью появится или не появится либо 1 раз, либо 2 раза, см. § 264 [в котором Муавр свёл свои вычисления в таблицу].

356. Впрочем, включено и добавление к результатам Муавра, которое заслуживает упоминания, хоть и приведено оно было без доказательства. У

Муавра отыскание числа испытаний во втором случае зависело от уравнения

$$[1+(1/q)]^{zq} = 2(1 + z).$$

При бесконечном q оно сводится к

$$z = \lg 2 + \lg(1 + z)$$

и Муавр получил $z \approx 1678$. Но пусть в противном случае

$$[1+(1/q)]^{q} = e^{c},$$

тогда уравнение запишется в виде

$$e^{cz} = 2(1 + z).$$

Пусть $z = 2 - y$ и (см. ниже) $2c = \gamma + s$ при $e^{\gamma} = 6$. Тогда

$$e^{2c-cy} = 6 - 2y.$$

После логарифмирования оказывается, что

$$s - cy = -\frac{1}{3}y - \frac{1}{18}y^2 - \frac{1}{81}y^3 - ..., \; ry - \frac{1}{18}y^2 - \frac{1}{81}y^3 - ... = s,$$

где $r = c - 1/3$. Обращая ряд, мы получим

$$y = \frac{s}{r} + \frac{1}{18r}(s/r)^2 + \frac{1+2r}{162r^2}(s/r)^3 + ...$$

Такова формула Хама, приведенная, как сказано выше, без доказательства. Из равенства $e^{\gamma} = 6$ следует, что $\gamma = 1{,}791759$ и

$$s = 2c - \gamma = 2c - 1{,}791759.$$

Хам утверждает, что этот ряд определяет значение z при $q > 4{,}1473$. Он несомненно принял, что $2c - \gamma = 0$, что приводит к уравнению $[1+(1/q)]^{q} = \sqrt{6}$, которое может быть решено методом проб. Но он, видимо, был слишком дотошен, ибо при $2c < \gamma$ и $\gamma - 2c < c - 1/3$, т. е. при $c > \gamma/3 + 1/9$, мы всё ещё получим $|s/r| < 1$.

357. Вторая часть заканчивается утверждениями о численных значениях некоторых шансов в hazard и нардах.

358. Теперь нам следует заметить сочинение D. M. (1739). Титульный лист, Объявление для читателей и Предисловие занимают 8 страниц, после которых следуют 90 страниц основного текста.

Игра, указанная в заглавии брошюры, состояла в следующем. Из обычной колоды карт изымаются восьмёрки, девятки и десятки, так что остаётся 40 карт. Каждая фигурная карта оценивается в 10 очков, для остальных же оценками служат количества очков, указанных на них. Карты открываются поочёредно, пока сумма очков на них не окажется между 31 и 40 включительно. Требуется определить шансы, благоприятствующие каждому из чисел в этом промежутке.

Задача решается исследованием всех возможных случаев и подсчётом их числа. Вычисление весьма трудоёмко и, возможно, является самым ярким примером ошибочно приложенного трудолюбия во всей литературе об азартных играх. На с. 80 автор ссылается, как можно полагать, на другое сочинение, которого я не видел: *Я уже доказал это при вычислении Лотереи Рима*.

Заметим, что описанная игра не совпадает с той, которая позднее была названа тем же именем, см. Poisson (1825 – 1826).

359. Знаменитый Томас Симпсон (1710 – 1761), профессор математики в Королевской Военной Академии в Вулидже, опубликовал трактат (1740) о шансах. Сообщение Хаттона о его жизни и трудах помещено перед основным текстом его книги (1752)[34].

В Предисловии книги (1740) Симпсон намекает, что имел в виду сочинить введение к своей теме, менее дорогое и более понятное, чем работы Муавра, и по существу его книгу можно считать сокращённым вариантом трудов последнего. Почти все задачи он перенял у Муавра[35], и метод их исследования по существу тот же. Очень немногое, добавленное столь мощным автором, свидетельствует о том, как внимательно Муавр изучил свою тему, поскольку это было доступно математическим возможностям того времени. Мы укажем то, что нашли нового у Симпсона. Он подразделил своё сочинение на 30 задач.

360. Вот Задача 6:

Имеется заданное количество каждой из нескольких случайно перемешанных вещей (той же формы и того же размера), а именно a *– первого вида,* b *– второго вида и т. д. Из них как попало отбирается* m *вещей. Определить вероятность того, что из этих* m *в точности* p *окажется вещей первого вида,* q *– второго вида и т. д.*

Решение Симпсона: вероятность равна

$$C_a^p \cdot C_b^q \cdot C_c^r \div C_n^m,\ n = a + b + c + ...$$

Это, видимо, именно та задача, которую Симпсон назвал в титульном листе *новой и исчерпывающей, очень полезной при отыскании выгоды или потери в лотереях и т. д*[36].

361. Задача 10 относится к игре в шары, см. § 177. Симпсон приводит таблицу результатов для бесконечного числа игроков на каждой стороне, но недостаточно объясняет её. Более приемлемый отчёт см. Clark (1758, с. 63 – 65).

362. Задача 15 состоит в том, чтобы определить, сколько испытаний следует произвести, чтобы исследуемое событие с равной вероятностью произошло r раз или нет, если шанс его появления в единичном испытании известен. Симпсон заявляет, что решил эту задачу в *более общем виде, чем это было сделано раньше*, однако я не думаю, что он добавил что-нибудь существенное к результату Муавра. Впрочем, мы приведём его дополнение. Пусть требуется, чтобы событие произошло r раз, а шанс его появления при единичном испытании равен $a/(a + b)$ и $q = b/a$ – большое число.

Муавр показал, что равная вероятность появления и непоявления события r раз произойдёт после примерно $q[r - 3/10]$ испытаний, см. § 262. Но если $q = 1$, то требуемое число испытаний в точности равно $2r - 1$. Симпсон предлагает принять единую формулу $q[r - 3/10] + r - 7/10$. Этот результат точен при $q = 1$ и очень близок к истине при большом q.

363. Задача 20 совпадает с задачей 7 Муавра[37]. Она является примером на продолжительность игры, см. § 107 [о пятой дополнительной задаче Гюйгенса]. Метод Симпсона более естественен и по существу весьма схож с современным.

364. Задачу 22 мы объяснили в § 148[38]. По сравнению с методом Муавра метод Симпсона очень трудоёмок, но он добавил полезное следствие. Внося или сокращая общие множители, мы можем представить результат § 148 в виде

$$n[\frac{1}{p}C_p^n - \frac{1}{q}C_n^1 C_q^n + \frac{1}{r}C_n^2 C_r^n - ...],\ q = p - f,\ r = p - 2f, ...$$

и ряд продолжается, пока не появляется отрицательный множитель.

В своём следствии Симпсон определяет шанс того, что сумма чисел, появившихся при броске костей, не превысит p. В предыдущем выражении следует поэтому вместо p последовательно подставить 1, 2, 3, …, p и сложить результаты, применив элементарное предложение о суммировании рядов. Для искомого шанса мы получим

$$C_p^n - C_n^1 C_q^n + C_n^2 C_r^n - \ldots,$$

и ряд, как и выше, продолжается пока не появляется отрицательный множитель.

365. Задача 24 совпадает с задачей 74 Муавра о шансе серии *p* успехов в *n* испытаниях, см. § 325. Муавр привёл ответ без доказательства, а у Симпсона доказательство нестрогое, ибо в процессе рассуждения он говорит, что *закон продолжения очевиден*. Мы по существу показали, что решение обеспечивается коэффициентом при t^{n-p} в разложении

$$\frac{a^p(1-at)}{(1-t)[1-t+ba^p t^{p+1}]},$$

т. е. в разложении

$$\frac{a^p(1-at)}{(1-t)^2}[1-\frac{ba^p t^{p+1}}{1-t}+(\frac{ba^p t^{p+1}}{1-t})^2-(\frac{ba^p t^{p+1}}{1-t})^3+\ldots].$$

Но

$$\frac{1-at}{(1-t)^2}=\frac{1}{1-t}+\frac{(1-a)t}{(1-t)^2}=\frac{1}{1-t}+\frac{bt}{(1-t)^2}$$

и поэтому мы можем сказать, что результат есть сумма двух рядов, что соответствует виду, который привёл Симпсон.

366. Задача 25 посвящена продолжительности игры. В Предисловии Симпсон указывает, что задачи 22 и 25 являются *самыми сложными и примечательными в нашей теме* и что *обе они решены совершенно новым методом*. По отношению к Задаче 25 это совершенно неверно. Симпсон приводит результаты без всякого доказательства. Он перенял Случаи 1 и 2 у Муавра, а Случай 3 – частный пример его последующего общего утверждения, которое совпадает с решением Монмора, см Montmort (1708/1713, с. 268) и De Moivre (1718/1756, с. 193 и 211).

367. Мы опишем Задачу 27 и соответствующее замечание в Предисловии.

Ребра параллелепипеда находятся в отношении a, b, c друг к другу. Сколько раз его следует подбросить, чтобы держать пари о выпадении какой-либо определённой грани, например a,b?

Некоторое время назад эта задача была предложена на латинском языке научной общественности как весьма трудная и, насколько мне известно, она ещё не была решена.

Мы отметили происхождение этой задачи в § 87. Симпсон предполагает, что около параллелепипеда описана сфера, радиус которой поэтому описывает границы заданной плоскости. И, далее, что шанс выпадения данной плоскости при одном броске равен отношению сферической поверхности, ограниченной подвижным радиусом, ко всей поверхности сферы. Таким образом, задача сводится к отысканию площади определённого куска поверхности сферы.

368. Симпсон (с. 70 – 73) приводит два примера суммирования рядов.

1) Пусть $(a + x)^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ Требуется определить сумму

$$\frac{A}{r!}+\frac{Bx}{(r+1)!}+\frac{Cx^2}{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (r+2)}+\ldots$$

Проинтегрируйте обе части тождества и определите константу так, чтобы эти части исчезли при $x = 0$:

$$\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}=Ax+\frac{Bx^2}{2}+\frac{Cx^3}{3}+\frac{Dx^4}{4}+\ldots$$

Повторите эту операцию:

$$\frac{(a+x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{a^{n+1}x}{n+1}-\frac{a^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=$$

$$\frac{Ax^2}{1\cdot 2}+\frac{Bx^3}{2\cdot 3}+\frac{Cx^4}{3\cdot 4}+\frac{Dx^5}{4\cdot 5}+\ldots$$

Проделайте r таких шагов и разделите обе части на x^2, чтобы получить искомую сумму.

2) Требуется определить сумму $1^n + 2^n + \ldots + x^n$. Метод Симпсона совпадает с методом Николая Бернулли, который приписал его своему дяде, см. § 207 [не переведен].

369. Задача 29 такова:

Шансы выигрыша любой заданной партии игроками A и B находятся в соотношении a:b. Они согласились играть до тех пор, пока кто-либо из них не наберёт n очков. Перед началом каждой партии A ставит p, а B *ставит pb/a, чтобы игра не была убыточной ни для кого из них. Требуется определить существующую стоимость всех будущих выигрышей.*

Исследование не представляет затруднений.

370. Задача 30 такова:

Игроки A и B равно искусны. Они согласились играть до тех пор, пока кто-либо из них не выиграет n партий. Требуется определить вероятность того, что никто из них не выиграет $r\sqrt{n}$ *ставок и что B не выиграет столько ставок за всю игру*[39].

Здесь r задано, а n очень большое число.

По поводу задач 24 и 30 Симпсон указывает в Предисловии, что они соответственно

совпадают с двумя новыми, добавленными Муавром в конце последнего издания своей книги. Их доказательства, которые учёный автор пожелал скрыть, ясно и полностью исследовано здесь.

Эти же задачи упомянуты на титульном листе:

Полное и ясное исследование двух задач, которые Муавр добавил в конце второго издания своей книги. Одну из них этот великий человек посчитал самой полезной в своей теме, но их доказательства он опустил.

Симпсон был совершенно неправ, приписывая себе решение Задачи 30 и утверждая, что Муавр не привёл её решения. В ней определялось примерное значение членов вблизи наибольшего в разложении $(a + b)^n$, см. Муавр (1738, с. 233 – 243; 1756, с. 241 – 251)[40]. Метод Симпсона на самом деле совпадает с методом Муавра.

371. Мы можем заметить книгу Симпсона (1757). На с. 64 – 75 помещен очень интересный раздел, названный *Попыткой показать преимущество, достигаемое выбором среднего из некоторого числа наблюдений в практической астрономии*.

Этот раздел очень интересен. Задачу, которую решил Симпсон, повторно рассмотрел Лагранж (1776) без всякой ссылки на своего предшественника[41]. Эту работу Симпсона будет удобнее рассмотреть после исследования мемуара Лагранжа, и мы тогда сообщим, что Симпсон указал в 1757 г.

372. В том 4 сочинений Иоганна Бернулли (1742) включен раздел De Alea, sive Ars Conjectandi, problemata quoedam (с. 23 – 33), содержащий семь задач.

373. Первые две задачи просты и хорошо известны, и автор полностью решил их. Третья задача описывает игру в шары. Без доказательства приведен результат, опубликованный уже ранее (Montmort 1708/1713, с. 248; De Moivre 1756, с. 117).

374. В четвёртой задаче допущена ошибка. Автор утверждает, что при броске $2n$ обычных костей сумма очков, равная $7n$, может быть получена в

$$\frac{(7n-1)(7n-2)(7n-3)...(5n+1)}{(2n-1)!}$$

случаях. Это равносильно тому, что приведенное выражение равно коэффициенту при x^{7n} в разложении $(x + x^2 + \dots + x^6)^{2n}$. На самом деле, однако, этот коэффициент выражен рядом, лишь первым членом которого является указанное выражение.

375. Пятая и шестая задачи ничего нового в принципе не представляют. Иоганн Бернулли приводит лишь числовые результаты, проверка которых потребовала бы длинных вычислений. Седьмая задача представляется непонятной.

Глава 16. Различные исследования 1750 – 1780 гг.

591. Мы здесь описываем различные сочинения по нашей теме, появившиеся в 1750 – 1780 гг.

592. Прежде всего мы указываем книгу *Piece qui a remporté le prix sur le sujet des Evenemens Fortuits, proposé par l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin pour l'année 1751. Avec les pièces qui ont concouru*.

Это название может относиться к нашей теме, однако мы увидим, что это не так. Берлинская академия предложила для обсуждения следующий вопрос:

Благоприятные и неблагоприятные события, называемые благом и бедой, зависящие от воли или разрешения Господа, так что слово судьба оказывается термином, лишённым реального значения. Спрашивается, требуют ли от нас эти события каких-то определённых обязанностей, каковы они и каков их охват.

Премия была присуждена Кестнеру, профессору математики в Лейпциге. В указанной книге помещены его очерк и восемь очерков его соперников. Работа Кестнера опубликована и на французском, и на латинском языке, остальные – на французском, немецком или латинском языке. Тема была, видимо, неблагодарная, и очерки не отличаются ни новизной, ни значимостью. Один из лучших авторов заканчивает свою работу скромным признанием, которое могли бы использовать все остальные:

Здесь я заканчиваю, потому что и без того на вполне достаточном основании опасаюсь стать слишком многословным, высказав так мало славной и проницательной новизны. В этом своём Опыте я также замечаю, что моя воля снова оказалась столь же сильной, как остальные мои качества.

593. Dodson (1753) опубликовал математический справочник, *решебник* математических задач. Страницы 83 – 136 второго тома посвящены задачам о шансах, но в них нет ничего ни нового, ни интересного. В остальной части тома и в третьем томе описаны пожизненные ренты и родственные темы.

594. Watt (1824) приписал некоторые работы об азартных играх Хойлю. Я видел только одну из них (Hoyle 1754). Дата публикации не сообщается, но её указал Watt. Титульный лист, Предисловие и Посвящение занимают 8 отдельно пронумерованных страниц, а основной текст – 73 страницы. На с. 1 – 62 без доказательств приведены правила подсчёта шансов в некоторых играх, в остальной же части книги опубликованы таблицы пожизненных рент и таблица Галлея (1693) с её кратким пояснением. Правил я не проверял.

595. Теперь мы упомянем анонимное сочинение 1757 г. Оно не связано с теорией вероятностей, и мы указываем его, потому что его название, особенно когда оно передаётся в сокращении, как в каталогах продавцов книг, возможно, намекает на подобную связь.

Первый очерк в ней посвящён влиянию шанса на изобретения. Оно признаётся и иллюстрируется различными примерами. Во втором очерке влияние небесных тел на человека, животных и растения в астрологическом смысле отрицается[42]. Автор был, видимо, оптимист, ибо явно надеялся, что в конце концов квадратура круга будет осуществлена, см. с. 31, 40 и 85. С другой стороны, уверенность автора в теории Ньютона всемирного притяжения была невелика, и он полагал, что наступит день, когда её забудут как теорию вихрей, см. его с. 45 и 172.

Вот один из его доводов, направленных против влияния Луны (с. 164). Если оно существует, то его следует представить как следствие лунных испарений, вещество которых, будь его плотность ощутима, препятствовало бы движению планет. Небесные орбиты следовало бы временами чистить, как улицы Лондона и Парижа, от пыли и грязи.

Автор не очень точен в своих утверждениях, и вот образец (с. 74) о Jacopo III, короле Англии (Якобе I):

Alla vista d'una spada ignuda, come riferisce il Cavaliere d'Igby, sempre era compreso d'un freddo, e ferale spavente.

И на с. 81:

Ciò che disse in lode d'Aristotile il Berni: Il gran Maestro de color che sanno.

Не так часто итальянец приписывает честь, которую заслужил Данте, какому-либо лицу низшего ранга.

596. Мы теперь должны обратиться к сочинению Clark (1758). Предисловие занимает 2 страницы, в основном тексте 204 страницы. Книгу можно считать трактатом, основанным на трудах Муавра и Симпсона. Сложные задачи опущены, а многие примеры и пояснения имеют целью прояснить изложение для лиц, не слишком сведущих в математике.

В книге нет ничего нового или интересного. Кларк, видимо, любил играть в шары; с. 44 – 68 он посвящает задачам, связанным с игрой в них. Очень подробно он (с. 113 – 130) обсуждает отыскание шансов набрать заданное число очков при броске определённого числа одинаковых костей. При этом он следует Симпсону, см. § 364, но указывает и метод Муавра. Вот как он начинает обсуждение:

Чтобы облегчить решение этой и следующей задачи, я сформулирую лемму, которую мне сообщил мой изобретательный друг, учитель *математики, William Payne. Сумма n* [треугольных] *чисел 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, … равна* $(n + 2)((n + 1)n/3!$.

Совсем ни к чему было ссылаться на кого-то по поводу такого хорошо известного результата, да и сам Кларк (с. 84) привёл общую теорему Ньютона о суммировании рядов (§ 152) [лемма 5 книги 3 “Начал”].

На с. 139 – 153 Кларк обсуждает задачу о последовательности событий (§ 325) [Задача 74 Муавра] и замечает незначительную ошибку в решении Муавра. Ввиду её тщательного рассмотрения мы можем заключить, что она доставила Кларку крупные неприятности.

В другом случае, в котором он решился возразить Муавру (1756, Задача 9), см. § 269, он не был столь же удачен и допустил ошибку. В обозначениях Муавра Кларк принимает, что A должен либо получить qG от B, либо уплатить ему pL, но это не так. Пусть A выигрывает в $(q + m)$ случаях и проигрывает в m случаях, тогда требуемая разность игр q окажется в его пользу. Он должен будет получить от B сумму $(q + m)G$ и уплатить ему mL, т. е. получить $qG + m(G - L)$, а не qG, как говорит Кларк.

597. Мы теперь обращаемся к мемуару Mallet (1762). Его задача совпадает с рассмотренной Муавром и Вальдегравом (§ 211) [см. Задачу 15 Муавра; о задаче Вальдеграва см. Прим. 30], а его решение напоминает решение Муавра (1756, с. 132 – 138). Впрочем, Mallet добавил кое-что. У Муавра каждый проигравший уплачивает одну и ту же сумму, он же принимает, что эта сумма возрастает в арифметической или геометрической прогрессии. Заметно, однако, что процесс решения у Муавра позволяет без всякого труда рассмотреть эти случаи, поскольку выводимые при этом ряды могут быть просуммированы известными методами.

598. Тот же том, в котором помещён мемуар Эйлера [1767] (§ 438), содержит два мемуара Beguelin (1767)[43]. Удобнее, тем не менее, вначале рассмотреть мемуар Иоганна III Бернулли (1771), внука Иоганна I [, которого Тодхантер весьма кратко упомянул в] § 194. Он был написан до мемуаров Бегелина, но опубликован позже. Вот начало мемуара Иоганна III:

Я зачитал этот мемуар в 1765 г., после того, как мемуар Эйлера был включён в Mémoires академии за тот год [за 1765 г.]. *Поскольку мемуары Бегелина* […] *во многих отношениях сходны с моим, а лотерея, которая привела к ним, теперь популярнее, чем когда-либо, я больше не стану надолго задерживаться с публикацией. Если мой метод не ведёт так далеко, как методы Эйлера и Бегелина, то по меньшей мере, как я полагаю, он полезен тем, что его легче понять.*

599. В первом параграфе, говоря о последовательностях, Иоганн III указывает:

Я временами занимался ими, пока не узнал про Эйлера, который исследовал ту же тему. Этого было достаточно, чтобы отказаться от своего замысла, и я таким образом лишь проверил, верно ли я рассуждаю. Он любезно сообщил мне это, и я теперь вижу, что немногое сделанное мной основано на соображениях, если не возвышенных, то по меньшей мере не ошибочных.

600. Иоганн III не приводит алгебраических исследований и ограничивается арифметическим подсчётом шансов возможных видов последовательностей для лотерей с 90 билетами и выходом в тираж двух, трёх, четырёх или пяти билетов. Вопреки его утверждению, его метод, как кажется, не является более лёгким, чем у Эйлера или Бегелина.

601. Есть одно отличие между Иоганном III и Эйлером. Первый предполагает, что номера 1 – 90 как бы расположены вдоль окружности и поэтому, в отличие от Эйлера, он считает, что 90 и 1 является двоичной последовательностью. Аналогично, Иоганн III считает 89, 90 и 1 последовательностью трёх номеров, тогда как у Эйлера эта последовательность была бы двоичной и т. д.

Можно было бы, видимо, ожидать, что, ввиду более симметричного определения последовательности у Иоганна III, его исследование будет проще, чем у Эйлера. На самом же деле после проверки, кажется, оказалось, что имеет место противное. В примере § 440 [о количестве последовательностей из трёх и двух номеров и о количестве случаев отсутствия последовательностей при извлечении трёх билетов; n это текущий номер билета], который соответствовал результатам Эйлера, эти количества оказались равными

$$n - 2,\ (n - 2)(n - 3),\ C_{n-2}^{3},$$

а в соответствии с определением Иоганна III мы находим

$$n,\ n - 4,\ n(n - 4)(n - 5)/3!.$$

602. Мы можем отметить один алгебраический результат. Эйлер указал, что при извлечении двух билетов из n шанс отсутствия последовательностей будет $(n - 2)/n$, а для трёх, четырёх, пяти билетов

$$\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)},\ \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)},\ \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)},$$

так что закономерность легко усмотреть. Но Иоганн III в соответствии со своим определением последовательности утверждает, что эти формулы останутся в силе, если n заменить на $(n-1)$. Он этого не доказал, и мы не знаем, как он вывел своё заключение.

Его можно установить по индукции. Пусть $E(n, r)$ и $B(n, r)$ означают числа случаев, при которых r билетов из n не приведут к последовательности в соответствии с определениями Эйлера и Иоганна III. Тогда

$$E(n,r)=\frac{(n-r+1)(n-r)...(n-2r+2)}{r!}$$

и требуется доказать, что

$$B(n,r)=\frac{n(n-r-1)...(n-2r+1)}{r!}.$$

Деление на общее число случаев было необходимо.

Будет иметь место соотношение

$$E(n, r) = B(n, r) + B(n-1, r-1) - E(n-2, r-1),$$

которое можно усмотреть на примере. Пусть $n = 10$ и $r = 3$. Каждый случай, учитываемый числом $B(n, r)$, будет происходить и в $E(n, r)$, но в последнем числе появятся и иные случаи, и их необходимо добавить. Вот они: (10, 1, 3), (10, 1, 4), …, (10, 1, 8). Но следует выяснить, по какой общей формуле их можно найти. Следует образовать все двоичные сочетания чисел 1, 2, …, 9, в которых не было бы никаких бернуллиевых последовательностей и которые содержали бы число 1. И вообще нам требуются все сочетания по $(r-1)$ из первых $(n-1)$ номеров, не содержащие этих последовательностей, но включающие число 1. С первого взгляда таких сочетаний будет $B(n-1, r-1) - B(n-2, r-1)$, но краткое обдумывание покажет, что их должно быть $B(n-1, r-1) - E(n-2, r-1)$, как и было указано выше. Установив этот результат, и независимо определив $B(n, 1)$, мы сможем устанавливать значения $B(n, 2)$, $B(n, 3)$, …

603. Теперь мы рассмотрим мемуары Beguelin (1767).

604. Они содержат общие алгебраические формулы, совпадающие с приведенными Эйлером, и аналогичные формулы, соответствующие определению Иоганна III. Именно последние являются новыми.

605. Можно легко указать метод автора.
Возьмём, к примеру, первые 13 букв *a, b, c, …, k, l, m* и составим таблицу

$$\begin{array}{ccccc} a & a & a & a & a \\ b & b & b & b & b\ldots \\ m & m & m & m & m \end{array}$$

Рассмотрим первые два столбца. Выберем любую букву в первом их них и присоединим её к любой букве во втором столбце, получив 13 соединений *aa, ab, …, ba, bb*, … Чтобы предотвратить повторения *ab* и *ba* и т. д., следует присоединять только те буквы, которые не расположены выше первой взятой буквы. Так, *a* будет присоединено к любой из 13 букв, *b* – только к любой из 12 букв. Всего таких соединений окажется 13 + 12 + … + 1 = 13·14/2.

Взяв три столбца, мы получим 13^3 соединений с повторениями, а без них, – C_{15}^3. В случае всех пяти столбцов число соединений без повторений будет C_{17}^5. Всё это хорошо известно, но Бегелин замечает, что оно проложит путь его дальнейшим исследованиям.

606. Случаи, подобные *a a a a a* не могут появиться в лотерее, так как ни один номер в них не повторяется. Поднимем второй столбец на одну строку, третий – на две строки и т. д. Мы получим 13 – 4 = 9 *полных* столбцов, и, аналогично предыдущему, число соединений окажется равным C_{13}^5.

607. Пусть мы теперь отыскиваем число соединений, в которых вообще нет последовательностей. Поднимем столбцы не на одну, а на две строки. Полных столбцов окажется 13 – 8 = 5; поступая так же, как в § 605, мы найдём, что полное число соединений будет C_9^5. Таким образом мы получаем значение $E(n, r)$, см. § 602.

608. Бегелин применяет кратко описанный нами метод при всестороннем рассмотрении задачи, но взамен букв использует медали римских императоров Augustus, Tiberius, Caligula, …

609. Полезно привести результаты при выходе в тираж пяти билетов из *n* в соответствии с определениями Эйлера и Иоганна III (столбцы 2 и 3). В строках указаны количества последовательностей 1) из пяти номеров; 2) из четырёх номеров; 3) из трёх номеров и одной последовательности из двух номеров; 4) из трёх номеров без других последовательностей; 5) и 6) из двух номеров, случаи двух и одной последовательности. Шансы определяются делением соответствующего числа на всё число случаев, C_n^5. Относительно отсутствия последовательностей см. § 602.

[Мы не включили таблицу Тодхантера в перевод.]

610. Теперь нам следует обратиться ко второму мемуару Бегелина (1769).

611. Вот его начало:

В предыдущем мемуаре я показал (?), *что учение о вероятностях основано только на принципе достаточного основания.*

Это, очевидно, относилось к нескольким замечаниям в только что рассмотренном мемуаре. Здесь автор косвенно ссылается на Даламбера (D'Alembert 1768):

Один выдающийся автор, и геометр, и философ, недавно опубликовал сомнения и вопросы об исчислении вероятностей, которые безусловно заслуживают внимания.

Бегелин желает показать, в какой степени метафизические принципы могут способствовать теории вероятностей.

К. П., с. 272. Бегелин полагает, что теория вероятностей *является скорее ветвью метафизики, чем геометрии*.

612. Он обсуждает два вопроса, первый из которых вряд ли нуждается в комментариях:

Если симметричные и регулярные события, приписываемые случаю, при прочих равных условиях являются столь же вероятными, как события, не обладающие ни порядком, ни регулярностью, то почему их регулярность нас поражает, так что мы считаем их такими уж особыми?

613. Следующий вопрос он считает более трудным:

Пусть событие уже произошло один раз или много раз подряд. Спрашивается, осталась ли у него та же вероятность происходить в дальнейшем как у противоположного события, которое имело ту же первоначальную вероятность, но ещё не появлялось ни разу.

Он заключил, что чем чаще происходило событие, тем менее вероятно его появление в следующем испытании и таким образом перенял одну из ошибок Даламбера. Он полагает, что, будь шансы [появления и непоявления] события равны в соответствии с обычной теорией, после его появления t раз подряд, шансы этих исходов в следующем испытании находились бы в соотношении $1/(t + 1)$.

614. Бегелин прилагает эти понятия к петербургской игре. Если число испытаний должно равняться n, тогда по обычной теории ожидание выигрыша равно $n/2$, он же полагает его равным

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2+1}+\frac{2^2}{2\cdot 3+1}+\frac{2^3}{4!\ +1}+\ldots+\frac{2^{n-2}}{(n-1)!\ +1}.$$

Члены этого ряда быстро убывают, а сумма подобного бесконечного ряда примерно равна 2,5.

615. Бегелин приводит и 5 других решений петербургской игры. Его 6 результатов не совпадают, но все сводятся к небольшому конечному значению ожидания, а не к большому или бесконечному, как в обычной теории.

616. Этот мемуар вряд ли имеет хоть какое-то значение. Он ничего не добавил к возражениям против обычной теории, на которых настаивал Даламбер, и к тому же он менее понятен и не так интересен. Добавим, что Montucla (1758/1799 – 1802, т. 3, с. 403) сообщил по поводу петербургской игры:

Указанная проблема оказалась также предметом учёных метафизических рассуждений Бегелина. Факелом глубокой метафизики этот метафизик и аналитик исследовал многие вопросы о природе теории вероятностей.

617. Теперь нам следует обратиться к мемуару Michell (1767), который привлёк немало внимания.

618. В интересующей нас части мемуара Мичел заключает, что весьма близкое расположение некоторых звёзд друг от друга не случайно. Метод его рассуждения ясен из следующей выдержки (с. 243):

Будем исследовать, каково было бы вероятное наименьшее видимое расстояние между любыми двумя или более звёздами, расположенными где-то на небе, если предположить, что они были разбросаны чисто случайно, – так, как получится. Ясно, что при этом предположении каждая звезда с равной вероятностью будет находиться либо там, либо тут. И тогда вероятность, что любая выделенная звезда окажется в пределах определённого расстояния (например, одного градуса) от любой другой звезды, будет представлена (в соответствии с обычным методом вычисления шансов) дробью, числитель которой относится к знаменателю как круг радиуса в один градус к кругу, радиус которого равен диаметру большого круга. (Эта последняя величина равна всей поверхности сферы.)

Иначе говоря, указанное отношение равно дроби $(60')^2/(6875{,}5')^2 = 0{,}000076154$ *или примерно* 1/13 131. *Её дополнение до единицы представит вероятность того, что этого не произойдёт. Однако, поскольку тот же шанс имеет место для любой другой звезды, эту дробь следует умножить саму на себя столько раз, сколько имеется звёзд не менее ярких, чем рассматриваемые. Если их число равно n, то* $(13\,130/13\,131)^n$ *выразит вероятность того, что ни одна звезда из этого числа не будет находиться на расстоянии менее одного градуса от заданной звезды. Дополнение этой вероятности до единицы представит вероятность того, что таких звёзд будет одна или более.*

И кроме того, поскольку то же событие с равной вероятностью может произойти с любой звездой, мы должны будем повторить *последний найденный шанс n раз и тогда дробь* $(13\ 130/13\ 131)^{n \cdot n}$ *представит вероятность того, что нигде на небе никакие две звезды из числа рассматриваемых не будут находиться на расстоянии менее одного градуса друг от друга, а дополнение этой величины до единицы укажет вероятность противоположного события*.

619. Вот результат Мичела (с. 246):

Если теперь вычислить в соответствии с указанными принципами, какова вероятность того, что никакие две звезды из всех видимых на небе не окажутся так близко друг к другу, как две звезды [как двойная звезда] β *Козерога, с яркостью которой, как я предположу, могут сравниться лишь около 230 звёзд, то окажется, что она равна около 80:1* [вероятность наблюдения такой звезды равна 1/81].

Пусть для примера рассматриваются более двух звёзд. Можно будет обратиться к шести самым ярким из [звёздного скопления] *Плеяд. Предполагая, что всех этих звёзд на небе, равных по блеску самой слабой из тех шести, около 1500, мы найдём отношение шансов примерно равное 500 000:1, что никакие 6 из этого числа, случайно разбросанных по всему небу, не будут располагаться так близко друг к другу, как в Плеядах*.

Подробности своих вычислений Мичел указал в примечаниях.

620. Лаплас (1812 за 1815, 1814/1999, с. 846 левый столбец) дважды сослался на Мичела[44].

621. Покойный профессор Forbes (1849 – 1850) опубликовал очень интересный критический обзор мемуара Мичела. Он весьма обоснованно возражает против математических вычислений Мичела и вообще не доверяет его последующим выводам.

622. В. Я. Струве (Struve 1827, с. XXXVII – XLVIII) провёл некоторые исследования по методу, весьма отличному от мичеловского. Пусть на заданной площадке небесной сферы площадью S находятся n звёзд и φ – площадь малого круга радиуса x''. Предполагая, что звёзды расположены случайно, Струве принимает величину $[n(n-1)/2]\varphi/S$ за шанс нахождения двух звёзд на расстоянии меньшем x'' друг от друга.

Пусть S – площадка от – 15° склонения до Северного полюса, $n = 10\ 229$ и $x = 4$. Тогда указанная выше величина будет равна 0,007814. См. также его сочинения (1837, с. XCI; 1852, с. CLXXXVIII).

Сэр Джон Гершель (Herschel 1849, с. 565) приводит некоторые числовые результаты, приписывая их Струве, но я полагаю, что он допустил какую-то ошибку: они, видимо, не соответствуют вычислениям, проведенным в указанных выше сочинениях.

623. О некоторых других темах, которые рассматривал Мичел, см. Struve (1847).

624. Теперь мы обратимся к другому мемуару Иоганна III (1770). Его задачу можно в общем виде сформулировать так: n мужчин одновременно женились на n женщинах. Требуется определить шанс того, что после смерти n человек не останется ни одной женатой пары, т. е. что все оставшиеся в живых будут вдовцами или вдовами. Иоганн III рассматривал два случая: либо распределение умерших по полу безразлично, либо половина из них мужчины и половина – женщины.

В мемуаре нет ничего ни интересного, ни нового. Формулы, выведенные по индукции и исходившие от частных случаев, не были действительно *доказаны*.

625. Мы переходим к мемуару Ламберта (1773).

626. Он указывает, что многие немцы доверяют предсказаниям авторов альманахов о погоде и других событиях. Поэтому он рассматривает шанс того, что предсказание случайного характера сбудется. Фактически Ламберт приходит к задаче игры *тринадцать*, хоть и не упоминает этого и ссылается лишь на мемуар Эйлера (1753). По поводу этой игры см. §§ 162, 280 и 430.

627. Мы сформулируем эту задачу таким образом: n писем в случайном порядке вкладываются в n конвертов. Требуется определить шанс того, что все письма или их любое заданное число попадут в *чужие* конверты. Общее количество случаев расположения писем равно $n!$, но лишь в одном случае все они будут вложены верно. *Только одно* письмо не может оказаться не на месте. *Только два* письма будут вложены неверно в C_n^2 случаях. Но следует ещё указать, в скольких случаях эта ошибка не повлияет на распределение остальных писем: только в одном случае.

Теперь обратимся к тройке писем. Они будут размещены ошибочно в C_n^3 случаях, притом двумя способами, как можно убедиться путём проб. Поступая таким же образом, мы получим

$$n! = A_0 + A_1 n + A_2 C_n^2 + A_3 C_n^3 + \ldots + A_n C_n^n, \qquad (1)$$

где A_r – число случаев, при которых r писем размещены ошибочно, причём

$$A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = 2,\ \ldots$$

Величины A_0, A_1, A_2, … *не зависят* от n, и мы можем определять их, последовательно полагая в тождестве (1) $n = 1, 2, 3, \ldots$ Вот это замечание является новым в мемуаре Ламберта. Он также указал общий закон

$$A_r = rA_{r-1} + (-1)^r, \qquad (2)$$

но не доказал его. Мы это проделали косвенно по значениям $\varphi(n)$ в § 161 и указали, что

$A_4 = 9$, $A_5 = 44$, $A_6 = 265$, $A_7 = 1854$, $A_8 = 14\,833$, …

Впрочем, указанный закон легко доказать вне зависимости от § 161. Пусть

$$\Delta^r 0! = r! - r(r-1)! + [r(r-1)/2](r-2)! - \ldots$$

Это обозначение аналогично тому, которое обычно применяется в разностных уравнениях. Фундаментальное тождество (1) наводит на мысль, что

$$A_r = \Delta^r 0! \qquad (3)$$

и это можно доказать по индукции:

$$\Delta^0 0! = 0! = 1 = A_0,\ \Delta^1 0! = 1 - 1 = 0 = A_1,\ \Delta^2 0! = 2 - 2 + 1 = A_2.$$

Из соотношения (1) следует, что если $\Delta_r = \Delta^r 0!$ для всех r до $(n - 1)$ включительно, то $A_n = \Delta^n 0!$. Таким образом установлена формула (3), и можно сразу же доказать, что и (2) тоже имеет место.

628. Мы переходим теперь к другому мемуару того автора, которого мы указали в § 597: Mallet (1772).

629. В нём рассматриваются две задачи. Первая была исследована в *Искусстве предположений* [Задача 14 в части 3-й], см. § 117[45], вторая относилась к лотереям.

630. Вот первая из них. Mallet замечает, что Якоб Бернулли отыскал верное решение, а затем и второе, которое привело к другому результату, а потому было ошибочным, хотя и казалось правдоподобным. Он говорит:

Бернулли ограничился указанием на кажущуюся особенность, но не объяснил её, и я полагаю, что её подробное рассмотрение и полное прояснение имеющегося небольшого затруднения не будут излишними. Заметно, что нетрудно представить бесконечное множество подобных случаев, при решении которых можно так же легко ошибиться.

631. Замечания Mallet вряд ли представляют что-то новое или важное. Его сочинения неясны, потому что он недостаточно разъясняет свои идеи. Вот пример, подсказанный чтением его мемуара и, быть может, полезный изучающим нашу тему.

Пусть речь идёт о теории продолжительности жизни. Абсциссы, измеренные от закреплённой точки, означают годы, начиная с определённой эпохи, а соответствующие ординаты пропорциональны числу остающихся в живых из большого числа родившихся в некоторую эпоху. Допустим, что мы желаем узнать, вероятнее ли новорожденному прожить более n лет или нет.

Правдоподобное, но неверное решение Якоба Бернулли означает, что это событие более вероятно, если только *абсцисса центра тяжести* площади больше, чем n. Верное решение исходит из абсциссы, которая *делит пополам* эту площадь, см. § 485.

632. Мы переходим ко второй задаче Mallet, которая относится к Лотерее Лотарингии (Montmort 1708/1713, с. 257 – 260, 313, 317, 326, 346). В ней n билетов, которые продаются n игрокам. Из стоимости [каждого] билета устроитель удерживает a, остальные же деньги отдаются игрокам в виде выигрышей, а кроме того каждому проигравшему возвращается b. Выигрыши распределяются следующим образом. В коробку вкладывают n жетонов, пронумерованных от 1 до n. Из неё извлекают жетон, и выигрыш получает тот игрок, номер билета которого совпадает с номером жетона.

Затем жетон возвращается в коробку. После n таких извлечений тиражи заканчиваются, и ввиду этого своеобразного метода проведения лотереи один игрок может выиграть несколько раз, и даже полностью получить все выигрыши. Требуется определить выгоду или потерю устроителя лотереи.

633. Монмор решил эту задачу следующим образом. Шанс того, что некоторый игрок не выиграет ни разу, равен $[(n-1)/n]^n$. Но тогда он получит b, и его ожидание равно $b[(n-1)/n]^n$. Таково же ожидание всех остальных игроков, и ожидание устроителя оказывается равным

$$a - nb[(n-1)/n]^n.$$

Монмор рассмотрел случай $b = a$ и $n = 20\,000$, при котором устроитель оказывался в проигрыше. Он уже до полного исследования задачи понял, что положение устроителя неблагоприятно и заподозрил, что игроков каким-то образом обманывают. Так в действительности и было.

634. Mallet ни на кого не сослался и решил эту задачу весьма сложным образом. Он определил шансы того, что число игроков, оставшихся без выигрыша, равно 1, 2, …, n. Затем он вычислил выгоду устроителя в этих случаях, умножая каждый шанс на соответствующую частную выгоду и суммируя полученные произведения.

635. Часть процесса его вычислений сводится к исследованию следующей задачи. Кость с r гранями подбрасывается s раз подряд. Требуется определить шанс того, что появятся все грани. Число соответствующих случаев равно

$$r^s - r(r-1)^s + C_r^2(r-2)^s - C_r^3(r-3)^s + ...$$

и искомый шанс равен частному от деления этого числа на r^s. Это – задача Муавра (1718/1756, Задача 39)[46] (§ 448), которую впоследствии исследовали Лаплас и Эйлер, см. § 448.

Mallet мог бы избавить и себя, и своих читателей от громадного труда, переняв формулу и доказательство от Муавра. Но он поступил иначе, и мы опишем его метод следующим образом. Число случаев, при котором может произойти желаемое событие, равно произведению $r!$ на сумму всех однородных произведений степени $(s - r)$ из чисел 1, 2, …, r. Он не доказывает этого утверждения, а проверяет его в одном очень простом случае и (на с. 144) безосновательно утверждает, что остальные случаи можно исследовать тем же методом.

Затем он преобразует полученный результат и выводит ту самую формулу, которую мы переписали из *Учения* Муавра. Он не обосновывает свой результат в общем виде, а ограничивается несколькими простыми случаями.

636. Упомянутое преобразование требует некоторой алгебраической работы, которую мы воспроизведём, поскольку Mallet этого не сделал. Пусть дано r величин $a, b, …, k$. Разделим x^p на $(x - a)(x - b) … (x - k)$ и обозначим частное через

$$x^{p-r} + H_1x^{p-r-1} + H_2x^{p-r-2} + … \text{ до бесконечности.} \qquad (1)$$

Здесь H_r – сумма всех однородных произведений степени r, которую можно образовать из заданных величин. Это легко показать, разделив x^p на $(x - a)$, затем разделив частное на $(x - b)$, т. е. умножая его на $x^{-1}[1 - (b/x)]^{-1}$, и т. д. И если $p \geq r$, выражение

$$\frac{x^p}{(x-a)(x-b)...(x-k)}$$

будет состоять из целой части и дроби, в противном же случае только из дроби.

В обоих случаях дробная часть окажется равной

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + ... + \frac{K}{x-k}, \qquad (2)$$

$$A = \frac{a^p}{(a-b)(a-c)...(a-k)}.$$

Аналогичные выражения будут иметь место для *B, C, …, K*.

Разложим теперь каждую дробь в сумме (2) по отрицательным степеням x и приравняем коэффициент при x^{-t-1} коэффициенту в (1):

$$Aa^t + Bb^t + Cc^t + \ldots + Kk^t = H_{p-r+s+1}.$$

Пусть $p - r + t + 1 = m$, тогда $p + t = m + r - 1$ и мы можем выразить полученный результат таким образом: сумма однородных произведений степени m, которые могут быть образованы из r величин *a, b, …, k,* равна

$$\frac{a^{m+r-1}}{(a-b)(a-c)...(a-k)} + \frac{b^{m+r-1}}{(b-a)(b-c)...(b-k)} + \ldots$$

Вот общая теорема, которую Mallet привёл, но обосновал лишь в нескольких простых случаях. Приняв 1, 2, …, r соответственно вместо *a, b, …, k*, мы получим теорему для перехода от формулы Mallet к формуле Муавра. Именно, сумма однородных произведений степени $(s - r)$, которую можно образовать из указанных чисел, равна [сумме § 635].

При $s = r + 1$ мы выведем известный результат:

$$1 + 2 + ... + r = \frac{1}{r!}[r^{r+1} - r(r-1)^{r+1} + C_r^2(r-2)^{r+1} - C_r^3(r-3)^{r+1} + ...].$$

637. Заканчивая своё трудоёмкое исследование, Mallet весьма разумно заключает:

Ясно, что тот, кто участвует в этой лотерее, не дал себе труда проделать все предыдущие вычисления.

638. Результат Mallet совпадает с тем, который привёл Монмор. Поскольку он очень прост, напрашивается мысль, что он может быть и найден более просто. И действительно, Mallet предложил иное решение, в котором он, подобно Монмору, непосредственно исследовал не выгоду учредителя, а ожидание каждого игрока. Но даже это решение более трудоёмко, чем у Монмора, потому что Mallet отдельно рассматривал случаи, при которых игрок может выиграть 1, 2, …, n раз, тогда как у Монмора не было подобной необходимости.

639. Mallet решает и следующую задачу: установить шанс того, что при p

бросках n-гранной кости определённая грань появится в точности m раз. Этот шанс равен

$$C_p^m \frac{(n-1)^{p-m}}{n^p}.$$

Эта формула очевидна, ибо шанс появления определённой грани при каждом броске равен $1/n$, а шанс противоположного события, $(n-1)/n$. В соответствии с фундаментальным принципом теории вероятностей шанс её выпадения в точности m раз при p бросках будет равен

$$C_p^m \frac{1}{n^m} \frac{(n-1)^{p-m}}{n^{p-m}}.$$

Число всех возможных случаев равно n^p, и поэтому число благоприятных случаев равно $C_p^m (n-1)^{p-m}$. Монмор (1708/1713, с. 307) уже получил этот результат.

640. В целом можно сказать, что мемуар Mallet показывает его особое трудолюбие и плохое знакомство с предшествующими работами.

641. Первые 48 страниц своей книги Emerson (1776) посвятил законам случая. Очертив эту тему, он пояснил её 34 задачами. Примечательно в этой работе только то, что вместо точного решения он много раз приводит лишь грубое общее рассуждение, полагая, что оно послужит для приближённого решения. Так, на с. 47 он говорит:

Заметно, что, избегая более сложных методов вычисления, я во многих этих задачах ограничился менее определённым методом вычислений и лишь приближаюсь к истине.

См. также его Поучение на с. 21. И таким образом работа Эмерсона весьма опасна для начинающего и совсем бесполезна для продвинутого исследователя. Страницы 49 – 138 он посвятил рентам и страхованию.

642. Теперь нам следует изучить работу знаменитого естествоиспытателя Бюффона, который уже встречался нам в § 354. Его *Опыт* (1777)[47], как указал Gouraud (1848, с. 54), был составлен примерно в 1760 г.

643. В этом *Опыте* 35 параграфов. Бюффон замечает, что существуют два вида истины: геометрические, которые мы постигаем рассуждением, и физические, определяемые по эксперименту. И кроме того есть истины, в которые мы верим в силу свидетельств. Без пояснения он приводит особый принцип, относящийся к физическим истинам. Пусть Солнце всходило n дней подряд, какова вероятность, что оно взойдёт завтра? Бюффон (см. его § 6) утверждает, что она пропорциональна 2^{n-1}, но это совершенно произвольно, см. Laplace (1814/1999, с. 837 правый столбец).

644. Вероятность, составляющую всего 1/10 000, как он полагает, нельзя отличить от равной нулю. Бюффон (§ 8) вывел это заключение, исходя из таблиц [смертности]: указанная дробь представляет шанс человеку 56-ти лет умереть в течение суток. Такой человек, полагает Бюффон, практически сочтёт подобный шанс равным нулю. Принцип равенства нулю очень малого шанса восходит к Даламберу, см. § 472, Бюффон же указал соответствующее значение, 1/10 000.

645. Бюффон (конец § 11) резко возражает против азартных игр:

Мы укажём сильное средство против заразного зла, страсти к игре, и в то же время несколько предохраним против заблуждений в этом опасном занятии.

Он осуждает все игры, и даже такие, условия которых обычно считаются безобидными, а тем более игры, в которых одной стороне обеспечена выгода. Такова, например, игра фараон (§ 12):

Банкомёт – просто ведомый мошенник, а понтёр – простофиля, высмеивать которого не принято.

И вот в конце того же параграфа:

Я говорю, что вообще игра это непродуманное соглашение, это договор, невыгодный обоим, в результате которого потеря неизменно превышает выгоду: она захватывает богатство, чтобы причинить убыток. Доказательство тут настолько же просто, насколько очевидно.

646. Доказательство следует в § 13. Бюффон предполагает, что каждый из одинаково богатых игроков играет на половину своего состояния. Победитель, говорит он, увеличит своё состояние на 1/3, и проигравший потеряет 1/2 того, что имел. Поскольку 1/2 > 1/3, следует больше опасаться проигрыша, чем надеяться на выигрыш.

Представляется, что Бюффон недооценил свой довод. Пусть a – состояние каждого игрока, а ставка равна b. Тогда выигрыш он оценивает дробью $b/(a + b)$, а проигрыш полагает равным b/a, но естественнее считать проигрыш равным $b/(a – b)$ и тем самым увеличить разрыв между грозящей потерей и ожидаемым выигрышем. Можно сказать, что доказательство основано на том принципе, что для данного человека стоимость некоторой суммы денег изменяется обратно пропорционально его состоянию.

647. Бюффон (§§ 15 – 20) подробно останавливается на петербургской игре[48], которую, как он говорит, в 1730 г. впервые предложил ему Крамер в Женеве, см. наш § 389. Он приводит четыре довода, чтобы свести ожидание выигрыша от бесконечности только лишь к пяти экю. Вот эти доводы.

1) Для уплаты выигрыша имеется лишь конечная сумма денег. Если орёл

выпал лишь после 29-го броска, требуемых денег не сможет собрать всё королевство Франции.

2) Стоимость денег относительна; об этом принципе см. конец § 646.

3) В течение человеческой жизни можно будет сыграть лишь некоторое число игр.

4) Каждый шанс, меньший 1/10 000, должен считаться в точности равным нулю. Об этом принципе см. § 644.

По поводу первого довода Бюффон сослался на Фонтена, см. §§ 392 и 393 [Фонтен предложил ограничить игру 20-ю бросками; Тодхантер ссылается на Пуассона (1837, § 73) и Курно (1843, § 61)].

648. В § 18 Бюффон сообщает подробности о своём экспериментальном исследовании петербургской игры. Ребёнок сыграл 2048 игр; общий выигрыш составил 10 057 экю, а именно в 1061 игре – 1 экю, в 494 играх – 2 экю и т. д. Эти и дополнительные результаты см. De Morgan (1847, с. 185; 1856, с. 122).

649. Некоторые нововведения имеются в § 23. Бюффон замечает, что арифметика оставалась единственным средством для оценки вероятностей, но что он желает показать примеры, которые потребуют содействия геометрии. И он приводит некоторые простые примеры и указывает соответствующие результаты.

Пусть обширная плоская поверхность разделена на равные [конгруэнтные] правильные фигуры, – квадраты, равносторонние треугольники, правильные шестиугольники. Круглая монета бросается на них случайным образом, и требуется определить шансы её падения не на шов между фигурами, на один или два шва и т. д. В этих примерах следует лишь подсчитывать площади фигур, и нам нет нужды останавливаться на них. Полученные числовые результаты мы не проверяли. Бюффон (Anonymous 1735) решал подобные задачи много раньше, см. § 354.

650. Затем Бюффон рассматривает более трудный пример, который потребовал применения интегрального исчисления. Обширное плоское пространство покрыто параллельными и равноотстоящими друг от друга прямыми. На них бросается тонкий стержень, и требуется определить вероятность того, что он пересечёт прямую. Бюффон правильно решил эту задачу и перешёл к другой, которая, как он говорит, может показаться труднее.

Он определяет ту же вероятность для случая взаимно перпендикулярных прямых, но приводит лишь результат, притом ошибочный. Без ссылки на Бюффона эту задачу рассматривал Лаплас (1812/1886, с. 366 – 369). В ней приходится учитывать вероятность центру стержня оказаться в любой точке внутри одной из фигур, а самому стержню принять все возможные положения при повороте около своего центра. Достаточно исследовать одну фигуру. И Бюффон, и Лаплас рассматривали эти две части задачи, начиная с более сложной из них, мы же поступим наоборот.

Пусть a и b – расстояния между прямыми в их обеих системах, $2r$ – длина стержня, причём $2r < a$, $2r < b$. Пусть θ – наклон стержня к линии первой системы; или, точнее, пусть этот наклон окажется в пределах θ и $\theta + d\theta$. Тогда, чтобы стержень мог пересечь прямую, его центр должен будет находиться внутри пространства

$$ab - (a - 2r\cos\theta)(b - 2r\sin\theta) = 2r(a\sin\theta + b\cos\theta) - 4r^2\sin\theta\cos\theta.$$

Полная вероятность этого события поэтому равна

$$\int_0^{\pi/2} [2r(a\sin\theta + b\cos\theta) - 4r^2\sin\theta\cos\theta]d\theta \div \int_0^{\pi/2} ab d\theta.$$

Результат оказывается равным $[4r(a+b) - 4r^2]/\pi ab$ или, при $a = b$, $[8ar - 4r^2]/\pi a^2$, или, в наших обозначениях, $2(a - r)r/\pi a^2$. Для перехода к одной системе параллельных прямых можно предположить, что b бесконечно, и тогда вероятность будет равна $4r/\pi a$.

651. Наш метод решения можно легко применить к случаю $a \le 2r < b$, чего ни Бюффон, ни Лаплас не замечают. Пусть $b < a$. Сначала предположим, что $b < 2r \le a$ и тогда пределы θ будут не 0 и $\pi/2$, а 0 и $\arcsin b/2r$. Если же $2r > a$, то, пока $\sqrt{4r^2 - a^2} < b$, т. е. пока $2r < \sqrt{a^2 + b^2}$, этими пределами будут $\arccos a/2r$ и $\arcsin a/2r$, что ясно геометрически.

652. Бюффон приводит результат для другой задачи того же вида. Пусть бросается кубик. Требуется определить вероятность того, что он пересечёт прямую. При прежних обозначениях a и b назовём диагональ грани кубика $2r$. Требуемая вероятность равна

$$\int_0^{\pi/4} [ab - (a - 2r\cos\theta)(b - 2r\cos\theta)]d\theta \div \int_0^{\pi/4} ab d\theta =$$

$$\frac{2(a+b)r\sin\pi/4 - r^2[(\pi/2)+1]}{ab\pi/4} = \frac{4(a+b)r\sqrt{2} - r^2(2\pi+4)}{\pi ab}.$$

Ответ Бюффона ошибочен.

653. Остаток *Опыта* Бюффон посвятил темам, не связанным с теорией вероятностей. Так, он рекомендует 12-ричную систему счисления. Другой темой служит единица длины; он рекомендует длину секундного маятника на экваторе. Далее, квадратура круга. Бюффон считает, что доказал её невозможность, однако его рассуждения бесполезны, потому что они равным образом применимы к любой кривой и показывают, что их можно квадрировать, но известно, что это неверно.

654. Кроме этого *Опыта* у нас имеется большое собрание результатов, относящихся к продолжительности человеческой жизни. Вывел он эти заключения из своих ранее опубликованных таблиц и сводятся они к числовому выражению следующей формулы: Шансы человека в возрасте n лет прожить ещё x лет или умереть относятся как $a:b$. Бюффон табулирует полученную формулу для всех целых значений n до 99 и различных значениях x. Затем следуют другие таблицы, в том числе рождений, женитьб и смертей в Париже в 1709 – 1766 гг. и замечания к ним.

655. Некоторые замечания о взглядах Бюффона можно найти у Кондорсе (1785, с. LXXI) и Stewart (1854 – 1858, т. 1, с. 369 и 616).

656. Теперь нам следует обратиться к некоторым исследованиям Н. Фусса (1783 – 1784). Он (1783) исследовал задачу Якоба Бернулли из нашего § 117 [см. Прим. 45] и говорит, что не видел решения своего предшественника, а узнал о нём из мемуара Mallet,см. § 628. Фусс опубликовал своё решение, потому что его результаты отличались от решения Я. Б. (в пересказе Mallet). В 1784 Фусс сообщил, что смог ознакомиться с сочинением Якоба Бернулли и обнаружил, что в его задаче исследуются два случая. Первое решение Фусса соответствовало решению Я. Б. в одном из случаев, теперь же он добавляет решение второго случая, которое [опять же] соответствует решению Якоба Бернулли.

Таким образом, Фусс мог бы и не публиковать ни одного из своих двух работ, будь он с самого начала знаком с сочинением Я. Б. Можно заметить, что Фусс (с. 89) применяет лемму Муавра (1718/1756, с. 39), но не ссылается ни на кого, см. § 149 [в котором приводятся сведения о Монморе и (дополнительно) о Муавре].

Глава 18. Трембли

754. Нам теперь следует рассмотреть ряд мемуаров Trembley. Он родился в Женеве в 1749 г., умер в 1811 г. Свой первый мемуар он опубликовал в 1796 г.

755. Этот мемуар начинается так [следует цитата на латинском языке; упоминаются Лаплас и Лагранж].

756. Цель, указанную в конце этого абзаца, он выполнил впоследствии (1799a), пока же он исследовал 9 задач, в основном имеющихся у Муавра. Трембли часто ссылается на него, и его ссылки показывают, что он, очевидно, имел в виду второе издание *Учения* (1718/1738). Мы, однако, приводим их по третьему изданию 1756 г. И в мемуаре 1796 г., и в последующих сочинениях Трембли старался элементарно исследовать теоремы, ранее доказанные более трудными методами, но мы увидим, что часто он на самом деле не обосновывал получаемые результаты.

757. Первая задача мемуара состояла в определении шанса того, что событие произойдёт *в точности* b раз в a испытаниях, если его шанс появиться в одиночном испытании равнялся p. Применяя современный метод (§ 257) [в котором упомянут Муавр], Трембли получает хорошо известный результат, $C_a^b p^b (1-p)^{a-b}$.

758. Во второй задаче требовалось вычислить шанс того, что событие произойдёт *не менее* b раз. Трембли выписывает и независимо доказывает *обе* формулы [Монмора] § 172. Он говорит, что априорное сравнение формул затруднительно, но мы видели в § 174, что это неверно.

759. Третья задача состояла в приложении второй и разделу ставки между двумя игроками. В следующих двух задачах раздел ставки рассматривался для трёх и четырёх игроков. Полученные результаты совпали с указанными Муавром [в Задаче 6], см. § 267.

760. Следующие три задачи были посвящены продолжительности игры. Трембли начинает с Задачи 65 Муавра, в которой по существу предполагалось, что капитал одного из игроков бесконечен; [об этой задаче] см. §§ 307 и 309. Трембли повторил исследование по второму методу Муавра, но его рассуждения неудовлетворительны. Последовательно отыскав 6 членов ряда, поставленного в скобки, он заявляет, что закономерность уже ясна, и таким образом совсем не касается основного затруднения.

761. Седьмая задача Трембли это Задача 64 Муавра, и он указывает результат, полученный Муавром на с. 307 [о продолжительности игры], см. § 306. Но и здесь, после исследования нескольких членов, основное затруднение не затронуто, и снова указывается, что закономерность ясна. Кроме того [следует латинская фраза], Трембли, видимо, косвенно утверждает, что формулы Лагранжа приведены в другом виде, и, как можно понять, имеет в виду второе, наиболее разработанное решение Лагранжа (§ 583).

В Поучении Трембли добавляет, что на основе этой задачи можно решить Задачу 67 Муавра и приводит ошибочное замечание [которое Тодхантер переписывает на языке оригинала, латинском].

762. Восьмая задача Трембли это вторая из мемуара Лагранжа (§ 580): шансы событий равны p и q, и требуется определить шанс того, что в данном числе испытаний первое из них появится не менее b раз, а второе – не менее c раз[49]. Избегая теорию конечных разностей, Трембли предаёт решение Лагранжа в более элементарном виде.

763. Девятая задача Трембли это последняя задача Лагранжа (§ 587) [фактически задача Даниила Бернулли, см. ниже § 807]. Он удачно решил её.

764. Следующий мемуар Трембли был опубликован в 1799 г.

765. Этот мемуар (1799a) начинается так: [следует цитата на латинском языке, упомянут Лаплас].

766. Вот первая задача. В мешке находится бесконечное число белых и чёрных шариков в неизвестном соотношении. После $p + q$ тиражей было извлечено p белых и q чёрных; каков шанс извлечь m белых шариков и n чёрных после $(m + n)$ новых тиражей? Результат известен:

$$C_{m+n}^{m}\int_0^1 x^{m+p}(1-x)^{n+q}dx \div \int_0^1 x^p(1-x)^q dx =$$
$$C_{m+n}^{m}C_{m+p}^{p}C_{m+n+p+q+1}^{n+q}.$$

Трембли ссылается на мемуар Лапласа (1774b), § 551, см. также § 704 [о той же задаче у Кондорсе], и получает тот же результат при помощи обычной алгебры. Его исследование является лишь приближённым, и при бесконечном числе шариков погрешность результата остаётся неизвестной. Если шарики извлекаются с возвращением, обычная алгебра может привести к точному решению, и мы увидим это при рассмотрении одного из мемуаров Prevost & Lhuilier.

При бесконечном числе шариков их возвращение после каждого извлечения, разумеется, ничего не меняет, и мы косвенно получаем точное элементарное доказательство важного результата, который Трембли установил приближённо.

767. Вот другая задача Трембли. В мешке содержится очень большое число белых и чёрных шариков в неизвестном соотношении. После $p + q$ извлечений появилось p белых шариков и q чёрных, и требуется определить вероятность того, что это соотношение находится в пределах от 0 до назначенной дроби. Эту задачу Трембли рассматривает весьма подробно, полагая и p, и q весьма большими числами, и выводит приближённый результат. Обозначив через $[p/(p + q)] - \theta$ эту дробь, он получает числитель искомой вероятности в виде

$$\frac{[(p/(p+q)-\theta]^{p+1}[(p/(p+q)+\theta]^{q+1}}{(p+q)\theta}\,[1-\frac{pq+(p+q)^2\theta^2}{(p+q)^3\theta^2}].$$

Знаменатель этой вероятности равен $1/C_{p+q+1}^{p}$.

Трембли ссылается на два мемуара Лапласа (1781, с. 270; 1786, с. 445). Но впоследствии Лаплас (1812/1886, с. 385 – 387) не воспроизвёл общей формулы и ограничился случаем $[p/(p + q)] - \theta = 1/2$.

Методы Трембли трудоёмки. Подобно многим другим попыткам придать серьёзным математическим исследованиям более простую форму, они, вероятно, принесут изучающему нашу тему больше беспокойств, чем ему пришлось бы вынести, возьмись он углублять свои математические знания и затем изучать оригинальные методы.

768. При числовых вычислениях, относящихся к мужским и женским рождениям в Vitteaux в Бургундии, Трембли следует за Лапласом. Впервые Лаплас привёл их в (1786, с. 448), и они же вошли в *Аналитическую теорию* (1812/1886, с. 388). В этом населённом пункте за пять лет родилось 212 девочек и 203 мальчика. Странно, что во втором случае Лаплас не привёл более поздних данных; было бы интересно узнать, сохранялась ли там эта аномалия с рождениями.

769. Заметим, что Лаплас исследует задачу о рождениях аналогично извлечениям чёрных и белых шариков из мешка. И он [1786] приходит к следующему результату: если появились 212 чёрных шариков и 203 белых, то шанс того, что в мешке чёрных шариков больше, чем белых, примерно равен 0,67. Но не так уж легко выразить этот результат в терминах рождений. Лаплас заключает, *что разность* (?) *0,670198 окажется вероятностью того, что в Vitteaux возможность женских рождений превышает возможность мужских.* В 1812 г. он говорит, что *бóльшая лёгкость рождения девочки указывается* [там] *наблюдениями с вероятностью 0,67* [(1812/1886, с. 388 – 389)]. Эта фраза, пожалуй, гораздо удачнее приспособлена к выражению соответствующей идеи, чем слова Трембли *вероятность числу девочек превзойти число мальчиков равна 0,67141*.

770. Далее Трембли переходит к такой задаче: из мешка с большим числом белых и чёрных шариков, находящихся там в неизвестном соотношении, извлечено p белых шариков и q чёрных. Требуется определить шанс того, что в $2a$ новых тиражах число белых шариков не превысит числа чёрных. Эта задача приводит к ряду, сумма которого не может быть точно вычислена. Трембли исследует его, но, как кажется, бесполезно, и сам он никак не использует полученных результатов, которые помещены на его с. 103 – 105.

На с. 106 он приводит грубо приближённое значение этой суммы и говорит, что подобный ряд имеется у Лапласа. Это утверждение относится к мемуару Лапласа (1781, с. 280), но слово *подобный* не следует понимать слишком строго, потому что приближённый результат Лапласа не совпадает с данным Трамблеем. Лаплас применяет свой результат к оценке вероятности того, что в течение данного года родится больше мальчиков, чем девочек. В *Аналитической теории* это не повторено, но фактически приводится в ней на с. 397 – 401 первого издания[50], впервые же он указал это раньше (1786, с. 458).

771. Трембли теперь рассматривает другую задачу Лапласа (1774b, с. 633). Два игрока, чьё относительное умение неизвестно, договариваются, что ставка достанется тому, кто первым опередит своего противника на n очков. В какой-то момент игрокам А и В нехватает f и h очков соответственно, но они договариваются прекратить игру. Как им следует разделить ставку?

Пусть умения игроков равны x и $(1 - x)$. Тогда (§ 172) [о результате Монмора] В должен получить долю ставки, равную

$$\varphi(x) = (1-x)^m[1 + m\frac{x}{1-x} + C_m^2\frac{x^2}{(1-x)^2} +$$
$$C_m^3\frac{x^3}{(1-x)^3} + \ldots + C_m^{f-1}\frac{x^{f-1}}{(1-x)^{f-1}}],\ m = f + h - 1.$$

При указанных умениях игроков вероятность выигрышей игроками А и В $(n-f)$ и $(n-h)$ из $(2n-f-h)$ партий равна $x^{n-f}(1-x)^{n-h}$ (числовой коэффициент нам не нужен). Поэтому, если они выиграли упомянутые выше количества партий, то шанс того, что умение игрока А [действительно] равно x, окажется равным

$$x^{n-f}(1-x)^{n-h}dx \div \int_0^1 x^{n-f}(1-x)^{n-h}dx$$

и доля ставки, причитающаяся игроку B, равна

$$\int_0^1 \varphi(x) x^{n-f}(1-x)^{n-h}dx \div \int_0^1 x^{n-f}(1-x)^{n-h}dx.$$

Всё это требует лишь обычной теории Лапласа, но вот метод Трембли. Рассмотрим $\varphi(x)$. Первый сомножитель $(1 - x)^m$, если предполагать, что умение B равно $(1 - x)$, представляет шанс того, что он выиграет m партий . Не зная этого умения заранее, мы должны будем, исходя из того наблюдения, что B выиграл $(n - h)$ партий, а A выиграл $(n - f)$ раз, вместо $(1 - x)^m$ подставить шанс того, что B выиграет m партий сряду. В соответствии с § 766 этот шанс равен

$$\frac{(n+f-1)!(2n-f-h+1)!}{(n-h)!(2n)!} = M.$$

Теперь снова рассмотрим член $mx(1 - x)^{m-1}$ в $\varphi(x)$. Он представляет шанс того, что при том же предположении B выиграет $(m - 1)$ партий из m. Не зная этого умения заранее и исходя из того же предположения, мы должны будем подставить вместо этого члена шанс того, что B выиграет $(m - 1)$ партий из m. В соответствии с § 766 этот шанс равен

$$Mm(n-f+1) \div (n+f-1).$$

Идти дальше не нужно, потому что принцип ясен. Окончательный результат таков: доля ставки, причитающаяся игроку B, равна произведению M на

$$1 + \frac{(f+h-1)(n-f+1)}{n+f-1} + \frac{(f+h-1)(f+h-2)(n-f+1)(n-f+2)}{(n+f-1)(n+f-2)} +$$

$$\ldots + \frac{(f+h-1)\ldots(h+1)(n-f+1)(n-f+2)\ldots(n-1)}{(f-1)!(n+f-1)(n+f-2)\ldots(n+1)}.$$

Описанный процесс – самый интересный в мемуаре Треблея. В 1812 г. Лаплас не воспроизвёл этой задачи.

772. Трембли добавляет несколько замечаний, чтобы показать связь своих методов и методов Лапласа. Они сводятся к примерам приложения интегрального исчисления к суммированию рядов. Так, он приводит результат, который мы запишем в виде

$$\frac{1}{p+1} - q\frac{t}{p+2} + C_q^2\frac{t^2}{p+3} - C_q^3\frac{t^3}{p+4} + \ldots + \frac{(-1)^q t^q}{p+q+1} =$$

$$\int_0^1 x^p(1-tx)^q dx = \frac{1}{t^{p+1}}\int_0^t x^p(1-tx)^q dx.$$

773. Трембли замечает, что задачи в теории вероятностей состоят из двух частей; вначале следует указать формулы, затем отыскать метод приближённого вычисления. Он предлагает привести пример из сочинений Лапласа. Наблюдения указывают, что отношение мужских и женских рождений в Лондоне превышает это отношение в Париже. Вот слова Лапласа (1781, с. 304; 1786, с. 449; 1812, с. 381):

Эта разность, видимо, указывает, что в Лондоне существует бóльшая лёгкость рождения мальчика, и требуется определить, насколько это вероятно.

[Примерно то же см. Лаплас (1812/1886, с. 386).] Трембли комментирует:

Лаплас полагает, что в течение некоторого времени в Париже родилось p мальчиков и q девочек, в Лондоне же r и s соответственно. Требуется определить вероятность того, что в Париже рождение девочки оказывается более лёгким. Она выражается формулой

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx \int_0^x z^r(1-z)^s dz \div \int_0^1 x^p(1-x)^q dx \int_0^1 z^r(1-z)^s dz.$$

Трембли раскладывает $z^r(1-r)^s$ в ряд по степеням z и интегрирует в пределах [0, x], затем раскладывает $x^p(1-x)^q$ в ряд и интегрирует в пределах [0, 1]. Он преобразует результат к более удобному виду, который можно было бы указать сразу, если *не* раскладывать второго произведения. Затем он применяет алгебраическую теорему, чтобы преобразовать результат. Эту теорему Трембли не доказывает в общем виде, а исследует её первые три случая, см. его с. 113.

Мы докажем его окончательный результат иначе. Имеем

$$\int_0^x z^r(1-z)^s dz = x^{r+1}[\frac{1}{r+1} - s\frac{x}{r+2} + C_s^2\frac{x^2}{r+3} - ...].$$

Умножим правую часть на $x^p(1-x)^q$ и проинтегрируем в пределах [0, 1]. При помощи известной формулы мы получим

$$\frac{q!(p+r+1)!}{(p+r+q+2)!}[\frac{1}{r+1} - s\frac{1}{r+2}\frac{p+r+2}{p+r+q+3} +$$

$$C_s^2\frac{1}{r+3}\frac{(p+r+2)(p+r+3)}{(p+r+q+3)(p+r+q+4)} - ...].$$

Таков и есть результат Тремблея, но он получил его более сложным путём. Теперь мы применим перед интегрированием по x следующую теорему:

$$\frac{1}{r+1} - s\frac{x}{r+2} + C_s^2\frac{x^2}{r+3} - C_s^3\frac{x^3}{r+4} + ... =$$
$$(1-x)^s[\frac{1}{r+s+1} + \frac{s}{(r+s+1)(r+s)}\frac{1}{1-x} +$$

$$\frac{s(s-1)}{(r+s+1)(r+s)(r+s-1)}\frac{1}{(1-x)^2} +$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)}{(r+s+1)(r+s)(r+s-1)(r+s-2)}\frac{1}{(1-x)^3} + ...].$$

Тогда при интегрировании по x мы получим

$$\frac{(q+s)!(p+r+1)!}{(p+r+q+s+2)!}[\frac{1}{r+s+1} + \frac{s}{(r+s+1)(r+s)}\frac{p+r+q+s+2}{q+s} +$$

$$\frac{s(s-1)}{(r+s+1)(r+s)(r+s-1)}\frac{(p+r+q+s+2)(p+r+q+s+1)}{(q+s)(q+s-1)} + ...].$$

Именно равенство этих двух результатов окончательного интегрирования Трембли и принимает на основе случаев s = 1, 2 и 3. По поводу упомянутой теоремы заметим, что её можно доказать, исследуя коэффициенты при x^r в обеих частях тождества. Их равенство может быть установлено по теории элементарных дробей.

774. Далее Трембли приближённо суммирует этот ряд. Его метод очень тяжёлый и не заслуживает проверки. В заключение он говорит, что подобный ряд имеется у Лапласа, очевидно имея в виду мемуар (1781, с. 310).

775. Теперь мы рассмотрим мемуар Трембли (1799b). Его задачу[51] мы исследовали в § 448.

776. Трембли сообщает о результатах Муавра, Лапласа и Эйлера:

Анализ Эйлера очень остроумен и достоин этого великого геометра, но он не вполне прямой и, как кажется, не способствует применению общей задачи, являясь лишь её частным случаем. Я решил её прямым путём при помощи учения о комбинациях и придал этому вопросу всю возможную широту.

777. Вопрос о степени общности, которую ей придаёт Трембли, уже обсуждал Муавр (§ 293). Он (Задача 39) начинает с более простого случая, а затем кратко указывает, как решать более общий вопрос в Задаче 41. Трембли поступает в обратном порядке, начиная с общего и переходя к более простому случаю.

Получив результаты, он видоизменяет их так, чтобы решить задачу, которую обсуждали Лаплас и Эйлер, и достигает этого весьма кратким рассуждением (§ 453) [в котором рассмотрен метод Муавра].

778. Трембли приводит числовой пример. Пусть лотерея состоит из 90 билетов, 5 из которых извлекаются в каждом тираже. Он получает приближённое значение вероятности того, что все билеты появятся в 100 тиражах, равное 74102. Эйлер (§ 456) получил 7419[52].

779. Мемуар Трембли мало что добавил к указанному ранее. Единственным нововведением является исследование вероятности того, что появятся по меньшей мере (n – 1) или (n – 2) или (n – 3), … граней (?). Результат оказался аналогичным данному Эйлером (§ 458). Методы Трембли также не представляют никакого интереса; их по существу было бы естественно ожидать от читателя Муавра, захоти он обратить порядок рассуждений этого учёного. И Трембли не приводит общих доказательств. Он начинает с простого случая, переходит к несколько более сложному, а когда закономерность, управляющая общим результатом, представляется очевидной, он её указывает, оставляя читателям самим убеждаться, что эта закономерность верна во всех случаях.

780. Трембли замечает проблему суммирования ряда, рассмотренного нами в § 460

$$[\varphi(n,r)]^x - n[\varphi(n-1,r)]^x + C_n^2[\varphi(n-2,r)]^x - ...$$

Он говорит:

Эйлер заметил, что в этом случае ряд, представляющий вероятность, может быть выражен произведениями. Это может быть доказано при помощи интегрального исчисления по следующему очень простому методу.

Но в мемуаре интегральное исчисление не применяется, а доказательство представляется совсем негодным. Результат проверяется при $x = 1, 2, 3$ и 4, после чего он считается вообще верным. Да и сами эти проверки неудовлетворительны. В каждом случае r принимается равным 1, 2, 3, 4, а появляющаяся закономерность объявляется всеобщей.

Трембли пытается также доказать, что при $n > rx$ сумма ряда равна нулю, но доказательство носит тот же неудовлетворительный характер, и к тому же имеет дополнительный изъян. Он предполагает, что $n = r(x + 1), r(x + 2), r(x + 3), \ldots$, но ведь кроме того n может принимать любые значения *между* rx и $r(x + 1)$, или *между* $r(x + 1)$ и $r(x + 2)$ … И таким образом Трембли весьма скверно исследовал возможные случаи.

781. Из своего результата Трембли выводит формулу, пригодную для приближённых численных вычислений при больших n и x и малом r. Его формула, как он сам заметил, соответствует данной Лапласом (1786). Трембли получил её повторным применением приближения, которое он установил при помощи обычного алгебраического разложения

$$(1-\frac{r}{n})^x = \exp(-\frac{rx}{n})(1-\frac{r^2 x}{2n^2}).$$

В своём примере он следует за Лапласом (§ 455) [в котором лишь указан результат численных вычислений]. Более того, он устанавливает, что после примерно 86 927 тиражей все билеты, *кроме одного*, будут с равной вероятностью извлечены или нет. Почти до окончания своих вычислений он решает ту же задачу для извлечения всех билетов *кроме двух*.

782. Переходим к мемуару Трембли (1799c).

783. Этот мемуар, естественно, тесно связан с исследованием Даниила Бернулли (§ 398)[53], и его цель, можно сказать, двоякая. Во-первых, он принимает предположения Д. Б. и решает задачу обычным алгебраическим методом, без применения интегрального исчисления. Во-вторых, он проверяет, насколько эти предположения подтверждаются фактами. Мемуар интересен и в то время должен был быть важен в практическом отношении.

784. Обозначения m и n остаются такими же, как у Бернулли [ежегодно оспой впервые заболевает один человек из n, и один из m заболевших умирает]. Пусть, кроме того, α_0 – заданное число [ежегодных] рождений и α_1, α_2, … – числа остающихся в живых после своего первого, второго, … года. Трембли устанавливает, что из числа не болевших оспой в начале x-го года жизни остаётся

$$\frac{\alpha_x[1-(1/n)]^x}{1-1/m+(1/m)[1-(1/n)]^x}.$$

Действительно, пусть b_x и b_{x+1} – числа оставшихся в живых и не болевших оспой в начале x-го и $(x + 1)$-го года. Тогда в течение x-го года оспой заболеет b_x/n человек и $b_x(1 - 1/n)$ из не заболевших останутся в живых в начале следующего года, если только никто из них не умрёт от других болезней.

Мы поэтому должны будем определить, сколько же умрёт от этих других болезней. Число всех таких умерших в x-м году из $[a_x - b_x/mn]$ составляет $(a_x - a_{x+1} - b_x/mn)$. Поэтому из $b_x(1 - 1/n)$ умрёт

$$\frac{b_x(1-1/n)}{a_x-b_x/mn}(a_x-a_{x+1}-b_x/mn).$$

Следовательно,

$$b_{x+1}=b_x(1-1/n)-\frac{b_x(1-1/n)}{a_x-b_x/mn}(a_x-a_{x+1}-b_x/mn)=$$
$$\frac{b_xa_{x+1}(1-1/n)}{a_x-b_x/mn}.$$

Таким образом, мы можем установить результат по индукции, поскольку аналогично окажется, что

$$b_1=\frac{a_1(1-1/n)}{1-1/mn} \text{ и } b_x=\frac{a_x(1-1/n)^x}{1-1/m+(1/m)(1-1/n)^x}.$$

785. Этот результат можно представить в виде

$$b_x=\frac{ma_x}{1+(m-1)(1-1/n)^{-x}}.$$

Теперь ничто не мешает нам предположить, что интервалы времени оказываются намного короче года, а тогда n может быть большим числом и почти точно

$$(1 - 1/n)^{-x} = e^{x/n}.$$

Этот результат совпадает с данным Даниилом Бернулли (§ 402) [который составил и решил дифференциальное уравнение, описывающее действие эпидемии оспы], ибо интервалы времени в его теории могут быть намного короче года.

786. До сих пор мы придерживались предположений Д. Б., однако Трембли принимает и более общую гипотезу. Он предполагает, что значения m и n меняются от года к году, так что в x-м году они равны m_x и n_x. Нетрудно повторить исследование по методу Трембли в этом новом варианте; результаты, конечно же, оказываются более сложными.

787. Теперь Трембли сравнивает результаты, полученные при этом более общем предположении с таблицей, составленной для Берлина на 1758 – 1774 гг. Он применяет грубый приближённый метод и заключает, что n почти постоянно для всех возрастов и несколько меньше шести, но что m существенно изменяется. Вначале оно равно 6, к 11-му году жизни возрастает до 120, затем убывает до 60 к 19-му году, снова возрастает до 133 к 25-му году, затем убывает.

Трембли также сравнивает результаты, соответствующие его более общему предположению, с наблюдениями в Гааге. Следует признать, что значения m и n, и особенно m, выведенные из этих наблюдений, сильно отличаются от прежних данных. Но берлинских наблюдений было почти впятеро больше, чем в Гааге, и поэтому они заслуживают больше доверия.

788. Трембли (1807) опубликовал заметку о своём только что рассмотренном мемуаре. Он исправляет несколько опечаток и указывает:

Кроме того, я обязан сообщить, что метод аппроксимирования я применил в виде опыта, ожидая, что более подробные наблюдения дадут нам возможность обработать их более закономерно. Мой прежний метод абсолютно ничего не значит, и я должен извиниться перед общественностью за его публикацию.

Затем он поясняет более точный метод вычислений и добавляет, что обнаружил, что n не остаётся почти постоянным, а изменяется в громадной степени.

789. В мемуаре Трембли (1800), ссылаясь на Лапласа (1776), включает его решение. Вот его задача. Твёрдое тело с n [видимо не n, а p] равными [конгруэнтными] гранями 1, 2, …, p подбрасывается n раз. Требуется определить вероятность того, что грани появятся по порядку 1, 2, …, p. Эта задача почти совпадает с задачей Муавра о серии удач (§ 325)[54]. Вместо уравнения

$$u_{n+1} = u_n + (1 - u_{n-p})ba^p$$

мы теперь имеем

$$u_{n+1} = u_n + (1 - u_{n-p})a^p,\ a = 1/p.$$

Трембли решает эту задачу своим обычным несовершенным методом: он рассматривает случаи p = 2, 3, 4, а затем допускает, что проявленная закономерность имеет место в общем случае.

790. Следующий мемуар Трембли опубликовал в 1803 г.

791. Он ссылается на мемуар Даниила Бернулли по той же теме (§ 412)[55] и получает результаты, соответствующие результатам Д. Б. Но Трембли возражает против некоторых выводов своего предшественника, полученных при помощи исчисления бесконечно малых и представленных лишь в качестве приближённых.

792. Как и обычно, Трембли не доказывает своих формул, а лишь выводит их по индукции, исходя из некоторых простых случаев. Так, ему понадобились три страницы, чтобы получить результат Даниила Бернулли (§ 410). Он исследовал 5 весьма простых случаев, для которых m = 1, 2, …, 5, и выписал общую формулу по аналогии.

793. Вот пример. Пусть n мужчин одновременно женятся на n женщинах. Если m человек из $2n$ умерли, то каков шанс того, что осталось только (n – m) женатых пар? Выбрать m пар из n можно C_n^m различными способами. В каждой из m пар умирает только один человек, что может произойти в 2^m случаях, и поэтому число благоприятных случаев равно $2^m C_n^m$. Но всех случаев окажется C_{2n}^{2n-m} и искомый шанс равен

$$2^m \frac{n!}{(2n)!}\frac{(2n-m)!}{(n-m)!}.$$

Трембли исписал две станицы, но не *доказал* своего результата.

794. Затем Трембли прилагает свою формулу к некоторым задачам вдовьих касс. Он ссылается на Karstens (1784) и упоминает Tetens, но называет Michelsen [1782 – 1784] как автора, заявившего, что вычисления математиков, относящиеся к подобным темам, беспочвенны. Трембли сообщает [или намекает], что собирается продолжить своё исследование в другом мемуаре, который, как я полагаю, так и не появился.

795. Следующий мемуар Трембли (1804a) был посвящён обработке наблюдений.

796. Вот его начало:

Наиболее целесообразный метод выбора среднего из наблюдений был подробно рассмотрен великими геометрами. Этой темой занимались Даниил Бернулли, Ламберт, Лаплас и Лагранж. Последний из них опубликовал превосходный мемуар (1776), в котором применил интегральное исчисление. Моя нынешняя цель, – показать, как можно получить те же результаты простым применением теории комбинаций.

797. Заметим, однако, что Лагранж применял интегральное исчисление лишь в последующей части своего мемуара, которой Трембли не касался, см. §§ 570 – 575. В других частях мемуара Лагранж применяет *дифференциальное* исчисление, хоть этого совсем не требовалось, см. § 564[56].

Представляется, что мемуар Трембли бесполезен. Его метод трудоёмок, неясен и несовершенен, тогда как у Лагранжа всё просто, ясно и убедительно. Трембли начинает с задачи Муавра и цитирует его (§ 149) [см. § 656], однако считает его метод *косвенным* и предлагает свой собственный. Его доказательство занимает 8 страниц, но читатель, отнесись он добросовестно к строгости, вероятно, счёл бы нужным добавить многие подробности.

После такого обсуждения задачи Муавра, Трембли подвергает подобной же обработке задачи Лагранжа, переписывая его формулы со всеми опечатками или ошибками, см. § 567.

798. Последний мемуар Трембли (1804b) посвящён одной игре.

799. Это игра her, послужившая причиной дискуссии между Николаем Бернулли и другими (§ 187), и Трембли ссылается на неё. Он полностью исследовал шанс Павла в каждом возможном случае и более кратко шанс Петра. Вот его вывод[57]:

Вопреки Николаю Бернулли, Монмор и его друзья заключили, что этот случай решить нельзя, потому что […]. *Отсюда только следует, что каждый игрок постоянно находится в неведении относительно манеры игры своего противника* […].

800. Вряд ли было бы верно сказать, что вывод, сделанный Трембли, соответствует мнению Николая Бернулли, к которому тот пришёл вопреки Монмору. Противники Н. Б., кажется, только заявляли, что нельзя указать *единого* правила поведения Павла, а Трембли с этим согласен.

801. Исследуя шанс Петра, Трембли рассматривает его *до того, как Павел решит, менять ли карту или нет*, но для самого Петра это мало что значит. Он хотел бы знать, что делать при определённых условиях, хотел бы знать, оставит ли Павел свою карту или потребует обмена. Таким образом, исследование шанса Петра у Трембли отличается от метода, который мы описали в § 189[58].

802. Трембли попытался решить ту же задачу для трёх игроков, но с его решением никак нельзя согласиться. Пусть играют Павел, Яков и Пётр. Трембли полагает, что шансы Павла и Якова, x и y, находятся в том же соотношении, как если бы они играли вдвоём, и заключает, что $x:y$ = 8496:8079. Но эти числа нам не нужны. Он также считает, что шансы Якова и Петра находятся в том же соотношении. Это не *вполне* точно, потому что, когда Яков оценивает свой шанс относительно Петра, он будет что-то знать о карте Павла, но в случае Павла и Якова Павел ничего не знает о других картах.

Но это не имеет большого значения. Трембли ошибся в своём последующем умозаключении. Он полагает, что $x/(x + y)$ – это шанс того, что Павел выиграет у Якова, а $y/(x + y)$ – шанс того, что Пётр выиграет у Якова, и, наконец, что $xy/(x + y)^2$ – шанс того, что и Павел, и Пётр выиграют у него, так что Яков сразу же выйдет из игры. Это неверно; игра такова, что игроки находятся *почти* в равном положении, и каждый из них может сразу же выйти из игры с одним и тем же шансом, почти равным 1/3. У Трембли же при $x = y$ шанс исключения Якова равен 1/4.

Ошибка Трембли произошла потому, что $x/(x + y)$ и $y/(x + y)$ не представляют *независимых* шансов. Конечно, если карта Павла старше, чем у Якова, этого уже будет достаточно, чтобы Яков предпочёл иметь карту меньшего, а не большего достоинства, чем у Петра. Эта ошибка перечёркивает решение Трембли.

803. В качестве дополнения Трембли приводит утомительное числовое исследование, от которого он вполне мог бы отказаться. Он желает показать, что, если карта у Якова старше, чем у других игроков, шансы их исключения из игры одинаковы. Его возможное рассуждение мог бы легко понять всякий, прочитавший с. 278 и 279 Монмора. Пусть n – достоинство карты Якова.

1) Пусть карты его противников $(n – r)$ и $(n – s)$ или $(n – s)$ и $(n – r)$, так что число благоприятных случаев у них одно и то же.

2) Пётр мог бы также иметь карту n, тогда достоинство карты Павла могло бы быть равно 1, 2, …, $(n – 1)$ и $(n – 1)$ было бы числом благоприятных случаев для Петра.

3) Пётр и Павел могли иметь карты одного и того же достоинства, $(n – r)$. Тогда у Павла было бы $(n – 1)$ благоприятных случаев, и пункты 2 и 3 уравновешивали бы друг друга.

Глава 19. Различные исследования 1780 – 1800 гг.

804. Здесь мы сообщим о различных сочинениях по нашей теме, опубликованных в 1780 – 1800 гг.

805. Мы должны начать с двух мемуаров Prevost (1782, 1783). Автор заявляет, что будет критиковать описание элементарных принципов нашей темы у Якоба Бернулли, Гюйгенса и Муавра. Вряд ли его мемуары значимы или важны, см. § 103.

806. Перейдём к мемуару Борда (1784). Он не связан с вероятностью, но мы останавливаемся на нём потому, что его тему очень подробно рассмотрел Кондорсе, который кроме того сослался на точку зрения Борда (§ 719) [и не согласился с ним].

Борда замечает, что обычный метод выборов подвержен ошибкам. Пусть из 21 избирателей 8 голосуют за A, 7 – за B и 6 – за C; выбран A. Но возможно, что голосовавшие за B и C, хоть и расходятся во мнениях об их достоинствах, согласились бы, что A – худший из кандидатов. В таком случае оказывается, что за A голосовало 8 избирателей, а против – 13, и Борда считает, что A не должен был бы быть избран.

В этом случае, будь кандидатами только A и B или A и C, A проиграл бы, а выигрывает он потому, что ему противостоят двое, притом оба они предпочтительнее. По мнению Борда каждый избиратель в соответствии со своим мнением должен расставить кандидатов по порядку их достоинства. После сбора голосов можно будет тогда приписать каждому из них a очков за последнее место, $a + b$ за предпоследнее место, далее $a + 2b$ и т. д.

Пусть кандидатов трое и один из них – первый в 6 бюллетенях, второй – в 10 и третий – в 5. Тогда его полное достоинство оценивается суммой $6(a + 2b) + 10(a + b) + 5a = 21a + 22b$. Соотношение между a и b не имеет значения, поскольку в подобных суммах коэффициент при a равен числу избирателей.

Кондорсе возражает против метода Борда и приводит следующий пример. Пусть кандидатов трое, A, B и C, а избирателей 81. Пусть, далее, порядки ABC, ACB, CAB, BAC, BCA и CBA указаны в 30, 1, 10, 29, 10 и 1 бюллетене. Тогда по методу Борда избирается B с достоинством $81a + 109b$, тогда как для A и C – $81a + 101b$ и $81a + 33b$. Кондорсе считает, что избран должен быть A, потому что он достойнее B по мнению 30 + 1 + 10 человек, противоположное же мнение имеют 29 + 10 + 1 человек, т. е. A:B = 41:40.

Итак, положим, что избиратель принял порядок ABC, тогда Кондорсе полагает, что он тем самым с равным убеждением высказал три положения: A достойнее B, B достойнее C и A достойнее C, Борда же считал, что избиратель высказал третье положение с удвоенным убеждением. См. Кондорсе (1785, p. CLXXVII) и Лаплас (1812/1886, с. 275 – 278).

К. П., с. 452. Борда был, видимо, первым автором, предложившим что-то, напоминающее теорию пропорционального представительства, и настаивающим на её значимости. [Мы сами добавим: Лаплас рекомендовал характеризовать достоинства кандидатам не так, как Борда (a, $a + b$, $a + 2b$, …), а произвольными числами.]

807. Теперь мы должны описать мемуар Malfatti (1782); его задачу мы рассматривали в § 416 [в § 417; см. Прим. 59]. Он полагает, что её [существующее?] решение ошибочно и что она существенно отличается от задачи о жидкостях, которую Даниил Бернулли указал для прояснения, см. § 420. Сам Мальфатти ограничился случаем двух урн.

По существу он полагает, что задачу следует решать точным сравнением числа возможных случаев, а не при помощи уравнений [Даниила Бернулли, см. § 809] (§ 417), которые лишь вероятно верны. Это, конечно, справедливо, но не обесценивает цели процесса у Д. Б. Вот один случай. Пусть вначале в урне A было 2 белых шарика, а в урне B – 2 чёрных. Требуется установить вероятное [ожидаемое] состояние урны A после x операций [циклических перекладок шариков] по Бернулли[59].

Пусть u_x будет вероятностью того, что в A окажется 2 чёрных шариков, v_x – что окажется 1 белый шарик и 1 чёрный, так что $(1 - u_x - v_x)$ выразит вероятность того, что оба шарика будут белыми.

808. Но вначале мы опишем лемму Мальфатти. Пусть в A находится $(n - p)$ белых и, следовательно (?), p чёрных шариков, и тогда в B окажется $(n - p)$ чёрных и p белых шариков Определим число случаев каждого возможного события после одной перекладки. Всего случаев n^2, потому что и из A, и из B может быть вынут любой шарик. Возможны 3 события: A может содержать $(n - p + 1)$, $(n - p)$ или $(n - p - 1)$ белых шариков. Для осуществления первого события чёрный шарик должен быть извлечён из A, и белый шарик – из B, и число таких случаев равно p^2. Для осуществления второго события из обеих урн должны быть вынуты шарики одного и того же цвета, и число таких случаев равно $2p(n - p)$. Для третьего события белый шарик должен быть извлечён из A и чёрный – из B, и число случаев равно $(n - p)^2$. Очевидно

$$n^2 = p^2 + 2p(n - p) + (n - p)^2,$$

как и должно было быть.

809. Вернёмся к задаче § 807. Нетрудно составить уравнения

$u_{x+1} = v_x/4$, $v_{x+1} = u_x + v_x/2 + 1 - u_x - v_x$.

Интегрируя их и определяя константу по условию $v_1 = 1$, мы получим

$$v_x = \frac{2}{3}[1 - \frac{(-1)^x}{2^x}],\ u_x = \frac{1}{6}[1 + \frac{(-1)^x}{2^{x-1}}].$$

Если вначале в урне А было n белых шариков, то общий результат Бернулли после x испытаний таков: вероятное число белых шариков в А окажется равным

$$\frac{n}{2}[1 - \frac{(n-2)^x}{n^x}].$$

Предполагая бесконечное x, он указывает, что их вероятное число равно $n/2$. Это не противоречит нашему результату, ибо при бесконечном x $v_x = 2/3$, $u_x = 1/6$ и $1 - v_x - u_x = 1/6$, так что нахождение одного белого и одного чёрного шарика в А оказывается вероятнейшим.

810. Возражения автора против результата Д. Б. видимо неосновательны. Бернулли, как мы видели, получает $n/2$ в качестве вероятнейшего числа белых шариков после бесконечного числа операций. Но Мальфатти полагает, что этот результат влечёт за собой обратное утверждение: для того, чтобы в урне вероятно оказалось $n/2$ белых шариков, необходимо бесконечное число испытаний. Но Бернулли этого не утверждал и на это не намекал, так что Мальфатти просто критикует своё собственное неверное представление.

811. Сам Мальфатти приводит результат, равносильный нашему значению u_x в § 809, получая его не так, как мы, а по индукции, основанной на рассмотрении последовательных случаев, но не доказывая его в общем виде.

812. Задача, которую он собирался решить, считая, что она аналогична задаче Даниила Бернулли, такова. Пусть r будет нулём или целым числом, не превышающим n. Требуется определить вероятность, что при x операциях [циклических перекладок] в урне А никогда не окажется в точности $(n - r)$ белых шариков. Эту задачу он решает весьма трудным способом, последовательно полагая $r = 2, 3, 4, 5$, выявляя определённые закономерности и считая, что они будут иметь место при $6 \leq r \leq n$. Случаи $r = 0$ и 1 должны быть исследованы особо.

Результаты таким образом не *доказаны*, хоть сомнений в них у читателя, возможно, будет немного. Настойчивость и острота ума, которые должны были потребоваться Мальфатти при отыскании этих закономерностей, сильно восхищают.

813. Мы приведём образец его результатов, но воспользуемся при этом точным методом, а не, подобно ему, индукцией, исходящей от частных случаев. Требуется определить вероятность того, что при x испытаниях число белых шариков в урне никогда не было равным $(n - 2)$.

Пусть $\varphi(x, n)$ – полное число благоприятных случаев в x испытаниях, при которых в урне оказывается n белых шариков, и $\varphi(x, n - 1)$ аналогичная величина для $(n - 1)$ шариков. Никаких других вариантов благоприятных случаев, при которых число белых шариков не равно $(n - 2)$, не существует. При помощи Леммы § 808 можно сразу же выписать следующие уравнения

$$\varphi(x + 1, n) = \varphi(x, n - 1),$$
$$\varphi(x + 1, n - 1) = n^2\varphi(x, n) + 2(n - 1)\varphi(x, n - 1).$$

Имея в виду первое из них, второе можно перевести в уравнение

$$\varphi(x + 1, n - 1) = n^2\varphi(x - 1, n - 1) + 2(n - 1)\varphi(x, n - 1).$$

Обозначив $\varphi(x, n - 1)$ через u_x, мы имеем

$$u_{x+1} = n^2u_{x-1} + 2(n - 1)u_x.$$

Это означает, что $u_x = A\alpha^x + B\beta^x$, где α и β – корни уравнения

$$z^2 - 2(n - 1)z - n^2 = 0.$$

Из первого выписанного уравнения следует, что $\varphi(x + 1, n)$ имеет ту же форму, что и $\varphi(x, n - 1)$, так что окончательно

$$\varphi(x, n) + \varphi(x, n - 1) = a\alpha^x + b\beta^x,$$

где a и b константы. Искомая вероятность определяется делением этого выражения на количество случаев, т. е. на n^{2x}, и мы получаем $(a\alpha^x + b\beta^x)/n^{2x}$.

Константы a и b следует определять из особого исследования первой и второй операции. После первой в урне А должно будет находиться $(n - 1)$ белых шариков и 1 чёрный. Все случаи благоприятны, так что

$a\alpha + b\beta = n^2$ и $a\alpha^2 + b\beta^2 = n^2[1 + 2(n - 1)]$,

ибо вторая операция должна дать n, $(n - 1)$ или $(n - 2)$ белых шарика в А, причём первые два случаи благоприятны. Таким образом определяются a и b, и задача полностью решена.

814. Кратко укажем, как аналогично решить, что $(n - 3)$ белых шариков никогда не появятся в А. Пусть $\varphi(x, n)$, $\varphi(x, n - 1)$ и $\varphi(x, n - 2)$ представляют количества благоприятных случаев при x испытаниях для числа белых шариков в урне быть в конце концов равным соответственно n, $(n- 1)$ и $(n - 2)$. Мы получим следующие уравнения

$$\varphi(x + 1, n) = \varphi(x, n - 1)$$
$$\varphi(x + 1, n - 1) = n^2\varphi(x, n) + 2(n - 1)\varphi(x, n - 1) + 4\varphi(x, n - 2)$$
$$\varphi(x + 1, n - 2) = (n - 1)^2\varphi(x, n - 1) + 4(n - 2)\varphi(x, n - 2)$$

Обозначим $\varphi(x, n - 2) = u_x$. При помощи исключений мы получим уравнение

$$u_{x+3} - (6n - 10)u_{x+2} + (3n^2 - 16n + 12)u_{x+1} + 4n^2(n - 2)u_x = 0.$$

Теперь видно, что $\varphi(x, n - 1)$ и $\varphi(x, n)$ имеют тот же вид, что и $\varphi(x, n - 2)$, и полное число благоприятных случаев будет равно $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$, где a, b, c – произвольные постоянные, а α, β и γ – корни уравнения

$$z^3 - (6n - 10)z^2 + (3n^2 - 16n + 12)z + 4n^2(n - 2) = 0.$$

815. Bicquilley (1783) опубликовал сочинение по нашей теме. Оно содержит Предисловие на трёх страницах, королевскую привилегию[60], оглавление и 164 страницы текста с рисунками на отдельной странице. Каталоги книгопродавцев упоминают второе издание 1805 г., которого я не видел.

816. Цель автора указана в Предисловии:

Представляется, что теория вероятностей, намеченная знаменитыми геометрами, может быть углублена и станет составной частью элементарного обучения. Полагаю, что будет вполне уместно предложить общественности трактат, который сможет обогатить эту интересную тему новыми истинами и сделать её доступной более широкому кругу читателей.

Выбор материала, пожалуй, не совсем соответствует элементарному сочинению.

817. Страницы 1 – 15 содержат определения и основные принципы.

Далее, на с. 15 – 25 описаны фигурные числа; на с. 26 – 39 читатель найдёт различные теоремы, которые в настоящее время следует называть примерами на теорию комбинаций. На с. 40 – 80 размещены различные теоремы, сводящиеся почти только к простому обобщению фундаментальной теоремы (§ 281)[61] при $p = 0$.

818. Можно сказать, что на с. 81 – 110 указана следующая теорема и её следствия. Если шанс события в единичном испытании равен p, то шанс его появления m раз в $(m + n)$ испытаниях равен $C_{m+n}^{m} p^{m}(1-p)^{n}$.

Заметим интересную задачу. Пусть при каждом испытании должно произойти либо только событие P, либо только Q, либо оба совместно, либо ни одно из них, и пусть соответствующие шансы равны p, q, t и $(1 - p - q - t) = u$. Могут быть предложены различные вопросы; автор исследует шанс того, что при μ испытаниях P и Q произойдут в точности m и n раз.

1) Пусть P и Q не произойдут совместно ни разу. Тогда P произойдет m раз, Q – n раз и $(\mu - m - n)$ раз не произойдет ни P, ни Q. Соответствующий шанс будет равен

$$\frac{\mu!}{m!n!(\mu-m-n)!}p^{m}q^{n}u^{\mu-m-n}.$$

2) Пусть P и Q произойдут совместно один раз. Тогда P произойдёт $(m - 1)$ раз, Q – $(n – 1)$ раз и $(\mu - m - n + 1)$ раз не произойдёт ни одно из этих событий. Соответствующий шанс равен

$$\frac{\mu!}{(m-1)!(n-1)!(\mu-m-n+1)!}p^{m-1}q^{n-1}tu^{\mu-m-n+1}.$$

3) Пусть P и Q произойдут совместно два раза. Соответствующий шанс равен

$$\frac{\mu!}{2!(m-2)!(n-2)!(\mu-m-n+2)!}p^{m-2}q^{n-2}t^{2}u^{\mu-m-n+2}$$

и т. д.

819. Вот возможный пример такого же вида. Определить шанс того, что в μ испытаниях и P, и Q произойдут не менее, чем один раз. Этот шанс равен

$$1 - (1 - p - t)^{\mu} - (1 - q - t)^{\mu} + (1 - p - q - t)^{\mu}.$$

См. также Todhunter (1863, гл. 56).

820. На с. 111 – 133 мы находим решение некоторых примеров. Два из них автор перенял у Бюффона (§ 649 и начало § 650). Приведём пример самого автора. Пусть p и q обозначают шансы появления и непоявления события в единичном испытании. Игрок ставит a против b за то, что это событие произойдёт, в противном же случае он далее поставит ra против rb [$r > 1$], затем r^2a против r^2b и т. д. Требуется определить выгоду или ущерб игрока, если он будет поступать так в серии из n испытаний.

Его ущерб равен

$$(qa - pb)(1 + qr + q^2r^2 + \ldots + q^{n-1}r^{n-1}).$$

Это легко показать, ибо $(qa - pb)$ очевидно является ущербом при первом испытании. Далее, существует шанс q того, что событие не произойдёт, и тогда при втором испытании ущерб игрока будет равен $(qar - pbr)$. Аналогично, ущерб в третьем испытании окажется равным $(qar^2 - pbr^2)$ и т. д. Если $qa > pb$, то ущерб действительно будет иметь место и возрастать с числом испытаний.

Автор рассматривает частный случай этой задачи при $a = 1$ и $r = (b + 1)/b$ и его решение сложнее нашего. Цель примера состояла в том, чтобы показать игрокам, что при действительно неблагоприятных шансах пари они лишь потеряют ещё больше, если при неизменном соотношении ставок станут увеличивать свою ставку.

821. На с. 134 – 149 оценивается вероятность, определяемая по наблюдениям. Если событие произошло m раз и не произошло n раз, то его шанс в единичном испытании равен, как заявляет автор, $m/(m + n)$ [62].

822. На с. 150 – 164 оценивается вероятность, определяемая по свидетельству. Автор принял метод, который мы описали в § 91. И вот ещё одна из его особенностей. Пусть по нашему собственному опыту, не зависящему от свидетельства, мы назначаем событию вероятность P. Свидетель, чья вероятность [безошибочности] равна p, даёт свои показания по этому поводу. В этом случае автор принимает $P + (1 - p)Pp$ за окончательную вероятность, а не $P + (1 - p)p$, как мы могли бы ожидать от него. Он заявляет, что доверие к свидетелю пропорционально нашей собственной предварительной оценке вероятности события.

823. Теперь мы опишем относящееся к нашей теме содержание *Encyclopédie méthodique*. Три тома её математической части были опубликованы в 1784, 1785 и 1789 гг.

[*Безвестно*] *отсутствующий*. Эту статью частично написал Кондорсе. Он применяет теорию вероятностей для определения момента, когда отсутствие оказывается достаточно длительным, чтобы оправдать раздел его имущества между его наследниками и определить долю притязающих.

Страхование. Статья не содержит ничего примечательного.

Вероятность. Эта статья взята из первоначальной *Энциклопедии* (см. § 467) [в котором описаны статьи Даламбера из этого источника]. За ней следует статья с тем же названием, целью которой было сообщение общих принципов этого понятия. Подписи Кондорсе нет, но из последнего предложения видно, что автором был он. Статью можно описать как очерк сочинений самого Кондорсе, но ввиду её краткости она намного менее понятна, чем даже те сочинения.

Замена. Кондорсе заявляет, что государство имеет право изменять законы наследования имущества, однако при этом права, существовавшие при прежних законах, должны быть оценены и возмещены. Кондорсе взялся оценить размер возмещения. Формулы, однако, напечатаны в таком нелепом и отталкивающем виде, что было бы очень трудно установить, верны ли они, а попытка исследовать их оказалась бы пустой затратой времени и труда.

824. Есть в указанной энциклопедии несколько угроз, которые так и не были осуществлены. Так, статья *Страхование* ссылается на *События* и *Общество*, а статья *Вероятность* – на *Истину* и *Избиратели*. Но каждый, знакомый с сочинениями Кондорсе, сочтёт удачным, что ни одной из этих статей найти нельзя.

825. Единственная важная статья по нашей теме называется *Среднее*. Её автор Иоганн III, видимо тот самый, которого мы упоминали в §§ 598 и 624. В статье сообщается о двух мемуарах, которые, как там [ошибочно] сказано, не были в то время опубликованы[63]. Автор указывает:

Первый мемуар, выдержку из которого я собираюсь привести, это небольшая латинская статья Даниила Бернулли. Он прислал мне её в 1769 г. и долгое время [перед тем] *держал её в своих рукописях, вне сомнения для того, чтобы усовершенствовать её. Её название* […].

Это название сохранилось в опубликованном мемуаре (1778), но данная статья сообщает о мемуаре, содержание которого с ним не совпадает, и мы заключаем, что Д. Б. видоизменил текст.

Вот метод, указанный в статье. Числовые результаты несогласных наблюдений откладываются как абсциссы от закреплённой точки, а вероятности наблюдений восставляются как соответствующие ординаты. Через концы ординат проводится кривая, и в качестве верного значения искомого элемента принимается абсцисса центра тяжести площади кривой.

Вероятности должны быть представлены ординатами некоторого полуэллипса или полуокружности. В статье, однако, указано, что аналитически определять центр полуокружности почти невозможно, поскольку вряд ли удастся решить появляющееся при этом уравнение. По этой причине предложен метод аппроксимирования. Начинать следует с точки, соответствующей среднему из всех наблюдений, затем определять центр тяжести площади, соответствующей наблюдениям. Полученную точку принимают за новый центр полуокружности, далее вычисления повторяются, пока получаемый центр тяжести не будет соответствовать центру полуокружности. Радиус полуокружности вычислитель должен принять произвольно. Это остроумно, но, конечно же, нет оснований считать, что результат заслуживает особого доверия.

Второй мемуар, упомянутый в статье, был опубликован Лагранжем (1776).

826. Обратимся теперь к частям *Encyclopédie méthodique*, которые относятся к азартным играм. Указанные в § 817 три тома содержат статьи о различных играх; за небольшим исключением в игре Bassette (§ 467) [в котором упомянута энциклопедическая статья Даламбера об этой игре], в них нет математических исследований. Забавно начало статьи Breland:

Игроков может быть сколько угодно, но играть хорошо, т. е. весьма разорительно, можно только втроём или впятером.

Есть, однако, особое сочинение 1792 г. об играх, опубликованное как приложение к тому 3 математической части *Энциклопедии.* Уведомление для читателей начинается в нём так:

Поскольку, как говорит Монтескье, существует бесконечное множество благоразумных вещей, которыми занимаются весьма безрассудно, есть и глупости, совершаемые крайне разумно.

В книге 316 страниц текста и 16 страниц с рисунками. Математических исследований нет, но в трёх случаях указываются количества случаев. Один из них относится к игре *тридцать и сорок*, но результаты, как показал Пуассон (§ 358)[64], неточны. В остальных случаях речь идёт об играх Krabs и Passe-dix.

В экземпляре книги библиотеки Кембриджского университета включено другое сочинение об играх (*Dictionnaire* An VII), которого нет в других просмотренных мной экземплярах. В Уведомлении для читателей там сказано, что после публикации 1792 г. многие подписчики пожелали её расширения.

Этот *Словарь* состоит из двух частей; первая называется *Dictionnaire des jeux mathématiques* (212 с.), вторая, *Dictionnaire des jeux familiers*, на 80 страницах, доведена лишь до *Grammairien*. Первая часть не содержит ничего ни нового, ни важного о вычислении шансов. Приведенные исследования в основном взяты у Монмора [1708], иногда со ссылками, но чаще без них. В статье *Игрок* указаны некоторые авторы, опубликовавшие сочинения на указанную тему, причём Монмор удостоился лишь очень слабой похвалы, хоть Словарь основан на его книге:

Многие авторы исследовали игры; есть элементарный трактат Гюйгенса, более основательный Муавра и весьма глубокие отрывки Бернулли. Есть и не лишённый заслуг анализ азартных игр Монмора.

Шашкам посвящено 16 страниц, *Шахматам*, 73. В *Картах* включена задача, которую мы описали в § 533 [см. Прим. 57], но ошибочная часть исключена. *Вист* описан на восьми страницах, и вот начало описания:

Карточная игра между случайностью и наукой. Её изобрели англичане, и в Великобритании она издавна оставалась модной. Из всех карточных игр она самая разумная по своим принципам, самая подходящая для общества, самая трудная, самая интересная, самая остроумная, притом требующая наибольшего искусства.

По поводу некоторых вычислений, относящихся к висту, статья ссылается на Муавра и на сочинение Hoyle [1754?], которое, как сказано, было в 1770 г. переведено на французский язык.

Относительно второй части нам достаточно сказать, что она описывает самые пустяковые игры для детских забав.

827. Теперь мы опишем мемуар D'Anieres (1786). Он не является математическим, и в нём указано, что азартные игры запрещаются правительствами. Но автор разделяет их на разорительные и такие, потери в которых никак не могут оказаться ощутимыми. Тот же автор опубликовал другой мемуар (1788) в качестве дополнения к первому, также никак не относящийся к математической теории вероятностей.

828. Теперь нам следует заметить любопытный и очень редкий памфлет Waring (1792). Текст состоит из 59 страниц и страницы с исправлением нескольких опечаток. Администрации Куинс-Колледж в Кембридже я благодарен за предоставление его экземпляра.

829. Автор и наборщик, видимо, довольно успешно объединили свои усилия, чтобы книжка оказалась как можно более неясной и отталкивающей. Её название в особой мере неточно: нелепо заявлять о переводе алгебраической величины в вероятное соотношение или ренты. В действительности Уоринг имел в виду, что алгебраические тождества можно преобразовать так, чтобы получить предложения теории вероятностей или рент.

830. Уоринг начинает с леммы. Он желает найти сумму бесконечного ряда

$$1 + 2^{z-1}r + 3^{z-1}r^2 + 4^{z-1}r^3 + \dots$$

Она равна

$$\frac{A+Br+Cr^2+Dr^3+...+r^{z-2}}{(1-r)^z}.$$

Коэффициенты *A, B, C*, … не зависят от *r,* и их следует определять умножением и приравниванием коэффициентов:

$A = 1$, $B = 2^{z-1} - z$, $C = 3^{z-1} - z2^{z-1} + z(z-1)/2$,

$$D = 4^{z-1} - z3^{z-1} + \frac{z(z-1)}{2}2^{z-1} - \frac{z(z-1)(z-2)}{2\cdot 3}.$$

Мы теперь увидим, что в числителе дроби, которая представляет сумму, последний член равен r^{z-2}, что более высокой степени *r* нет и что коэффициент этой степени равен 1. По поводу доказательства Уоринг ссылается на другую свою работу, но читатель заметит, что его можно получить при помощи элементарной теоремы о конечных разностях относительно $\Delta^n x^m$ при $n \geq m$. Лемму Уоринг применяет только когда доходит до рент (с. 27 – 59).

831. Далее Уоринг переходит к своим предложениям в теории вероятностей, и одного примера будет достаточно, чтобы указать его метод. Тождественно

$$\frac{a}{N}\frac{N-a}{N} = \frac{a}{N} - \frac{a^2}{N^2}.$$

Пусть a/N представляет шанс появления определённого события в единичном испытании, а потому $(N - a)/N$ – шанс его непоявления. Тождество таким образом показывает, что шанс наступления события только в первом из двух испытаний равен разности между шансами его однократного появления и наступления оба раза.

832. До с. 19 о теории вероятностей в работе нет ничего существенного, а на этой странице Уоринг говорит:

Пусть шансы появления событий *A* и *B* будут равны $a/(a + b)$ и $b/(a + b)$. Тогда шансы того, что в *r*, $(r + 2)$ и $(r + 4)$ испытаниях событие *A* наступит в *r* раз чаще, чем *B*, будут равны

$$\frac{a^r}{(a+b)^r},\ \frac{a^r}{(a+b)^r}[1+r\frac{ab}{(a+b)^2}],$$

$$\frac{a^r}{(a+b)^r}[1+r\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{r(r+3)}{2}\frac{a^2b^2}{(a+b)^4}]$$

и вообще

$$\frac{a^r}{(a+b)^r}[1+r\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{r(r+3)}{2}\frac{a^2b^2}{(a+b)^4}+$$

$$\frac{r(r+4)(r+5)}{3!}\frac{a^3b^3}{(a+b)^6}+\ldots+$$

$$\frac{r(r+l+1)(r+l+2)\ldots(r+2l-1)}{l!}\frac{a^lb^l}{(a+b)^{2l}}+\ldots].$$

Это можно вывести из следующей арифметической теоремы:

$$\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(2m-s)}{(s+1)!}+$$

$$r\frac{(2m-2)(2m-3)\ldots(2m-s-1)}{s!}+$$

$$\frac{r(r+3)}{2}\frac{(2m-4)(2m-5)\ldots(2m-s-2)}{(s-1)!}+$$

$$\frac{r(r+4)(r+5)}{3!}\frac{(2m-6)\ldots(2m-s-3)}{(s-2)!}+\ldots$$

$$+\frac{r(r+s+2)(r+s+3)\ldots(r+2s+1)}{(s+1)!}=$$

$$\frac{(r+2m)(r+2m-1)\ldots(r+2m-s)}{(s+1)!}.$$

Слова Уоринга *в r раз чаще* вряд ли достаточны для того, чтобы пояснить его смысл. Из приведенной формулы видно, что в действительности он имеет в виду задачу о продолжительности игры при капитале *B*, равном *r* и неограниченном капитале *A*, см. § 309.

Уоринг ничего не говорит о доказательстве своей *арифметической теоремы*. Её можно обосновать следующим образом. Начнём с формулы § 584

$$p - \alpha\beta + q\beta^2 = 0.$$

Пусть $\alpha = 1 + z$, $p = 1$ и $q = z$, тогда $\beta = [1 + z - (1 - z)]/2z = 1$,

$$1 = \frac{1}{(1+z)^t} + t\frac{z}{(1+z)^{t+2}} + \frac{t(t+3)}{2}\frac{z^2}{(1+z)^{t+4}} +$$

$$\frac{t(t+4)(t+5)}{3!}\frac{z^3}{(1+z)^{t+6}} + \frac{t(t+5)(t+6)(t+7)}{4!}\frac{z^4}{(1+z)^{t+8}} + \ldots$$

Умножим обе части на $(1 + z)^{2n+t}$:

$$(1+z)^{2n+t} = (1+z)^{2n} + tz(1+z)^{2n-2} +$$

$$\frac{t(t+3)}{2}z^2(1+z)^{2n-4} + \frac{t(t+4)(t+5)}{3!}z^3(1+z)^{2n-6} + \ldots$$

Разложим различные степени бинома $(1 + z)$ и, приравняв коэффициенты при z^s, получим эту теорему с *t* вместо *r*, но неясно, как Уоринг собирался вывести теорему о продолжительности игры из указанной теоремы. При $z = b/a$ мы получим

$$(a+b)^{2n+t} = a^t(a+b)^{2n} + ta^t(a+b)^{2n-2}ab +$$

$$\frac{t(t+3)}{2}a^t(a+b)^{2n-4}a^2b^2 + \frac{t(t+4)(t+5)}{3!}a^t(a+b)^{2n-6}a^3b^3 + \ldots$$

Уоринг возможно полагал, что требуемую теорему можно вывести из этого результата, но представляется, что этот процесс трудно провести вполне строго.

833. Вот ещё задача Уоринга о продолжительности игры(с. 20).

Если требуется определить шансы того, что A будет выигрывать в точности в n раз чаще, чем В в $(n + 1)$, $(2n + 2)$ и $(3n + 3)$ партиях, то они будут равны соответственно

$$(n+1)\frac{a^n b}{(a+b)^{n+1}} = P,\ P + n(n+1)\frac{a^{2n}b^2}{(a+b)^{2n+2}} = Q,$$

$$Q + \frac{n(n+1)(3n+1)}{2}\frac{a^{3n}b^3}{(a+b)^{3n+3}}.$$

Он не приводит исследования. Как и обычно, до собственной проверки мы не вполне представляем себе смысл его задачи. Первый из его случаев очевиден. Во втором исследуемое событие может произойти в первой половине игр с шансом P или же наступить только в их второй половине. Вот возможные варианты: В выигрывает дважды либо в первой, либо во второй половине игр, в остальных же играх выигрывает А. Тогда к P следует добавить [второй член в выражении для Q].

В третьем случае исследуемое событие может произойти в первых $(2n + 2)$ испытаниях с шансом Q или только в следующих $(n + 1)$ испытаниях. Этот вариант может произойти либо если В произойдёт трижды в любой трети испытаний, а А – во всех остальных испытаниях, или же В произойдёт дважды в первой трети и один раз во второй трети или один раз во второй трети и дважды в третьей, а А – в остальных испытаниях. Тогда к Q следует добавить [второй член в последнем приведенном выражении].

834. Вот пример несовершенного пояснения у Уоринга (с. 21):

Пусть *a, b, c, d*, и т. д. – соответствующие шансы наступления α, β, γ, δ, и т. д. в единичном испытании и

$$(ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \ldots)^n = a^n x^\alpha + \ldots + Nx^\pi + \ldots$$

Тогда N окажется шансом наступления π в n испытаниях.

О π ничего не сказано. Читатель увидит, что единственное объяснение таково: N – шанс того, что в n испытаниях сумма $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$ равна π.

835. На с. 22 Уоринг приводит равенство, которое мы сейчас иногда называем [биномиальной] теоремой Вандермонда:

$$(a + b)(a + b - 1) \ldots (a + b - n + 1) = a(a - 1) \ldots (a - n + 1) +$$

$$na(a-1)\ \dots\ (a-n+2)b + C_n^2\, a(a-1)\ \dots\ (a-n+3)b(b-1) +$$
$$C_n^3\, a(a-1) - (a-n+4)b(b-1)(b-2) + \dots +$$
$$b(b-1)\ \dots\ (b-n+1).$$

Её следствие, которое выводит Уоринг, мы приводим в наших собственных обозначениях. Пусть $\varphi(x, y)$ – сумма возможных произведений C_x^y. Тогда

$$C_s^r\varphi(n-1, n-s) = C_n^r\varphi(n-r-1, n-s) +$$
$$C_n^{r+1}\varphi(n-r-2, n-s-1)\varphi(r,1) + C_n^{r+2}\varphi(n-r-3, n-s-2)\varphi(r+1, 2) +$$
$$C_n^{r+3}\varphi(n-r-4, n-s-3)\varphi(r+2, 3) + \dots$$

Здесь $r < s < n$ и члены в правой части продолжаются до $\varphi(x, 0)$, которое следует заменить на 1.

Этот результат можно получить, приравняв коэффициенты члена $a^{s-r}b^r$ в обеих частях тождества Вандермонда. Он так скверно пояснён и отпечатан в сочинении Уоринга, что было затруднительно понять, каков именно был этот результат и как он был получен.

836. Я опускаю ту часть сочинения Уоринга, которая относится к рентам. Профессор Де Морган сообщил мне, что покойный Френсис Бейли указал в письме [ему?] следующие интересные моменты этого исследования: ряд $S - mS' + C_m^2 S'' - \dots$, задача 3 и замечание в страховом полисе о страховой сумме, выплачиваемой [застрахованному] *немедленно* после смерти.

837. Следует кратко отметить сочинение Уоринга (1794). В нём 240 страниц, 3 страницы дополнений и страница с исправлением опечаток.

838. На с. 35 – 40 находятся несколько известных теорем теории вероятностей. Первые две страницы дополнений кратко указывают задачу, которую обсуждали Муавр и другие о множестве писем, размещённых в конвертах, см. § 281 и Муавр (1718/1756, задача 35). Уоринг замечает, что при бесконечном множестве писем шанс их правильного размещения по конвертам бесконечно мал. Он ссылается на свою с. 49, но представляется, что следовало указать с. 41.

839. Можно привести две выдержки (с. 35 и 115):

Мне известно, что некоторые первоклассные математики пытались вывести степень вероятности того, что событие произойдёт n раз, если оно наступило в m предшествовавших испытаниях, и, следовательно, что это событие вероятно произойдёт, но увы! Эта задача намного *превосходит возможности человеческого понимания. Кто может определить момент, когда Солнце вероятно перестанет пробегать свой нынешний путь*?

Я сам писал о большинстве тем чистой математики и в эти книги включил почти все изобретения современности, с которыми был ознакомлен. В предисловиях я сообщал об истории изобретений различных авторов и соответственно приписывал их и дал определённый отчёт о своих собственных. Ко всем этим наукам (?) *я смог что-то добавить, и в целом, если не ошибаюсь в подсчёте, у меня было от трёх до четырёх сотен новых предложений того или иного вида, т. е. значительно больше, чем у любого другого английского автора, притом не худших по своей новизне и не менее трудных. Хотел бы иметь возможность добавить: не менее полезных. Многое другое можно было бы присоединить, но я ни разу не слышал о каком-либо английском читателе, проживающем вне Кембриджа, который потрудился бы прочесть и понять написанное мной.*

Уоринг утешается честью, оказанной ему Даламбером, Эйлером и Лагранжем. Замечание о нём см. у Stewart (1854 – 1858, т. 4, с. 218).

840. Переходим к мемуару Ancillon (примерно 1796). В нём нет математических исследований, но автор хотел поставить под сомнение возможность построения теории вероятностей. Мемуар почти бесполезен. Автор, кажется, решил, что никакой теории вероятностей нельзя построить, если не обратить внимания на ту теорию, которая уже была предложена. Он ссылается на [философов] Мендельсона и Гарве как на предшественников, которые уже исследовали приемлемость такой (?) теории.

841 – 842. Три мемуара опубликовали Prevost & Lhuillier (1799a, b, c). Первый из них (1799c) был зачитан 12 ноября 1795 г.

843. Он посвящён следующей задаче. Урна содержит m белых и чёрных шариков, количества которых по отдельности неизвестны. Извлечено без возвращения p белых шариков и q чёрных и требуется определить вероятность того, что в следующих $(r + s)$ тиражах окажется r белых шариков и s чёрных.

Возможные гипотезы о первоначальном составе урны: q или $(q + 1)$, …, или $(m – p)$ чёрных шариков. В соответствии с обычными принципами будем подсчитывать эти вероятности. Пусть

$P_n = (m - q - n + 1)(m - q - n)$ …, p сомножителей
$Q_n = (q + n - 1)(q + n - 2)$ …, q сомножителей

Вероятность n–й гипотезы равна $P_nQ_n/\sum$, где $\sum$ – сумма всех произведений вида P_nQ_n. Будь эта гипотеза верна, шанс указанных тиражей был бы равен $R_nS_n/r!s!N$,

$R_n = (m - q - p - n + 1)(m - q - p - n) \ldots$, r сомножителей
$S_n = (n - 1)(n - 2) \ldots$, s сомножителей
$N = C_{m-p-q}^{r+s}$

Таким образом, искомая вероятность равна сумме всех членов вида $P_nQ_nR_nS_n/\sum r!s!N$ и прежде всего следует отыскать $\sum$. Авторы приняли метод индукции, но можно сразу же определить эту величину при помощи биномиальной теоремы (Todhunter 1863, гл. 1)

$$\sum = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}\frac{(m+1)!}{(m-p-q)!}.$$

Далее, P_nR_n отличается от P_n лишь тем, что вместо p в это произведение входит $(p + r)$, а Q_nS_n отличается от Q_n лишь тем, что вместо q в него входит $(q + s)$. Поэтому сумма всех членов вида $P_nQ_nR_nS_n$ равна

$$\frac{(p+r)!(q+s)!}{(p+q+r+s+1)!}\frac{(m+1)!}{(m-p-q-r-s)!},$$

$$N = \frac{(m-p-q)!}{(r+s)!(m-p-q-r-s)!}.$$

Наконец, искомая вероятность равна

$$C_{r+s}^{r}\frac{(p+r)!(q+s)!}{p!q!}\frac{(p+q+1)!}{(p+q+r+s+1)!}.$$

844. Предположим, что r и s переменны при постоянной сумме $(r + s)$. Тогда можно будет приложить полученный результат к $(r + s + 1)$ различным случаям. Именно, первый случай состоит в том, что при всех $(r + s)$ извлечениях появится белый шарик, затем – при всех, кроме одного, кроме двух, …, и, наконец, случай, при котором не окажется ни одного белого шарика. Сумма соответствующих вероятностей должна равняться единице, что является контролем верности результатов.

Такая проверка при помощи теоремы, доказанной по индукции, приводится в мемуаре. Впрочем, новых теорем не требуется, так как достаточно лишь снова применить формулу для $\sum$ из § 843. Переменная часть результата в том параграфе равна $(p + r)!(q + s)!/r!s!$, т. е. произведению двух произведений

$(r + 1)(r + 2) \ldots$, p сомножителей
$(s + 1)(s + 2) \ldots$, q сомножителей

Сумму таких произведений можно отыскать, предполагая $(r + s)$ постоянным, и она равна

$$\frac{p!q!}{(p+q+1)!}\frac{(p+q+r+s+1)!}{(r+s)!}.$$

Требуемый результат, единица, теперь получается при умножении этого выражения на постоянную часть результата § 843. Это заметил Кондорсе (1785, с. 189).

845. Выясним, который из $(r + s + 1)$ случаев, рассмотренных в § 844, наиболее вероятен. Ответ в мемуаре даётся примерно так. Приближаясь к своему максимуму, [переменная] величина изменяется медленно, и нам следует выяснить, при каких условиях это произойдёт с результатом в конце § 843, если r заменить на $(r - 1)$, а s – на $(s + 1)$. Мы получим

$$\frac{p+r}{r} \approx \frac{q+s+1}{s+1} \text{ и поэтому } \frac{p}{r} \approx \frac{q}{s+1}$$

и если r и s большие числа, то $r/s \approx p/q$.

846. Выражение в конце § 843 не зависит от числа m первоначально содержащихся шариков в урне. Авторы заметили это и обратили внимание на то, что при тиражах с возвращением указанное обстоятельство не будет соблюдаться. Они сообщают, что в другом мемуаре исследуют этот случай при бесконечном множестве шариков, но вряд ли они выполнили своё пожелание.

847. Полезно сравнить две задачи, которые могли бы составить суть предложенного мемуара. Пусть извлечено без возврата p белых и q чёрных шариков, а общее число шариков бесконечно. Тогда, в соответствии с [результатами Кондорсе] в § 704, вероятность того, что в следующих $(r + s)$ тиражах окажется r белых и s чёрных шариков, будет равна

$$C_{r+s}^{r}\int_0^1 x^{p+r}(1-x)^{q+s}dx \div \int_0^1 x^p(1-x)^q dx.$$

После интегрирования мы получим тот же результат, что и в § 843, и примечательно, что результаты при двух различных предположениях совпали.

848. Пусть в § 843 $r = 1$ и $s = 0$, затем $r = 2$ и $s = 0$, тогда результаты окажутся такими

$$\frac{p+1}{p+q+2},\ \frac{(p+1)(p+2)}{(p+q+2)(p+q+3)}.$$

Поскольку сомножитель $(p + 1)/(p + q + 2)$, как мы только что видели, есть вероятность извлечь ещё один белый шарик после получения p белых шариков и q чёрных, то сомножитель $(p + 2)/(p + q + 3)$ аналогично выразит вероятность извлечения ещё одного белого шарика после получения $(p + 1)$ белых шариков и q чёрных. Таким образом, эта формула указывает, что вероятность извлечения двух белых шариков подряд равна произведению вероятностей извлечь первый и второй из них, как это и должно было быть. Это свойство имеет место в общем случае.

849. Мемуар, который мы исследовали, впервые обсуждал свою задачу, т. е. безвозвратную выборку. Частный случай этой задачи рассмотрел епископ Terrot (1853).

850. В 1800 г. в том же издании, на с. 152 авторы опубликовали заметку, относящуюся к отрывку из рассмотренного мемуара. Остальные два мемуара, упомянутые в § 841, не столь сильно выражены математически, и поэтому были опубликованы в разделе тома, посвящённом спекулятивной философии.

851. Второй мемуар (1799a) состоит из двух разделов. В первом обсуждается общий принцип оценивания вероятностей причин, и авторы ссылаются на Лапласа (1774b):

Если событие может произойти ввиду n различных причин, то вероятности их существования, определённые по событию, относятся как вероятности события, определённые по этим причинам.

Авторы считают полезным и необходимым доказать этот принцип и соответственно выводят его из простой гипотезы, на которой, как представляется, покоится это утверждение. Критикуются некоторые замечания Кондорсе, и указывается, что наше убеждение в постоянстве законов природы не относится к тому виду, который представлен дробью в [определении вероятности] в теории вероятностей, см. Stewart (1854 – 1858, т. 1, с. 421 и 616).

Второй раздел мемуара прилагает принцип Лапласа к некоторым простым примерам следующего вида. Кость имеет определённое число граней, оцифровка которых нам неизвестна. После $(p + q)$ бросков одно очко выпало p раз и не выпало q раз.

Требуется определить вероятность того, что некоторое количество граней помечено цифрой 1 и что при $(r + s)$ новых бросках единица появится только r раз. Показано, что вторая вероятность равна

$$\frac{\sum m^{p+r}(n-m)^{q+s}}{n^{r+s}\sum m^{p}(n-m)^{q}},$$

где сумма подсчитывается от $m = 1$ до $m = n$, а n – число граней. Таков результат, если единицы и другие исходы появляются в заданном порядке, иначе же указанное выражение следует умножить на C_{r+s}^{r}.

В мемуаре без доказательства указан приближённый результат при очень большом n, а именно, если порядок исходов задан, то

$$\frac{(q+s)!}{q!}\frac{(p+r)!}{p!}\frac{(p+q+1)!}{(p+q+r+s+1)!}.$$

852. Третий мемуар (1799b) также относится к принципу, указанному в § 851. В нём четыре раздела.

853. Первый раздел трактует о *пользе* этого принципа. Утверждается, что до его введения авторы сочинений по теории вероятностей допускали ошибки. Вот выдержка:

Представляется, что при оценке значимости одновременных показаний двух свидетелей до Ламберта никто никогда не прибегал к каким-либо иным приёмам кроме применения дополнения (?) *формулы для последовательных показаний. В этом вопросе все довольствовались намёком на оценку согласованных доводов у Якоба Бернулли.*

Будь тогда известен истинный метод оценки причин, не преминули бы прежде всего исследовать, относились ли показания к рассматриваемому случаю и установили бы, что согласие показаний есть апостериорное событие относительно некоторой причины, которая и определила их. И таким образом шла бы речь об оценке причины по следствию и вполне естественно, без всяких усилий, обратились бы к методу, который, в силу редкостной прозорливости своего гения, установил Ламберт.

854. В качестве примера авторы приводят выдержку из французского перевода (Париж, 1786) сочинения Haygarth об оспе. Этот последний узнал от знакомого математика, что, если допустить, что из 20 человек, подвергнутых действию оспенной заразы, лишь один оставался здоровым, то, как бы не неистовствовала в данном городе оспа, если ребёнок не заболел ей, то с соотношением шансов 19:1 он и не был подвергнут её действию. Если двое или трое в семье не заболели оспой, то аналогичные соотношения шансов превысят 400:1 и 8000:1.

По поводу этого утверждения авторы указывают, что переводчик, de la Roche, разумно показал её ошибочность. Они цитируют основную часть конца его замечания:

Если из 20 понтёров в игре фараон 19 разоряются, то нельзя будет с соотношением шансов 1:19 заключить, что никто из тех, чьё состояние не было расстроено, не играл в фараон; и нельзя утверждать, что с соотношением шансов 19:1 такой человек является игроком.

Это было бы абсурдно, добавляет переводчик и утверждает, что так же нелепо рассуждение знакомого Хейгарта. Укажем, что цитированное замечание ошибочно: он упомянул соотношение 19:1 вместо 1:19 и наоборот. И трудно понять, как Prevost & Lhuillier могут одобрить его, ибо, в отличие от de la Roche они полагают, что знакомый Хейгарта ошибся лишь незначительно: вычисляя шансы в соответствии с принципом Лапласа, они определили, что указанные соотношения шансов равны 20:21, 400:401 и 8000:8001[65].

855. Второй раздел посвящён *охвату* принципа. Авторы утверждают, что мы убеждены в постоянстве законов природы и доверяем ему при вероятностных рассуждениях, но тем самым допускаем порочный круг, если пытаемся применить этот принцип к проблемам, относящимся к постоянству указанных законов.

856. В третьем разделе некоторые результаты теории вероятностей сравниваются с понятиями здравого смысла. Допустим, что в формуле в конце § 843 $s = 0$, тогда она [искомая вероятность] сведётся к

$$\frac{(p+1)(p+2)...(p+r)}{(p+q+2)(p+q+3)...(p+q+r+1)}.$$

Авторы исследуют частные случаи этого выражения, следствия из которых соответствуют понятиям здравого смысла. Впрочем, в одном случае это заключение не очевидно, и они добавляют: *Это поясняет вид парадокса, который указал (но не разъяснил) Лаплас*. Они ссылаются на *Ecole normale*, cahier No. 6. Вот этот случай.

Ничего не известно о некоторой игральной кости. В пяти её бросках два исхода оказались единицей. Требуется определить вероятность того, что исходами всех четырёх последующих бросков будут единицы. Здесь $p = 2$, $q = 3$ и $r = 4$ и указанное выражение становится равным 1/14. Если нам было известно, что граней кости, помеченных единицей, было столько же, сколько прочих, то искомый шанс равнялся бы $1/2^4 = 1/16$. Парадокс здесь в том, что 1/14 > 1/16, тогда как, получив единицу только в двух испытаниях из пяти, мы бы подумали, что полученный результат должен был бы быть меньше 1/16. Пояснять парадокс нет нужды, поскольку Лаплас (1814, с. CVI) привёл аналогичный пример[66].

857. В четвёртом разделе имеются некоторые математические рассуждения. Вот их суть. Даны n игральных костей, каждая с r гранями, из которых одним очком помечены m_1, m_2, … Выбрав кость случайно, получим вероятность выбросить единицу, равную

$$(m_1 + m_2 + \ldots)/nr.$$

Если исход оказался единицей, повторим бросок той же кости. Вероятность повторения того же исхода будет равна

$$\frac{m_1^2 + m_2^2 + \ldots}{r(m_1 + m_2 + \ldots)}.$$

Первая вероятность выше второй, потому что

$$(m_1 + m_2 + \ldots)^2 > n(m_1^2 + m_2^2 + \ldots)$$

и авторы доказывают это простое неравенство.

858. Те же авторы опубликовали мемуар (1800). Вот его начало: *Цель мемуара состоит скорее в обозрении нынешнего состояния этой теории* (!), *чем в добавлении нового*. Они начинают с указания на критику Ламбертом одной формулы Якоба Бернулли (§ 122)[67]. Затем они переходят к ныне общепринятой теории одновременных показаний. Пусть свидетель говорит правду в m случаях и обманывает n раз в $(m + n)$ показаниях, а второй свидетель, соответственно, в r и s случаях. Вероятность истинности их совпадающих показаний равна $mr/(mr + ns)$.

Описывается и обычная теория показаний по традиции. Если свидетель утверждает что-то на основе показаний другого лица, то вероятность истинности сказанного равна

$$\frac{mr + ns}{(m + r)(n + s)},$$

ибо их утверждение истинно, если они оба говорят либо правдиво, либо ложно. Если последовательные показания обоих свидетелей ложны, то результат верен, потому что двойная ложь оказывается истиной.

Указано, что это следствие впервые привёл Prevost в 1794 г. и упомянута гипотеза Крейга (§ 91). Единственной новинкой является гипотеза, предложенная по поводу традиционных показаний. Она признаётся произвольной, но её следствия исследуются. Она утверждает, что *никакое показание, основанное на лжи, не может привести к истине*. Смысл гипотезы проще всего прояснить примером.

Пусть два свидетельства в точности совпадают, тогда в формуле для вероятности

$$(m^2 + n^2)/(m + n)^2$$

следует отбросить член n^2 в числителе, который соответствует совпадению ложных показаний. Итак, мы принимаем, что

$$\frac{m^2}{(m+n)^2} \text{ и } \frac{2mn+n^2}{(m+n)^2}$$

представляют вероятность истины и лжи в совпадающих показаниях. Пусть теперь имеется вторая пара свидетелей такого же достоинства, независимая от первой и подтверждающая их показания. Авторы объединяют показания обеих пар при помощи обычных правил для совпадающих показаний, так что вероятность, вытекающая теперь из показаний, равна

$$\frac{m^4}{m^4+(2nm+n^2)^2}.$$

Далее, задаётся вопрос: при каком соотношении m к n это выражение равняется $m/(m + n)$, так что показания обеих пар свидетелей приравниваются к показаниям одного-единственного из них. Найденное значение $m/n \approx 4{,}864$ и $m/(m + n) \approx 5/6$.

859. Young (1800) скорее метафизический, а не математический мемуар. Можно сказать, что автор принял современный метод оценки силы совпадающих показаний. При одном и том же доверии к ним мы получим формулу, совпадающую с приведенной в § 667[68]. Автор полагает ошибочным метод, упомянутый нами в § 91 и безосновательно называет его по имени Галлея. Он также критикует два правила Уоринга, хотя в первом случае нетрудно объяснить и защитить его.

Приложение

1053. Здесь мы сообщаем о нескольких сочинениях, о которых узнали только во время печатания книги. Указать их в надлежащих местах оказалось уже невозможным.

1054. Записка де Витта [о стоимости пожизненных рент], упомянутая в пятой главе, была обнаружена и переведена на английский язык (Hendriks 1852). Там же, на с. 393, переводчик привёл некоторые соображения о предположениях де Витта по поводу закона смертности. В томах того же журнала опубликованы многие интересные и ценные мемуары об истории страхового дела и родственных темах.

1055. Мемуар по нашей теме опубликовал Rizetti (1729). Судя по с. 297 мемуара, произошла дискуссия о некоторых проблемах шансов между Даниилом Бернулли и Рицетти и Риккати, но никаких других ссылок по этому поводу я не нашёл. Рицетти упоминал книгу Бернулли (1724), которую я не видел.

Можно сказать, что суть дискуссии была в должном определении *ожидания*. Пусть играют A и B, ставки которых a и b. Пусть также имеется $(m + n + p)$ равновероятных случаев и в m и n случаях A и B выигрывают обе ставки, а в p случаях каждый забирает свою собственную ставку. Тогда, в соответствии с обычными принципами оценка ожидания A равна [само ожидание равно]

$$\frac{m(a+b)+pa}{m+n+p}.$$

Учитывая, что A уже уплатил a, можно принять за его ожидание

$$\frac{m(a+b)+pa}{m+n+p}-a=\frac{mb-na}{m+n+p}.$$

Рицетти, однако, предпочитает иное определение. Он говорит, что A имеет m шансов, чтобы получить b, так что его ожидание равно

$$\frac{mb}{m+n+p}.$$

Он старается показать, что обычное определение, принятое Монмором и Даниилом Бернулли, приводит к путанице и ошибке, однако это заключение в действительности последовало не ввиду этого обычного определения, а вследствие ошибок и неопытности самого Рицетти.

Мемуар никак не свидетельствует о знании темы. Рицетти считает, что он доказал знаменитую теорему Якоба Бернулли каким-то общим соображением, которое в основном опирается на следующую аксиому: *Постоянное и неизменное следствие происходит от* (pendet) *постоянной и неизменной причины*. На с. 224 он приводит то, что считает кратким исследованием задачи, которую обсуждали Гюйгенс и Якоб Бернулли, см. §§ 33 и 103[69]. Это исследование, однако, неудовлетворительно и показывает, что Рикатти недостаточно ясно понимал эту задачу.

1056. Мемуар, рассмотренный в § 1055, указал мне профессор Де Морган, который отыскал его в Kahle (1740, т. 1, с. 295). Он также сообщил мне о следующих двух сочинениях, указанных в том же источнике, которые я не смог достать: Rudiger (?), Kahle (1735).

1057. Сочинение Гравезанда, цитированное в начале § 347, содержит замечания по нашей теме. Они составляют часть *Introduction à la philosophie* и находятся на с. 82 – 93 второго тома его *Трудов.* На с. XLVII т. 1 указано, что это *Введение* было впервые опубликовано в 1736 г., а замечания в нём составляют очерк математической теории вероятностей. Интересно отметить, что Гравезанд (с. 85) по существу приводит пример приложения обратного закона Якоба Бернулли, подобный нашему в § 125[70].

1058. […]

1059. Известный [философ] Мозес Мендельсон опубликовал очерк по теории вероятностей, впервые, видимо, опубликованный в 1761 г. Я видел издание 1771 г., в котором оно занимает с. 243 – 283 т. 2. Автор упоминает Паскаля, Ферма, Гюйгенса, Галлея, Крейга, Петти, Монмора и Муавра. Он приводит выдержку из сочинения Гравезанда, а именно пример на теорему Якоба Бернулли, и якобы её доказательство, на самом же деле лишь краткое общее рассуждение.

Единственно интересное в мемуаре это следующее. Пусть событие A произошло одновременно или почти в то же время, что и событие B. Мы поэтому захотим выяснить, случайно ли такое совпадение, или же оно произошло ввиду какой-то причинной связи. Мендельсон утверждает, что если совпадение произошло n раз, вероятность второй возможности составит $n/(n + 1)$. Никакого обоснования он, однако, не приводит, зато указывает пример. У кого-то, выпившего кофе, закружилась голова, случайно ли или ввиду той или иной причинной связи? Если это совпадение произошло n раз, то головокружение последует за питьём кофе с вероятностью $n/(n + 1)$.

Применив теорему Бейеса и Лапласа, мы найдём, что головокружение повторится в следующий раз с вероятностью $(n + 1)/(n + 2)$, см. § 848.

Поистине странно, что правило Мендельсона так хорошо соответствует этому результату при больших *n*, но, видимо, это близкое совпадение случайно: в мемуаре нет ничего, что бы навело на мысль о том, что Мендельсон был хорошо знаком с нашей темой или обладал существенной математической мощью. Поэтому мы никак не можем считать его предшественником Бейеса.

Своим правилом Мендельсон обосновывает некоторые замечания о доверии к показаниям наших органов чувств и особо ссылается на скептицизм Юма[71]. Он также затрагивает свободную волю и Божественное предвидение, но мне представляется, что он никак не осветил эти трудные проблемы.

Я знал, что Мендельсон оставил сочинение о вероятности, поскольку его имя встретилось в § 840, но предположил, что его очерк не касается математической теории, и потому не исследовал его. Теперь же я описал этот очерк по просьбе покойного профессора Буля […].

1060. Из каталогов продавцов книг я выписал названия четырёх работ, которых никогда не видел: Thubeuf (1661); Marpurg (1765); Fenn (1772); Frömmichen (1773).

1061. Я не заметил одного места у Монтукла (с. 421), которое имеет отношение к обстоятельству, отмеченному в § 990[72]. Представляется, что метод выборов [метод оценивания их результатов], предложенный Кондорсе, был какое-то время принят в Женеве. На недостатки этого метода указал Lhuilier (1794).

1062. Waring (1782, с. xi, 69 и 73) указал весьма странное приложение теории вероятностей. Так, он привёл правило для определения числа комплексных корней уравнения:

Этот метод обеспечивает правильный ответ в случае квадратных уравнений; для кубичных уравнений […][73].

Эту ссылку мне любезно прислал профессор Сильвестр; она содержится в его примечательном мемуаре примерно 1864 г. Он (с. 580) независимо приложил теорию вероятностей подобным же образом:

Как и я, Уоринг в своём мемуаре привёл теоремы теории вероятностей в связи с правилами подобного рода, но никак не пояснил метода их отыскания, и потому в их верности можно обоснованно сомневаться.

О Николае Стрюике, которого Тодхантер не заметил

Подробно о Стрюике см. Pearson (1978, pp. 329 – 347), но мы приводим его краткую характеристику (Hald 1990, p. 394).

Николай Стрюик (1687 – 1769) родился в семье бюргера в Амстердаме. Он хорошо овладел и классическими дисциплинами, и математикой и естествознанием, а взрослым он зарабатывал на жизнь преподаванием математики, космографии (описанием космоса), астрономии и бухгалтерского дела, равно как и многими своими книгами.

В его сочинениях встречаются многие ссылки на зарубежные журнальные источники, так что он много читал. Он вёл обширную переписку с коллегами во многих странах, был избран в Королевское общество и Парижскую академию наук. Стрюик писал о теории вероятностей, пожизненных рентах, статистике населения, астрономии, географии и бухгалтерском деле. Почти все его сочинения были написаны на голландском языке и не оказали заслуженного влияния. Vollgraff перевёл на французский язык труды Стрюика по трём первым указанным темам (1912).

Первое сочинение Стрюика (1716) показало, что он овладел теорией вероятностей в объёме работ Гюйгенса, Монмора, Якоба и Николая Бернулли и Муавра (на которого он ссылался). Свои задачи он сформулировал в терминах азартных игр и решил их при помощи комбинаторики, метода включения и выключения, бесконечных рядов и разностных уравнений. Он несколько обобщил и улучшил предшествовавшие доказательства и результаты. Стрюик также упомянул аппроксимацию Пуассона по Муавру и применил мысль Монмора о случайном числе испытаний. Кроме того, он обсуждал биномиальное и полиномиальное распределения и применил их для решения многих задач, в том числе на раздел ставки.

Он подчёркивал существенное отличие тиражей с возвращением и без него и пояснил это при решении второй задачи Гюйгенса и обсуждении Лотарингской лотереи. Он решает проблему размещений так же, как Муавр, приводит без доказательства формулу Монмора распределения суммы очков при игре в кости и показывает, что она соответствует формуле Муавра, также приведенной без доказательства. Как Монмор, он табулирует это распределение для 2, 3, …, 9 обычных костей. Наконец, он обсуждает продолжительность игры, применяя формулу Николая Бернулли о вероятности разорения и алгоритм Муавра. Все теоремы он поясняет многими примерами. Он не упомянул теорем Якоба и Николая Бернулли о биномиальном распределении и не рассматривал задач вне азартных игр.

Книга Стрюйка интересна с исторической точки зрения, поскольку она показывает, что в 1716 г. хорошо математически подготовленный человек смог полностью понять, применить и несколько улучшить фундаментальные результаты, полученные четырьмя пионерами в 1708 – 1713 гг. Книга эта – единственное математическое сочинение Стрюика. Вне Голландии она не стала широко известной ни в его время, ни в исторической литературе. Тодхантер её не упомянул.

Краткие сведения об упомянутых лицах

Baily F. (1744 – 1844), астроном. Успешно занимался и проблемами пожизненных рент

Garve Chr. (1742 – 1798), философ

Fontaine A. des Bertines (1704 – 1771), математик, член Королевского общества

Haygarth J. (1740 – 1827), врач, член Королевского общества

Ricatti J. (1676 – 1754), математик. Четыре тома его *Трудов* были опубликованы в 1761 – 1765 гг.

Примечания

1. Основными препятствиями были отсутствие комбинаторных понятий и идеи случайного события, суеверие и моральные и религиозные *барьеры* (Kendall 1956/1970 особо с. 30), но и вообще древняя наука была качественной.

2. См. Ore (1963), в книгу которого включён перевод сочинения Кардано.

3. Именно так Эпикур представлял себе возникновение тел, но, конечно же, не Новой 1604 г.

4. Kepler (1606/2006, с. 163) чётко высказался в другом месте:

Но что такое случайность? Всего лишь идол и притом самый отвратительный из идолов. Ничто, кроме как оскорбление полновластного и всемогущего Бога, равно как и совершеннейшего мира, который вышел из Его рук.

5. Об указанной заметке Галилея см. David (1962, с. 64 – 66). Там же, на с. 192 – 195, опубликован её английский перевод.

6. О Карамюэле см. Ineichen (1999a, b; 2004). Дополнительно укажем сочинение Карамюэля 1663 – 1664, которого мы не видели.

7. При броске трёх костей общее количество очков может с равной вероятностью быть либо больше 10, либо меньше или равно 10. Соответственно, каждый из двух игроков ставил на тот или другой результат.

8. Вот задача Гюйгенса. Другой игрок [A] и я [B] поочередно бросают 2 кости с условием, что я выиграю, если выкину 7 очков, а он – если выкинет 6, и я отдаю ему первую очередь. Найти соотношение наших шансов.

9. См. также Hald (1990, с. 240).

10. С. 139 – 142 в издании 1975 г., но это ошибка. Впрочем, обе публикации (1685 и 1690) перепечатаны в 1975 г. на с. 91 – 93.

11. Вот выдержка из письма Лейбница Якобу Бернулли 1703 г. (Kohli 1975a, с. 509):

Я хотел бы, чтобы кто-нибудь математически изучил различные игры (которые содержат прекрасные примеры [учения об оценке вероятностей]). *Это было бы и приятно, и полезно, и не недостойно ни Тебя, ни другого уважаемого математика*.

В 1675 г. Лейбниц и сам занимался исследованием игр (Biermann 1955).

12. Аналогичную ошибку Лейбниц (рукопись 1680 – 1683) допустил намного раньше.

13. Он упоминается в § 80.

14. Это непонятно.

15. Случайное событие всё-таки появилось, но возможно в том же субъективном смысле.

16. Вот эта задача. Три игрока играют с 12 жетонами, из которых 4 белых и 8 чёрных. Выиграет тот, кто первым вытащит белый жетон, и в игру они вступают по очереди. Требуется определить их шансы.

17. В Предложении 3 Гюйгенс указал эту формулу в случае двух возможных приобретений, но нельзя представить себе, что он не заметил возможности её обобщения. В своём комментарии Якоб Бернулли, в ч. 1 *Искусства предположений*, весьма просто обосновал формулу Гюйгенса, однако впоследствии ожидание начало вводиться по определению.

18. De Moivre (1712/1984, с. 237) определил вероятность события в этом общем случае.

19. В формуле Simpson (1740, с. 67 – 70), см. также § 367 Тодхантера, во всяком случае нарушена размерность. Иную формулу без вывода привела Перес (1985), а Хинчин (1961, с. 95) сослался на *знаменитый пример Мизеса* (!) […] *непревзойдённый по силе и простоте аргументации*.

20. Авторы не заметили, что Лаплас (1814) специально рассматривал *Приложение* *теории вероятностей к политическим и нравственным наукам* и и изучал судебную статистику. Он (1814/1999, с. 848) призывал приложить

к политическим и нравственным наукам метод, основанный на наблюдении и исчислении, метод, который служил нам так хорошо в науках естественных.

21. Монмор высказался в духе этих авторов, но на с. xxxix тем не менее весьма положительно заключил, что считает

Замысел Крейга благочестивым и достойным похвалы, а его исполнение настолько хорошим, насколько это было возможным. Впрочем, […] *эта работа гораздо больше подходит как упражнение для математиков, чем как средство* [распространения христианства]. […] *Наверняка убеждаешься, что автор очень умён, весьма проницателен и является крупным математиком*.

Stigler (1986/1999) предположил, что под вероятностью Крейг понимал

$$\lg P[(E/H) \div P(E/\text{не } H)],$$

где E – существующее в данный момент основание, а H – гипотеза. Соображения Крейга Стиглер (с. 265) назвал *интуитивно разумными*.

22. Ссылаясь на рукопись Grier (1982), Стиглер (1986/1999, с. 264) заметил, что указанную анонимную статью написал Hooper. То же мнение выразил Dale (1992). Правдивость события, передаваемого цепочкой свидетелей, исследовал Poisson (1837).

23. Переиздание энциклопедии: Stuttgart – Bad Cannstadt, 1966 – 1967, tt. 1 – 17 + 4 дополнительные тома.

24. Эти числа (63, 40, …) Якоб Бернулли перенял от Граунта. В своей диссертации Н. Б. (Kohli 1975b, с. 541) не только подхватил намёки, содержавшиеся в рукописи *Искусства предположений*, но дословно перенёс в неё отдельные куски из этого сочинения и даже из *Дневника* (1975), который вообще не предназначался к публикации.

25. *Случайно* следовало уточнить; имелось в виду равномерное и непрерывное распределение на некотором отрезке.

26. Результат Николая Бернулли верен: при равномерном непрерывном распределении ожидания n порядковых статистик разделят заданный отрезок на $(n + 1)$ равных частей. И это распределение, и порядковая статистика впервые появились у Н. Б.

27. Улики, подобные предложенным, видимо, следовало бы вообще отбросить.

28. Уже La Placette (1714) доказывал, что азартные игры не противоречат христианской этике. О Лапласе см. Прим. 72. "Рассуждение" *О природе случая* было вторым изданием (1737, а не 1744 г.) книги 1709 г. (Kendall & Doig 1968).

29. Николай Бернулли доказал положение, близкое локальной теореме Муавра – Лапласа и впервые ввёл нормальное распределение, хоть и в неявном виде (Шейнин 1970). Юшкевич (1986), сославшись на трёх (!) анонимных математиков, повторил первый из указанных выше выводов.

30. Задача Вальдеграва: Два игрока играют в азартную игру. Проигравший уступает место третьему игроку и т. д. Игра заканчивается, когда кто-либо из игроков выиграет у всех остальных игроков подряд. Муавр (1718/1756, задачи 44 и 45) решил эту задачу для трёх и четырёх игроков. Современное исследование задачи Вальдеграва см. Хальд (1990, с. 318 – 321).

31. В 1702 г. Мид (1673 – 1754) заявил (Sheynin 1982, с. 247), что

Чертой, отличающей врача от шарлатана, вскоре окажется математическое знание. […] *Тот, кто не обладает этой необходимой квалификацией, будет выглядеть столь же нелепо, как человек, не знающий греческого или латинского языка*.

Мид был одним из первых врачей, обративших внимание на математику.

32. Почему только с современной точки зрения?

33. Эти шансы могут отличаться друг от друга, если они зависят от порядка вступления игроков в игру.

34. Вряд ли подобный очерк мог появиться в 1752 г., т. е. при жизни Симпсона. Впоследствии, однако, вышла в свет его книга, дополнявшая один из разделов сочинения 1752 г., а её второе издание появилось в 1775 г. Очерк Хаттона был, видимо, включён в неё и быть может уже в её первое издание.

35. О приоритетной перебранке Муавра и Симпсона см. Шейнин (2013, § 7.3.1). Добавим, что Pearson (1978, с. 145 и 184) назвал Симпсона *сомнительнейшей личностью* и *бесстыдным лжецом*.

36. Эта задача имеет прямое отношение к выборочному методу и статистическому контролю качества массовой продукции. Ту же задачу сформулировал уже Гюйгенс (1657, Дополнительная задача № 4). Чуть ниже упомянута игра в шары. Их следовало катить так, чтобы они оказывались как можно ближе к неподвижному шарику.

37. Тодхантер обычно (может быть всегда) ссылался только на последнее издание *Учения о случае* Муавра, но вот Задача 7 в этом издании не имела отношения к продолжительности игры.

38. Требовалось определить число случаев, при которых сумма очков при броске n f-гранных костей окажется равной p.

39. Условия задачи непонятны.

40. Тодхантер сослался на авторскую перепечатку части мемуара Муавра 1733 г., в котором был доказан первый вариант теоремы Муавра – Лапласа.

41. Лагранж, видимо, хотел полностью остаться в стороне от перебранки Муавра и Симпсона, см. Прим. 35. Симпсон впервые приложил теорию вероятностей к обработке наблюдений и ввёл в научный оборот случайные величины, которые были, правда, известны в элементарном виде (возможность различных выигрышей с соответствующими вероятностями). О мемуаре Лагранжа см. Шейнин (2013, § 7.3.1) и Прим. 56.

42. Астрологи по-разному понимали влияние небесных тел. Многие из них даже в древности (а в Новое время – Тихо Браге и Кеплер) представляли его лишь как *качественную корреляцию*, см. Sheynin (1974, § 7).

43. Тодхантер несколько раз упоминает два мемуара Beguelin 1767 г., но в § 603 он сообщает их общее название и указывает общую нумерацию их страниц.

44. В первом источнике Мичел всё же не был упомянут.

45. Суть задачи Якоба Бернулли: количество бросков кости случайно, а вместо неопределённого исхода игры игроки соглашаются, что один из них набрал 12 очков.

46. Муавр решал более общую задачу.

47. См. Шейнин (2013, §§ 7.1.4 и 7.1.6). В частности, мы указали, что пренебрежение малыми шансами (см. ниже) непосредственно следовало из рассуждений Декарта и других учёных о моральной достоверности.

48. См. Шейнин (2013, §§ 4.3.4 и 7.1.1).

49. Здесь $p + q < 1$.

50. Вот соответствующее утверждение Лапласа (1812/1886, с. 389):

Это, видимо, указывает на постоянную причину указанной разности. Определим её вероятность.

51. Требовалось определить ожидание игрока, взявшегося выкинуть костью с заданным числом граней любое их число при заданном числе бросков.

52. Каким-то образом Тодхантер считает возможным вводить подобные вероятности. Фактически Эйлер (1785/1923, с. 415) получил вероятность, равную 0,7411.

53. В 1766 г. Даниил Бернулли исследовал влияние вариоляции оспы (небезопасного метода профилактики этого заболевания) на средний срок жизни.

54. Муавр определял вероятности повторений исходов броска кости; u_n было вероятностью p повторений при n испытаниях, a – шансом события в единичном испытании и b – шансом противоположного события.

55. Даниил Бернулли решал задачу, которую впоследствии исследовал Трембли, см. § 793. Он предварительно исследовал модель этой задачи, рассматривая извлечение полосок из урны, которые первоначально были парными. Об этом Тодхантер фактически упомянул в § 792.

56. Лагранж определял погрешность среднего арифметического при нескольких распределениях, а кроме того получил интересные общематематические результаты. Различным исследованиям Лагранжа Тодхантер посвятил гл. 15.

57. Вот объяснение игры (§ 187): Павел сдаёт по одной карте себе и Петру. Если он не удовлетворён своей картой, то может заставить Петра поменяться с ним, но если карта Петра – король, он имеет право отказаться от обмена. Если Пётр недоволен своей собственной картой, или полученной от Павла, он может взять взамен карту (но не короля) из оставшихся 50 карт колоды. Если достоинства обеих карт совпадают, то Павел проигрывает. Там же и в §§ 188 и 189 Тодхантер рассматривает различные варианты игры. Пояснение Трембли неясно, и мы приводим его лишь частично.

58. Подробное описание Тодхантера устарело. Исследование игры стало возможным в рамках теории игр на основе принципа минимакса, но всё же Николай Бернулли заметил, что игрокам следует придерживаться смешанных стратегий.

59. Задачу Бернулли обобщил Лаплас; она совпадает со знаменитой моделью Эренфестов 1907 г., с которой принято начинать историю случайных процессов, а их результат можно обосновать эргодической теоремой Маркова для Марковских цепей. См. Шейнин (2013, § 8.1-3).

60. Королевская привилегия означала, что рукопись прошла цензуру и защищена от пиратских переизданий.

61. “Фундаментальная теорема” относилась к размещению писем по конвертам. Случай $p = 0$ означал, что все письма размещены верно.

62. Не всё так гладко! Но при существенном дополнении это утверждение привело бы к теории Мизеса.

63. И рукопись, и мемуар Даниила Бернулли опубликованы в английских переводах, см. Библиографию. О них и о комментарии Эйлера к мемуару Д. Б. см. Шейнин (2013, § 7.3.1).

64. См. Poisson (1825 – 1826). Об игре Passe-dix см. Прим. 7.

65. Объяснение недостаточно: трудно сравнивать 1:19 и 20:21 и т. д.

66. Тодхантер, видимо, ссылается на издание 1820 г., которого у нас нет. Во всяком случае, подобного примера мы не нашли.

67. Ошибочной оказалась последняя формула в гл. 3 четвёртой части *Искусства предположений*, относящаяся к вероятности суммы имеющихся доводов.

68. Тодхантер ссылается на одну из формул Кондорсе о вероятности верного решения большинством голосов.

69. Вот эта задача: сколько раз следует подбросить игральную кость, чтобы выбросить шестёрку?

70. Тодхантер только обсуждал формулировку обратного закона больших чисел.

71. По Юму, причинность следовало понимать лишь как сочетание, но не как необходимую связь между причиной и следствием, как их принято называть.

72. Лаплас (1812, гл. 2) предложил метод оценки кандидатов избирателями (Шейнин 2013, § 7.2c). Каждый избиратель должен был расположить всех кандидатов по порядку возрастания (или убывания) их достоинства и назначить каждому соответствующую вероятность. Фактически он ввёл реализацию случайного процесса, а его метод можно применять для экспертных оценок.

73. Конца этой латинской фразы мы не смогли перевести, но во всяком случае Уоринг решал свою задачу с привлечением вероятностных соображений.

Библиография

Зубов В. П., Зубова М. В. (2010), Замечание о Джироламо Кардано. *Вопр. истории естествознания и техники*, № 3, с. 3 – 40.

Перес Л. М. Т. (1985), К истории понятия геометрической вероятности. *Вопр. истории естествознания и техники*, № 4, с. 100 – 103.

Лаплас П. С. (1814 франц.), *Опыт философии теории вероятностей.* В книге Прохоров (1999, с. 834 – 863).

Прохоров Ю. В., ред. (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия.* М.

Хинчин А. Я. (1961), Частотная теория Мизеса и современные идеи теории вероятностей. *Вопр. философии*, № 1, с. 91 – 102, № 2, с. 77 – 89.

Шейнин О. Б. (1970), К истории предельных теорем Муавра – Лапласа. *История и методология естественных наук*, № 9, с. 199 – 211.

--- (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. Также Google, Oscar Sheynin, Download Area.

Юшкевич А. П. (1986), Николай Бернулли и издание “Искусства предположений” Якоба Бернулли. *Теория вероятностей и её применения*, т. 31, с. 333 – 352.

Ancillon (for 1794 – 1795), Doutes sur les bases du calcul des probabilités. *Mém. Acad. Berlin*, pp. 3 – 32 отдела спекулятивной философии.

D’Anières (1786), Réflexions sur les jeux de hasard. *Mém. Acad. Berlin*, за 1784, pp. 391 – 398.

--- (1788), Sur les paris. *Nouv. Mém Acad. Berlin*, за 1786, pp. 273 – 278.

Anonymous [Arbuthnot J.] (1692), *Of the Laws of Chance*. London. Четвёртое издание, пересмотренное. Редактор John Ham, 1738.

Anonymous [G. Hooper] (1699), Calculation of the credibility of human testimony. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 21, pp. 359 – 365. Перепечатка: *The Works of* […] *G. Hooper*. Oxford, 1757, 1855.

Anonymous (1730), Сообщение о статье Mairan J. J. Dortous de, Sur le jeu de pair ou non. *Hist. Acad. Roy. Sci. Paris*, pp. 53 – 57.

Anonymous (Бюффон) (1735), Géométrie. *Hist. Acad. Roy. Sci. avec Mém. Math. et Phys.*, за 1733, pp. 43 – 45.

Anonymous (1757), *Dell’ Azione del Caso nelle Invenzioni, e dell’ influsso degli Astri ne’ Corpi terrestri Disseratione due.* Padua.

Arbuthnot J. (1712), An argument for Divine Providence taken from the constant regularity observed in the birth of both sexes. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 30 – 34).

Barbeyrac J. (1709), *Traite de jeu* […] *les principales questions de droit naturel et de moral* […], tt. 1 – 3. Amsterdam, 1737.

Beguelin N. (1767), Sur les suites ou séquences dans la loterie de Gènes. *Hist. Acad. Berlin*, за 1765, pp. 231 – 280.

--- (1769), Sur l’usage du principe de la raison suffisante dans le calcul des probabilités. Там же, за 1767, pp. 382 – 412.

Bellhouse D. (2005), Decoding Cardano’s *Liber de Ludo Aleae*. *Hist. Math.*, vol. 32, pp. 180 – 202.

Bernoulli D. (1724), *Exercitationes quaedam mathematicae*. *Werke*, Bd. 1. Basel, 1996, pp.

297 – 362.
--- (рукопись, не позже 1769 г., латин.), The most probable choice between several discrepant observations and the formation therefrom of the most likely induction. В *Festschrift für Lucien Le Cam*. New York, 1997, pp. 358 – 367.
--- (1778 латин.), То же название. Англ. перевод: *Biometrika*, vol. 48, 1961, pp. 3 – 13, также Pearson & Kendall (1970, pp. 155 – 172).
Bernoulli Jakob (рукопись, частично опубликовано: 1975), *Meditationes.* J. Bernoulli (1975, pp. 21 – 90).
--- (1713 латин.), *Искусство предположений*. Русск. перевод частей 1 – 3: Я. Бернулли (2006), части 4-й: Я. Бернулли (1986, с. 23 – 59). Перепечатка на латин. яз. в книге автора (1975, с. 107 – 259).
--- (1975), *Werke*, Bd. 3. Basel. Содержит перепечатку ряда смежных мемуаров других авторов и комментарии.
--- (1986), *О законе больших чисел.* М.
--- (2006), *Искусство предположений, части 1 – 3*. Берлин. Также Google, Oscar Sheynin, Download area.
Bernoulli Johann I (1742), *Opera omnia*, tt. 1 – 4. Hildesheim, 1968.
Bernoulli Johann III (1770), Sur un problème de la doctrine des hazard. *Hist. Acad. Berlin*, за 1768 pp. 384 – 408.
--- (1771), Sur les suites ou séquences dans la loterie de Gènes. Там же, за 1769, pp. 234 – 253.
Bernoulli N. (1709), De usu artis conjectandi in jure. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 289 – 326). Перевод: Google: Dissertation on the use of the art of conjecture in law.
Bicquilley de C. F. (1783), *Du calcul des probabilités*.
Biermann K. R. (1955), Über eine Studie von Leibniz zu Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Forschungen u. Fortschritte*, Bd. 29, No. 4, pp. 110 – 113.
Borda J. C. (1784), Sur les élections au scrutins. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris*, за 1781, pp. 657 – 665.
Buffon G. L. L. (1777), *Essai arithmétique morale*. *Oeuvr. Phil.* Paris, 1954, pp. 456 – 488. Редакторы J. Piveteau et al.
Caramuel J. (?), *Kybeia quae combinatoriae genus est, de alea, et ludis fortunae serio disputans*.
--- (1663 – 1664), *Apologema pro doctrina de probabilitate*. Lyon.
--- (1670), *Combinatoria. Mathesis biceps, vetus et nova*, tt. 1 – 2.
Clark S. (1758), *The Laws of Chance*. London.
Condorcet M. G. A. N. (1785), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions* etc. Введение: Discours préliminaire. New York, 1972.
Cournot A. A., Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей*. М., 1970.
Craig J. (1699), *Theologiae Christianae principia mathematica*. London. Англ. перевод в Nash (1991).
D. M. (1739), *Calcul du jeu appelé par les François le trente-et quarante* etc. Florence.
Dale A. I. (1992), On the authorship of Calculation of the credibility of human testimony. *Hist. Mathematica*, vol. 19, pp. 414 – 417.
D'Alembert J. Le Rond (1768), Doutes et questions sur le calcul des probabilités. В книге автора *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, t. 5. Amsterdam, pp. 239 – 264.
David F. N. (1962), *Games, Gods and Gambling*. London.
De Moivre A. (1712 Latin), De mensura sortis or the measurement of chance. *Intern. Stat. Rev*., vol. 52, pp. 236 – 262. Комментарий (A. Hald): pp. 229 – 236.

--- (1718), *Doctrine of Chances*. London, 1738, 1756. Перепечатка последнего издания: New York, 1967.

--- (1730), *Miscellaneae analytica de seriebus et quadraturis*. London. Франц. перевод: Paris, 2009.

De Morgan A. (1847), *Formal Logic* etc. London.

--- (1856), On the symbols of logic … and the application of the theory of probabilities to some questions of evidence. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 9, pp. 9 – 127. Впервые опубликовано в 1847.

Dictionnaire (An VII), *Dictionnaire des jeux mathématiques*.

Dodson J. (1753 – 1755), *Mathematical Repository*, vols 1 – 3.

Emerson W. (1776), *Miscellanies, or a Miscellaneous Treatise Containing Several Mathematical Subjects*. London.

Encyclopédie (1784 – 1789), *Encyclopédie méthodique. Mathématique*, tt. 1 – 3. Paris. *Dictionnaire des jeux*, Дополнение к т. 3. Paris, 1792.

Euler L. (1753), Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre. *Opera Omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin, 1923, pp. 11 – 25.

--- (1767), Sur la probabilité des séquences dans la loterie Génoise. Там же, pp. 113 – 152.

--- (1785), Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium. Там же, pp. 408 – 424.

Fenn I. (1772), *Calculations and Formulae for Determining the Advantages or Disadvantages of Gamesters.*

Forbes J. D. (1849 – 1850), On the alleged evidence for a physical connection between stars etc. *London, Edinb. and Dublin Phil. Mag.*, vol. 35, pp. 132 – 133; vol. 37, pp. 401 – 427.

Frömmichen C. H. (1773), *Über die Lehre des Wahrscheinlichen.* Braunschweig.

Fuss N. (1783), Recherches sur un problème du calcul des probabilités. *Acta Acad. Petrop.*, часть 2-я за 1779, pp. 81 – 92.

--- (1784), Supplément etc.Там же, часть 2-я за 1780, pp. 91 – 96.

Galilei G. (1718), Sopra le scoperte dei dadi. Англ. перевод в David (1962).

.--- (1856), *Opere*, t. 15. Firenze.

Galloway T. (1839), *Treatise on Probability*. Edinburgh.

'sGravesande Storm van (1774), *Oeuvres philosophiques et mathématiques*, tt. 1 – 2. Amsterdam.

Gouraud C. (1848), *Histoire du calcul des probabilités*. Paris.

Grier B. (1982), *George Hooper and the Early Theory of Testimony*. Рукопись.

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics and Their Application before 1750*. New York.

Halley E. (1693), *Estimate of the degree of mortality of mankind*. Baltimore, 1942.

Hendriks F. (1852 – 1853); Contributions to the history of insurance. *Assurance Mag.*, vol. 2, pp. 121 – 150, 222 – 258; vol. 3, pp. 93 – 120.

Herschel J. (1849), *Outlines of Astronomy*.

Hoyle E. (1754), *Essay towards Making the Doctrine of Chances Easy* […] [with] *Tables of Annuities for Lives* […]. Второе издание 1764.

Huygens C. (1657), De calcul dans les jeux de hazard. *Oeuvr. Compl.*, t. 14, 1920, pp. 49 – 91.

Ineichen R. (1999a), J. Caramuels Behandlung der Würfelspiele und das Zahlenlottos. *NTM, Intern. Z. f. Geschichte u. Ethik Naturwiss., Technik. Med.*, Bd. 7, No. 1, pp. 21 – 30.

--- (1999b), Über die Kybeia und die Arithmomantica von J. Caramuel […]. *Bull. Soc. Fribourg Sci. Nat.*, Bd. 87, pp. 5 – 55.

--- (2004), Die ersten kombinatorischen Untersuchungen zum Zahlenlotto. Die Beiträge von

[…] Caramuel […] und Frenicle de Bessy. *Festschrift f. I. Schneider.* Stuttgart, pp. 257 – 267.
Karsten (1784), *Theorie von Witwenkassen*. Halle.
Kendall M. G. (1956), The beginnings of a probability calculus. *Biometrika*, vol. 43, pp. 1 – 14. Перепечатка: Pearson & Kendall (1970, c. 19 – 34).
Kendall M. G., Doig A. G. (1962 – 1968), *Bibliography of Statistical Literature*, vols 1 – 3. Edinburgh**.**
Kendall M. G., Plackett R. L., редакторы (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London.
Kepler J. (1606 Latin), *Über den neuen Stern* […]. Würzburg, 2006.
Kiele L. M. (1735), *Elementa logicae probabilium, methodo mathematica* … Halle.
--- (1740), *Bibliothecae philosophicae struvianae*, tt. 1 – 2. Göttingen.
Kohli K. (1975a), Aus dem Briefwechsel zwischen Leibniz und J. Bernoulli. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 509 – 513).
--- (1975b), Kommentar zur Dissertation von Nik. Bernoulli. Там же, pp. 541 – 556.
Lagrange J. L. (1776), Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations. *Œuvr.*, t. 2. Paris, 1868, pp. 173 – 236.
Lambert J. H. (1773), Examen d'une espèce de superstition ramenée au calcul des probabilités. В собрании сочинений автора (1965 – 2007, Bd. 8/1, pp. 461 – 470).
--- (1965 – 2007), *Philosophische Schriften*, Bde 1 – 9. Hildesheim.
Laplace P. S. (1774a), Sur les suites récurro-récurrentes etc. *Œuvr. Compl.*, t. 8. Paris, 1891, pp. 5 – 24.
--- (1774b), Sur la probabilité des causes par les événements. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris*, *Savants étrangers*, t. 6, pp. 621 – 656. Там же, t. 8, pp. 27 – 65.
--- (1776), Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards. Там же, t. 7. *Œuvr. Compl.*, t. 8, pp. 69 – 197.
--- (1781), Sur les probabilités. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris* за 1778, pp. 227 – 332. Там же, t. 9. Paris, 1893, pp. 383 – 485.
--- (1786), Sur les approximations des formules etc., Suite. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris* за 1783, pp. 423 – 467. Там же, t. 10. Paris, 1894, pp. 295 – 338.
--- (1812), *Théorie analytique des probabilités*. Там же, t. 7. Paris, 1886.
--- (1812 за 1815), Сообщение о предстоявшем издании книги (1812). *Conn. des temps*, pp. 215 – 221.
--- (1814 франц.), *Опыт философии теории вероятностей.* В книге Прохоров (1999, с. 834 – 863).
La Placette J. (1714), *Traité des jeux de hasard*. La Haye.
Leibniz G. W. (1680 – 1683 рукопись), Essay de quelques raisonnemens nouveau sur la vie humaine. Впервые опубликовано в 1866 г. С немецким переводом в книге автора *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik*. Hrsg. E. Knobloch et al. Berlin, pp. 428 – 445.
--- (1704 рукопись, нем., опубликована в 1765), *Новые опыты о человеческом разуме*. М. – Л., 1936.
--- (1768), *Opera omnia*, tt. 1 – 6. Hrsg. L. Dutens. Hildesheim, 1989.
--- (1840), *Opera philosophica*. Редактор J. E. Ermann. Aachen, 1974.
--- (1855), *Mathematische Schriften*, Abt. 1, Bd. 3. Редактор G. I. Gerhardt. Halle.
Lhuilier S. A. (1794), *Examen du mode d'élection proposé en février 1793 …*
Libri C. (1838, 1838, 1840, 1841), *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, tt. 1 – 4. Paris. Перепечатка: Bologna, 1966, 2007.
Lubbock W., Drinkwater J. E. Bethune (1830), *Treatise on Probability*. Также переплетено к Jones D. (1844), *On the Values of Annuities*, vol. 2. London.

Malfatti G. F. (1782), Esame critico di un problema di probabilità del Daniele Bernoulli etc. *Mem Mat. Fis. Soc. Ital., Verona,* t. 1, pp. 768 – 824.
Mallet (1762), Recherches sur les avantages des trois joueurs qui font entr'eux une poule au trictrac ou à un autre jeu quelconque. *Acta Helvetia Basileae*, t. 5, pp. 230 – 248.
--- (1772), Sur le calcul des probabilités. Там же, t. 7, pp. 133 – 163.
Marpurg E. (1765), *Die Kunst, sein Glück spielend zu machen.* Hamburg.
Mendelssohn M. (1761), Über die Wahrscheinlichkeit. *Phil. Schriften*, Tl. 2. Berlin, pp. 189 – 228. Второе издание: Berlin, 1771.
Michell J. (1767), An inquiry into the probable parallax and the magnitude of the fixed stars etc. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 57, pt 1, pp. 234 – 264.
Michelsen J. A. C. (1782 – 1784), *Anleitung zur juristischen, politischen und ökonomischen Rechenkunst.*
Montmort P. R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hasard*. Paris, 1713. New York, 1980.
Montucla J. E. (1758), *Histoire des mathématiques*, tt. 1 – 4. Paris, 1799 – 1802.
Morley H. (1854), *Jerome Cardan*, *The Life of Girolamo Cardano*, vols 1 – 2. London.
Nash R. (1991), *John Craig's Mathematical Principles of Christian Theology. J. Hist. Philos. Monogr. Ser*. Carbondale, Ill.
Nicole F. (1732a), Examen et résolution de quelques questions sur les jeux. *Hist. Acad. Sci. Paris*, pp. 45 – 56.
--- (1732b), Méthode pour déterminer le sort de tant de joueurs etc. Там же, pp. 331 – 344.
Ore O. (1963), *Cardano, the Gambling Scholar*. Princeton. Кроме других комментаторов, указанных Тодхантером, назовём Bellhouse (2005) и Зубовых (2010).
Pearson E. S., Kendall M. G., редакторы (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability* [vol. 1]. London.
Pearson K. (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries* etc. Лекции 1921 – 1933. Редактор E. S. Pearson. London.
Poisson S.-D. (1825 – 1826), Sur l'avantage du banquier au jeu de trente-et-quarante. *Annales math. pures et appl.*, t. 16, pp. 173 – 208.
--- (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements* […]. Paris, 2003. Русский перевод: Берлин, 2013. Также Google, Oscar Sheynin, Download Area.
Prevost P. (1782), Sur les principes de la théorie des gains fortuites. *Nouv. Mém. Acad. Berlin*, за 1780, pp. 430 – 472.
--- (1783), То же название. Там же, за 1781, pp. 463 – 472.
Prevost P., Lhuilier S. A. (1799a), Sur l'art d'estimer la probabilité les causes par les effets. *Mém. Acad. Berlin* за 1796, pp. 3 – 24.
--- (1799b), Remarques sur l'utilité et l'étendue du principe par lequel on estime la probabilité des causes. Там же, pp. 25 – 41.
--- (1799c), Sur les probabilités. Там же, pp. 117 – 142.
--- (1800), Sur l'application du calcul des probabilités à la valeur du temoignage. Там же, за 1797, pp. 120 – 151.
Rizetti G. (1729), Ludorum scientia, sive artis conjectandi elementa ad alias applicata. *Acta Erud. Suppl.*, t. 9, pp. 215 – 229, 295 – 307.
Roberts F. (1693), Arithmetical paradox concerning the chances of lotteries. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 17, pp. 677 – 681.
Rüdiger A. (?), *De sensu falsi et veri.*
Sheynin O. (1974), On the prehistory of the theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 12, pp. 97 – 141.
--- (1982), On the history of medical statistics. Там же, vol. 26, pp. 241 – 286.

Simpson T. (1740), *Nature and Laws of Chance.* London.
--- (1752), *Select Exercises for Young Proficients in the Mathematics*. London.
--- (1757), *Miscellaneous Tracts on Some Curious* […] *Subjects* etc. London.
--- (1775), *Doctrine of Annuities and Reversions*. London. Ранее было включено в книгу автора (1752).
Stewart D. (1854 – 1858), *Works*, vols 1 – 11.
Stigler S. M. (1986), John Craig and the probability of history. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 81, pp. 879 – 887. Перепечатка в книге автора (1999), *Statistics on the Table*. Cambridge (Mass.) – London, pp. 252 – 273.
Struyck N. (1716), *Uytreekening der kansen in het speelen.* Amsterdam. Французский перевод в книге автора (1912, с. 1 – 164).
--- (1912), *Oeuvres*. Французский перевод отдельных сочинений; переводчик J. A. Vollgraff. Amsterdam.
Struve F. G. W. (1827), *Catalogus Novus Stellarum Duplicium et Multiplicium*. Dorpat.
--- (1837), *Stellarum Duplicium et Multiplicium Mensura Micrometricae* … St. Petersbourg.
--- (1847 франц.), *Этюды звёздной астрономии*. Без места, 1953.
--- (1852), *Stellarum Fixarum … Positiones Mediae* … St. Petersbourg.
Sylvester J. J. (за 1864), Real and imaginary roots of algebraic equations. *Phil. Trans. Roy. Soc.*
Terrot C. H. (1853), On the summation of a compound series and its application to a problem in probabilities. *Edinb. Phil. Trans.*, vol. 20, pp. 541 – 545. Также в *Proc. Roy. Soc. Edinb*., vol. 3, 1857, pp. 173 – 175.
Tetens J. N. (1785 – 1786), *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten* etc, Bde 1 – 2. Leipzig.
Thubeuf M. (1661), *Eléments et principes de la royale et véritable arithmétique aux jetons* … Paris.
Todhunter I. (1863), *Algebra for the Beginners*. London. Не менее 20 последующих изданий вплоть до 1910 г.
--- (1873), *Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to That of Laplace*. London – New York, 1962.
Trembley J. (1796), Disquisitio elementaris circa calculum probabilium. *Comm. Soc. Reg. Sci. Gött*. за 1793 – 1794, Bd. 12, pp. 99 – 136.
--- (1799a), De probabilitate causarum ab effectibus oriunda. Там же, t. 13, pp. 64 – 119 математической части тома.
--- (1799b), Recherches sur une question relative au calcul des probabilités. *Mém. Acad. Roy. Berlin*, pp. 69 – 108.
--- (1799c), Recherches sur la mortalité de la petite vérole. Там же, pp. 17 – 38 математической части тома.
--- (1800), Essai sur la manière de trouver le terme générale des séries récurrentes.Там же, за 1797, pp. 97 – 105.
--- (1803), Observations sur les calculs relatifs à la durée des mariages et du nombre des époux subsistans. Там же, за 1799 – 1800, pp. 110 – 130.
--- (1804a), Observations sur la méthode de prendre les milieux entre les observations.Там же, за 1801, pp. 29 – 58.
--- (1804b), Observations sur le calcul d'un jeu de hasard. Там же, за 1802, pp. 80 – 82.
--- (1807), Eclaircissement relatif au mémoire sur la mortalité de la petite vérole. Там же, pp. 80 – 82 математической части тома.
Waring E. (1782), *Meditationes Algebraicae*. Английский перевод: 1991, Amer. Math. Soc.
.--- (1792), *On the Principles of Translating Algebraic Quantities into Probable Relations and*

Annuities. Cambridge.
--- (1794), *An Essay on the Principles of Human Knowledge*. Cambridge.
Watt R. (1824), *Bibliotheca Britannica*. Edinburgh.
Young M. (1800, дата выпуска тома), On the force of testimony in establishing facts contrary to analogy. *Trans. Roy. Irish Acad.*, vol. 7, pp. 79 – 118.

М. Дж. Кендалл

История математической теории вероятностей Исаака Тодхантера

M. G. Kendall, Isaac Todhunter's
History of the Mathematical Theory of Probability.
Biometrika, vol. 50, 1963, pp. 204 – 205

Тодхантер опубликовал эту *Историю* в 1865 г. Я уже некоторое время помышлял написать небольшое сообщение об её авторе и собирался сделать это к столетию со дня публикации *Истории*. Я хотел сказать, что за прошедший век ничего сравнимого не было опубликовано, но Дейвид (1962) воспрепятствовала моему замечанию, которое остаётся, однако, почти справедливым[1]. Не было никакого другого отчёта об истории теории вероятностей в форме книги, и даже сейчас XIX век остаётся не описанным.

История отличается трёмя моментами. Это – щепетильный научный труд. Сам Тодхантер ничего не внёс в теорию вероятностей, кроме этого отчёта о ней, и она почти так же скучна, как только может быть любая книга о теории вероятностей. Так кто же это был, её автор?

Исаак был вторым из четырёх сыновей священника (congregationalist minister) в Rye, родился он 23 ноября 1820 г. Его отец умер в 1825 г., оставив семью в стеснённом материальном положении, и Исаак вырос в тяжёлых условиях. Работая помощником школьного учителя в Peckham[2], он каждый вечер после работы шёл пешком 8 километров до Гоуерстрит [в Лондоне], чтобы посещать вечерние классы в Университетском колледже Лондона.

По имеющимся сведениям, он был необычно отсталым ребёнком, но, должно быть, рано справился со своим учением. В этом учебном заведении на него сильно повлиял Де Морган, но всё же он делил свои интересы между математикой и древними языками и культурой. В 1842 г. он стал Бакалавром искусств со стипендией для дальнейшего изучения математики и получил золотую медаль за свою диссертацию на степень Магистра искусств с дополнительными премиями за греческий завет и древнееврейский язык[3].

Но всё это было лишь этапами на его пути. Два года он преподавал в школе в Уимблдоне и *добыл средства* (полагаю, что это намекает на отчаянную экономию) для проживания в Кембридже в 1844 г. Про него рассказывают, что первокурсником он мог стать первым в первом почётном экзамене по математике на степень Бакалавра искусств; он им и стал в 1848 г. В том же году он получил премию за очерк, озаглавленный *Учение о божественном провидении неотделимо от веры в существование абсолютно совершенного создателя*. Как многие другие математики, он, видимо, мог хранить свои богословскую и математическую логику в различных отделах разума.

Сохранилось, быть может, всего несколько подробностей о его частной жизни в юности, да, если на то пошло, о его частной жизни вообще. Пирсон (*Math. Gazette* 1936) указал, что по отношению к своим студентам он был сторонником жёсткой дисциплины, но не сказал ничего о его умении как учителя. Его жизнь в St. John[4] была столь же безупречна, сколь и бедна событиями. Будучи студентом, преподавателем колледжа и частным учителем, он вёл уединённую жизнь среди книг, изучая, в частности, древнееврейский, арабский, персидский [фарси], русский языки и санскрит. Однажды услыхали его замечание о том, что единственным званием, которого он домогался, было Доктор богословия. И он сам заявил, что его пальцы могут только писать.

Он действительно писал с некоторым успехом. Его учебники по арифметике, Евклиду [геометрии], алгебре, дифференциальному исчислению и интегральному исчислению оставались стандартными в течение нескольких поколений[5] и издавались до 12 раз. В 1878 г., будучи экзаменатором для Гражданской службы Индии, он написал:

Комиссия Гражданской службы обеспечила экзаменаторов математической библиотекой. Она состоит из 14 томов, 10 из которых написал я.

Это замечание сносно отразило его вклад в изучение математики тогдашнего времени.

В 1862 г. его избрали в Королевское общество, и его коллеги серьёзно считали его кандидатом на должность заведующего кафедрой[6] по математике. Предоставили её Кэли, и он первым приветствовал это решение. Он никогда не заведовал кафедрой, но продолжал оказывать сильное влияние в Кембридже. Его усилия не ограничивались математикой; он был одним из учредителей экзамена по моральным наукам. Прочным вкладом в математику были его три *Истории* (1861; 1873; 1865). Можно добавить его незавершённый *Трактат об упругости*, который докончил Пирсон.

Несколько удивляет, что в 1864 г. он женился. Своей будущей жене он написал:

Вы не забудете, что я всегда изучал, и всегда буду изучать науки. Но книги не будут даже Вашими отдалёнными соперниками.
И всё же, на свой медовый месяц он взял с собой книгу Гамильтона *Кватернионы* [1853]. Его семейная жизнь была, видимо, очень счастливой, и у него было несколько детей. Он держал канареек и кошек. Не танцевал, не имел наклонности к искусству и проводил отпуска, рассматривая соборы. Был, очевидно, создан из трезвого и честного материала, но представлял собой трудную тему для биографа. В 1880 г. он начал испытывать затруднения со зрением. Болезни распространились и привели к параличу и в конце концов к смерти в марте 1884 г.

Мы, видимо, должны уделить несколько минут, чтобы рассмотреть эту жёсткую, бесцветную викторианскую личность, столь непохожую на красочных авторов, про которых он писал с таким дотошным вниманием к подробностям и так слепо по отношению к широким течениям его темы. Действительно, его *История теории вероятностей* остаётся вот уже почти сто лет без подражателей или соперников, и мы все в долгу перед ней.

Примечания

1. См., однако, последние строки заметки.

2. Peckam теперь является районом Лондона.

3. В оригинале: Greek Testament and Hebrew. Видимо, оба Завета греческой православной церкви. Ниже автор указывает, что Тодхантер изучал древнееврейский язык, так что Hebrew в этом контексте трудно понять.

4. St. John – колледж в Кембридже.

5. Можно понять: несколько поколений студентов.

6. В оригинале: Sadleirian chair. Примерно в 1860 г. леди Sadleir завещала средства, на которые была учреждена эта кафедра.

Библиография

Hamilton W. R. (1853), *Lectures on Quaternions*. Dublin.

Johnson W. (1996), I. Todhunter. *Intern. J. Mech. Sci.*, vol. 38, No. 11, pp. 1231 – 1270.

Todhunter I. (1861), *History of the Progress of Calculus of Variations during the Nineteenth Century*. Cambridge.

--- (1865 – 1869), On the method of least squares. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 1, p. 234; vol. 11, pp. 219 – 238.

--- (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to That of Laplace*. New York, 1949, 1965.

--- (1873), *Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to That of Laplace*. London – New York, 1962.

….--- (1879), *On the Arc of the Meridian Measured in Lapland*. Cambridge.

--- (1886 – 1893), *History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time*, vols 1 – 2. Cambridge.

Раздел Второй

Статьи из статистической энциклопедии
International Encyclopedia of the Social Sciences.
New York, 1968. Editor, David L. Sills

I

Уильям Краскл, Юдифь Тенюр

Введение (отрывок). Успехи статистики

William H. Kruskal, Judith M. Tanur, Introduction. IES, pp. xvii – xviii

Мы обсуждаем некоторые основные изменения в статистике и её успехи за последние 10 лет.

Предварительное исследование данных. Произошла реакция на слишком сильное увлечение статистической теорией и практикой методами умозаключений, основанными на вероятностных моделях и критериях. Эта реакция совместно с общедоступными скоростными вычислениями привела к появлению потока новых идей о менее формальной проверке, исследовании и сжатии исходных данных. Появились новые графические и табличные методы и, что важнее, была узаконена новая гибкость и свобода.

Но мы предсказываем, что маятник частично качнётся обратно. В конце концов, одно из первоначальных побуждений к применению вероятностных идей при умозаключениях состояло в желании умерять преждевременную уверенность восторженных исследователей. Предварительное исследование данных наверняка расширяет наши горизонты, однако оно может привести некоторых из нас к ненужной путанице или противоречиям.

Нам представляется, что объединение этого подхода и применения вероятностных умозаключений правдоподобно. Одной из существенных сторон недавнего подчёркивания предварительного исследования данных оказалась напряжённая работа над методами, и старыми, и новыми, для изучения часто встречающихся наборов данных. Классификация по двум и трём признакам часто уместна для анализа и упрощения по методам факторного анализа и основных компонентов, а также по методу многомерного шкалирования.

Устойчивость. Одновременно с восторженным отношением к предварительному исследованию данных возросла озабоченность устойчивостью существующих методов умозаключений при уклонении от лежащих в их основе обычных предположений. Разумеется, статистики издавна исследовали влияние отклонений от допущенной нормальности, зависимости при предположенной независимости и т. д. За последнее десятилетие подобные проблемы подверглись новым наскокам; более того, эти нападения вышли за пределы описания действия отклонений. Широко обсуждались иные методы, либо более устойчивые, либо по меньшей мере полагаемые более стойкими, чем обычные. Впрочем, редко удаётся достичь чего-то даром, и новые методы оказались

1) Менее устойчивыми относительно непредусмотренных отклонений

2) Менее эффективными в случаях, в которых обычные предпосылки на самом деле имеют место

3) Сложнее для вычислений и в своём поведении

4) Труднее для понимания и изложения

Категорические данные [принимающие некоторое значение из числа заранее назначенных]**.** Существенно продвинулась разработка новых методов анализа этих данных. Получены аналоги методов линейных гипотез, но следует быть осторожным, чтобы не слишком уж основываться на аналогиях.

Вычисления. Значение вычислений в статистической практике и теории продолжало возрастать. Материальная часть вычислительной техники становилась всё дешевле, а программное обеспечение всё доступнее. К сожалению, в то же время усилилась опасность необдуманных или беспорядочных вычислений, а также ошибочных истолкований результатов. Слишком часто данные отдаются на милость вычислительным программам, т. е. богу из машины (deus in machina).

Отношения с обществом. Возросла озабоченность относительно статистической составляющей обширных национальных программ, равно как и государственных и частных решений. Некоторые проблемы касались точности государственной статистики; честности и этики статистиков; статистических вычислений затрат и пользы; тайны сведений, полученных при переписях и исследованиях; ясной и честной передачи собранных данных; применения социальных показателей, как они стали называться; оценивания социальных программ, особенно при помощи контролируемых рандомизированных и реальных испытаний, т .е. действительных экспериментов.

II

Даниель Дюге

Жюль Бьенеме

Daniel Dugue, Bienaymé, Jules. IES, pp. 21 – 22

Жюль Бьенеме, статистик и математик, родился в Париже в 1796 г. и умер там же в 1878 г. Он учился в средней школе в Брюгге (нынешняя Бельгия) и в парижском лицее Людовика XIV. Его обучение в Политехнической школе, в которую он поступил в 1815 г., закончилось через год. Она была распущена ввиду упорства студентов в верности наполеоновскому режиму. В 1818 г. Б. стал лектором математики в военной академии в Сен-Сире, но в конце концов он поступил на государственную службу в качестве генерального инспектора финансов.

На этой службе Б. начал изучать страхование жизни, статистику и теорию вероятностей. Барон Луи, способный министр финансов во время реставрации Бурбонов, был расположен к использованию технических советов, и Б. оказался в тесной связи с его работой. Его карьера на государственной службе не прервалась революцией 1830 г., но после революции 1848 г. он вышел в отставку и начал уделять всё своё время научной деятельности.

Отставка позволила ему активно участвовать в работе различных научных обществ. Он стал членом филоматического общества (ассоциации по продвижению наук), а 5 июля 1852 г. его избрали членом Института Франции (Академии наук). К концу жизни Б. был членом-корреспондентом петербургской академии наук и Центральной статистической комиссии Бельгии и почётным членом Ассоциации химической конференции Неаполя. В качестве члена Академии наук он в течение 23 лет был арбитром по награждению премией Монтиона, высшей французской наградой за достижения в статистике, и его интересные суждения о кандидатах на эту премию можно найти в протоколах Академии.

Б. опубликовал много статей в трудах Академии, в том числе важное исследование о сериях, включающее теорему о вероятном числе максимумов и минимумов в последовательности наблюдённых чисел. Он (1853а) обнаружил очень важное неравенство: вероятность неравенства

$|X| \geq t\sigma$ не выше, чем $1/t^2$, где X – случайная величина с нулевым средним и стандартным отклонением σ. Чебышев независимо опубликовал то же самое открытие примерно через 12 лет[1].

Б. весьма привлекали научные дискуссии. Он (1853b) спорил с Коши об относительных достоинствах метода наименьших квадратов и предложенной тем интерполяции, и критиковал (1855) обобщение теоремы Якоба Бернулли Пуассоном (т. е., так называемый закон больших чисел). Там же он проницательно исследовал метеорологические данные, особенно относящиеся к осадкам.

Несмотря на свою отставку, Б. пользовался немалым влиянием в правительстве Наполеона III как эксперт по статистике. Министр Дюма восхвалял его в Сенате за содействие администрации в связи с работой по страховому делу для создания пенсионного фонда.

Примечание

1. О Бьенеме см. Heyde C. C., Seneta E. (1977) и Шейнин (2013, § 11.2), а о неравенстве Бьенеме – Чебышева, Гнеденко и Шейнин (1978). В последнем источнике (с. 212, прим. 46) указано, что Чупров высоко ценил Бьенеме.

Библиография (I. J. Bienaymé)

1837, De la durée de la vie en France depuis le commencement du XIXe siècle. *Annales d'hygiène publique et de médecine légale*, t. 18, pp. 177 – 218.

1838a, Sur la probabilité des résultats moyens des observations. Démonstration directe de la règle de Laplace. *Acad. Sci. Paris, Mém. présentés par divers savants*, sci. math. et phys., sér. 2, t. 5, pp. 513 – 558.

1838b, Probabilité des jugements et des témoignages. *Soc. Philomatique Paris*, *Extraits des procès-verbaux des séances*, sér. 5, t. 3, pp. 93 – 96.

1853a, Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. *C. r. Acad. Sci. Paris,* t. 37, pp. 309 – 324. Перепечатка: *J. Math. Pures et Appl*., t. 12, 1867, pp. 158 – 176.

1853b, Remarques sur les différences qui distinguent l'interpolation de Cauchy de la méthode des moindres carrés etc. Там же, pp. 5 – 13.

1855, Sur un principe que Poisson avait cru découvrir etc. *Acad. Sci. Morales et Politiques, Séances et travaux*, t. 31, pp. 379 – 389.

1875, Application d'un théorème nouveau du calcul des probabilités. *C. r. Acad. Sci. Paris,* t. 81, pp. 417 – 423.

Другие авторы

Гнеденко Б. В., Шейнин О. Б. (1978), Теория вероятностей. Глава в книге *Математика XIX века*. Ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М., с. 184 – 240.

Шейнин О. Б. (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин, 2013, § 11.2. Также Google, Oscar Sheynin, Doiwnload Area.

Heyde C. C., Seneta E. (1977), *Bienaymé*. New York.

III

Анри Гиттон

Антуан Огюстен Курно

Henri Guitton, Cournot, Antoine Augustin. IES, pp. 87 – 90

Курно (1801 – 1877), французский математик, экономист и философ, был сыном нотариуса. Он родился в Гре (Верхняя Сона), а его предками были крестьяне, жившие по крайней мере с середины XVI в. в Франш-Конте. До 15 лет К. посещал колледж в Гре; в течение последующих четырёх лет он очень много читал, особенно сочинения таких учёных и философов, как Лаплас и Лейбниц. Подготовившись в [университете в] Безансоне, он поступил на научное отделение Высшей нормальной школы в Париже. Через год реакционный режим закрыл Школу, но К остался в Париже и в 1823 г. стал лиценциатом [получил диплом] по наукам. К. посещал собрания [Парижской] академии наук и сблизился с основными учёными того времени, один из которых познакомил его с Прудоном.

В октябре 1823 г. К. поступил на службу маршалу Сен-Сиру в качестве его литературного советника, поскольку тот хотел закончить составление некоторых рукописей, и домашнего учителя его сына. В доме Сен-Сира К. провёл 10 лет, всё время продолжая свои научные занятия. В 1829 г. он стал доктором наук, написав основной тезис по механике и дополнительный – по астрономии. К. также изучал право, а его опубликованные научные статьи привлекли внимание великого математика, Пуассона, профессора Политехнической школы, а позднее Парижского университета.

В то время Пуассон ведал преподаванием математики во всей Франции, и он назначил К. заведовать кафедрой математического анализа на факультете наук в Лионе. Впрочем, К. преподавал лишь один год, в дальнейшем же в основном занимался административной работой в университетах, притом очень успешно. В 1835 г. он стал ректором Академии в Гренобле, затем генеральным инспектором университета в Дижоне, а в 1854 – 1862 гг. ректором тамошней Академии. После этого К. отказался от официальных должностей, вернулся в Париж и умер там как раз тогда, когда намеревался просить о членстве в Институте Франции. К концу жизни он почти ослеп.

Административная работа оставляла К. достаточно времени для научной работы (!), но, к сожалению, в его книгах чувствуется отсутствие стимула, который приобретает преподаватель при общении со своей аудиторией. С 1838 по 1877 гг. К. опубликовал 10 книг, посвящённых трём основным темам: 1) алгебра, анализ бесконечно малых и исчисление вероятностей; 2) теория богатства и 3) философия науки и истории и даже общая философия.

Эти темы были взаимно связаны, и, хотя мы делаем упор на его экономические исследования, следует помнить о дальновидном единении его мысли. К. начал с математики, затем его привлекла экономика, а закончил он общим истолкованием мира, проникнутым его глубоким пониманием вероятностей. Именно понятие вероятности объединяет все три темы его сочинений.

Довольно меланхолический характер и стремление уединяться существенно отсрочили то влияние, которое К. стал в конце концов оказывать. Скромный и застенчивый, он не предпринимал никаких усилий, чтобы сделать свои книги привлекательнее. Они в основном написаны просто и наполнены фактами и доказательствами и даже их названия отражают его скромность: *Исследования, Очерк, Размышления*. Неудивительно, что он менее известен в теории вероятностей, чем Лаплас и Пуассон[1], менее цитируется экономистами, чем Бастиа, Сэй или Прудон (если ограничиться французами) и что философы также ссылаются на него реже, чем на Конта или Спенсера. И всё же К., обладая редкостными познаниями, необходимыми для использования языка всех этих авторов, перенял многие из их качеств и в некоторой степени пророчески объединил их идеи.

Математика и теория вероятностей[2]. Если не касаться эконометрии, то математические труды К. появились в 1840 – 1850 гг. Он (1843) определил статистику как науку сбора и согласования многочисленных фактов любого вида. Её целью было выявление количественных отношений, в основном не зависящих от аномалий случая и проявляющих существование равномерно влияющих причин, действие которых, однако, нарушается случайными возмущениями.

Живши в первой половине XIX в., К. находился на перекрёстке двух математических направлений. Одно, возникшее у Паскаля и Ферма, привело к трудам Жака (!) Бернулли, Гаусса, Лапласа и Пуассона, относящимся к учению о случае. Другое, отказываясь от математического изучения случая и неопределённостей, сосредоточилось на математике строгого детерминизма, не допуская ни малейшей неопределённости, будто наука была полностью детерминирована[3].

Представление о том, что совершенное означает детерминированное, сыграло существенную роль в раннем развитии экономики, и заметно в ещё принятом термине *совершенная конкуренция*. К. предвидел, что наука не может тесно и окончательно ограничиваться подобным детерминизмом, и полагал, что наука об особых областях и случае не только возможна, но быть может лучше приспособлена к требованиям экономики, чем наука совершенно точных равновесий. Тем не менее, считают, что именно К. ввёл в экономические теории детерминированную математику.

Экономика. К. опубликовал три книги по экономике (1838; 1863; 1877) и таким образом его научная карьера началась с них и окончилась с ними. Вначале его первая работа оказалась такой неудачной, что К. на 25 лет оставил экономику. В следующей книге он перевёл на *литературный* язык то, что раньше описал математически, и всё же она была встречена не лучше предыдущей. И действительно, сочини К. только свои нематематические труды, он был бы признан лишь незначительным автором.

Строго говоря, К., конечно же, не был первым, применившим математический язык для выражения экономических проблем. Во Франции был Ник. Canard, на которого К. ссылался, но он не обладал широтой взглядов или эрудицией последнего. Для объединения экономики и математики требуются громадные познания, и если математическая экономика испытывала серьёзные трудности, то потому, что её не всегда направляли такие ясно мыслящие умы как Курно.

Большая заслуга К. состоит в том, что, не указывая этого явно, он впервые построил истинную теорию цен и рынков. Он (1838, гл. 4, О законе спроса) предложил первую модель указанного типа. К. интересовался только спросом, за которым следовала действительная продажа и который поэтому наблюдаем и измерим. Признаётся, что он выявил понятие функции[4] и ознакомил экономистов с исключительно полезным языком функциональных понятий. Вообще говоря, продажа является убывающей функцией цены. Эта функция непрерывна, по крайней мере, если число потребителей не ограничено, и, более того, эта функция не является чисто отвлечённым понятием, её можно построить на основе среднегодовых наблюдённых данных. А поскольку она не просто задаётся с самого начала, а оказывается эмпирической, экспериментальной, можно считать, что К. сделал первый шаг в развитии эконометрии.

В этом анализе эконометрического типа сопутствующая идея состоит в несовершенстве и, следовательно, в неопределённости, и далее в случайности при измерении. Здесь снова знание вероятностей спасло К. от неверного увязывания математики с идеей строгой точности. Он

(1838/1960, с. 48) утверждал, что если даже цель численных вычислений

не может быть достигнута, всё же уместно при помощи неопределённого символа ввести неизвестный закон спроса в аналитические комбинации. Действительно, хорошо известно, что одна из наиболее важных задач анализа заключается именно в назначении определённых отношений между величинами, численное значение и даже алгебраические формы которых совершенно невозможно установить.

И далее (с. 48 – 49)

Мы должны отказаться от попыток понять то, чего нельзя понять строго, и может быть именно поэтому мы обязаны рассуждать математически […], *показывая, какие детерминированные отношения существуют между неизвестными величинами. Анализ сводит эти неизвестные количества к их наименьшему возможному числу и направляет наблюдателя к лучшим наблюдениям для отыскания их значений. Он* [анализ] *сокращает и координирует статистические документы и облегчает работу статистиков.*

Первая конструкция К. выполнена в этом духе. Он составил в подходящих границах таблицы соответствия между значениями спроса $D = f(p)$ и цены p. На второй стадии он рассматривал функцию $pf(p)$, т. е. полную стоимость проданного товара, что и становится сутью теории рынков. Задолго до Альфреда Маршалла К. представил теорию эластичности: в зависимости от знака неравенства $\Delta D/\Delta p < D/p$ или $> D/p$ повышение цены увеличит или уменьшит произведение $pf(p)$. Коммерческая статистика поэтому должна начинаться с подразделения товаров на две категории в зависимости от того, является ли их нынешняя цена ниже или выше значения, приводящего $pf(p)$ к максимуму. Сформулировав это положение, К. стал поистине великим новатором.

К. продвигался медленно, непосредственно не исследуя общего равновесия цен, как это позже сделали Вальрас и Парето. Он начал с монополии, затем перешёл к конкуренции между несколькими участниками, и, наконец, рассмотрел случай неопределённой или неограниченной конкуренции, и для завершения своей теории ввёл взаимосвязь рынков.

Этот подход критиковался, потому что экономисты в классической традиции идут [шли] в обратном направлении, начиная с неограниченной, или, как они говорят, совершенной конкуренции, и кончая монополией. Но точка зрения К. была воспринята в современной теории игр и рационального поиска решений. Хоть Бертран (1883) и раскритиковал теорию дуополия К., теория двусторонней монополии была позднее построена на аналогичном основании.

Модель двух сторон была изменена на трёхстороннюю (триполию), а при возрастании их числа систему назвали олигополией, плиополией и, наконец, полиполией. И чем больше это число, тем ближе эта модель приближалась к модели классической конкуренции. Сегодня составители моделей уже не верят, что существует непреодолимое различие между моделями со многими и с несколькими элементами. Вместо этого, в традиции модели К., которую вначале так плохо понимали, они соотносят теорию рынков с общей теорией экономического взаимодействия. Многому всё ещё следует поучиться у его модели 1838 г. К. был оправдан, но его вклад в экономику не исчерпан.

Философия. В трудах К. возникает философия порядка и истории. Вопреки кажущемуся, он уверенно утверждал, что случай не подразумевает беспорядка. Теория вероятностей указывает на закономерности [случая], пересечения многих независимых рядов детерминированных событий, и позволяет объединить науки с философией. Значение истории, при всей её бессвязности, и будущего, при всёй его непредсказуемости, тесно соотносятся друг с другом. Выявление хода идей и событий является задачей познания и призванием человеческого разума.

[Вывод]. К. был пионером. Он совсем не искал расположения современников, им же не только не удалось признать его, они не обращали на него никакого внимания. Должный разворот и его торжество произошли через 80 лет после его смерти: самая передовая школа экономики признала его своим предком[5]. Теория вероятностей, всю значимость которой К. представлял себе, является жизненной составляющей структуры современной науки. Проблемы, которые не интересовали его современников, направляют построение завтрашнего мира[6]. Он предвидел озабоченность предсказаниями и решениями, которая теперь поглощает внимание экономистов.

Примечания

1. Автор не представляет себе истории теории вероятностей.

2. Не следует противопоставлять математику и теорию вероятностей.

3. Математики признавали серьёзную прикладную роль теории вероятностей, но *перекрёсток* наступил позднее, в связи с появлением теории эволюции видов и кинетической теории газов.

4. Понятие функции было введено и развивалось математиками.

5. Не следует забывать Даниила Бернулли, который в 1738 г. ввёл моральное ожидание, ставшее исходным понятием в теории предельной полезности.

6. Неудачная фраза.

Библиография

А. О. Курно

1838, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie de la richesse*. *Œuvr. Compl.* (ОС), t. 8. Paris, 1980.

1843 франц. *Основы теории шансов и вероятностей*. М., 1970.
1851, *Essai sur les fondements de nos connaissances*. OC, t. 2. Paris, 1975.
1861, *Traité de l'enchainement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire.* OC, t. 3. Paris, 1982.
1863, *Principes de la théorie des richesses.* Paris.
1875, *Matérialisme, vitalisme, rationalisme*. OC, t. 5. Paris, 1979.
1877, *Revue sommaire des doctrines économiques*. Paris.
1913, *Souvenirs (1760 – 1860).* Paris.

Другие авторы

Вайнштейн Альб. Л., Четвериков Н. С. (1970), Ог. Курно и его вклад в теорию вероятностей. В книге Курно (1843/1970, с. 5 – 24).
Шейнин О. Б. (2002), О теоретико-вероятностном наследии Курно. *Историко-математич. исследования*, вып. 7 (42), с. 301 – 316.
Bertrand J. (1883), Рецензии на трактат Вальраса и на Курно (1838). *J. des savants*, pp. 499 – 508.
Edgeworth F. Y. (1894), A. A. Cournot. *Palgrave's Dict. of Political Economy*, vol. 1, pp. 445 – 447.
Fisher I. (1898), Cournot and mathematical economics. *Q. J. Econ.*, January.
Loiseau G. (1913), *Les doctrines économiques de Cournot*. Paris.
Roy R. (1933), Cournot et l'école mathématique. *Econometrica*, vol. 1, pp. 13 – 22.

IV

Эберхард Фельс

Оскар Андерсон, 1887 – 1960

Eberhard M. Fels, Anderson, Oscar N. IES, pp. 1 – 3

[…][1] **[1]** В 1917 г. Андерсон проводил статистические исследования в крупном кооперативном товариществе на юге России и одновременно продолжал обучаться в Киевском коммерческом институте, доцентом которого он стал в 1918 г. В то же время он занимал административную должность в Демографическом институте Украинской академии наук. В Киеве он познакомился с Е. Е. Слуцким, который, возможно, повлиял на него.

Как и многие русские научные работники того времени, А. придерживался левых взглядов[2], однако в 1920 г. ввиду политических потрясений он покинул Россию. Через год он стал директором школы в Будапеште, с 1924 по 1933 гг. был профессором Коммерческого института в Варне, в Болгарии, затем до 1942 г. занимал ту же должность в Софийском университете. С середины 1920-х годов А. был членом Высшего статистического совета при правительстве Болгарии.

Он успешно выступал за применение выборочного метода в дополнение к сплошному счёту при переписи населения и промышленности 1926 г. В 1931 – 1932 гг. по инициативе Андерсона было проведено крупномасштабное выборочное обследование сельскохозяйственной продукции и производителей. В 1936 г., основываясь на преднамеренном выборочном методе, он начал полностью пересматривать кадастр и урожайность. В 1933 г. А. получил стипендию Рокфеллера, посетил Англию и Германию и в результате опубликовал свой первый учебник (1935). Он стал членом-учредителем Эконометрического общества и автором энциклопедической статьи (1934) о статистическом методе, а с середины 1930-х годов был советником [по статистике] Лиги Наций. В 1940 г. болгарское правительство послало его в Германию изучать введенную там систему нормирования.

В 1942 г. А. принял назначение в Кильский университет, а с 1947 г. до конца жизни он оставался профессором статистики на факультете экономики Мюнхенского университета и одним из редакторов журнала, который позднее стал называться *Metrika*. В конце жизни его авторитет в немецких статистических кругах [по крайней мере в Западной Германии] был непререкаем. В основном его усилиями и несмотря на различные неблагоприятные влияния статистическое образование экономистов в немецких университетах [Западной Германии] либо улучшилось, либо оставалось на разумном уровне.

[2] Основные труды. Вот их краткая характеристика (Wold 1961, pp. 651 – 653).

Ход внешних событий в жизни А. отражал беспорядок и агонии Европы, раздираемой войнами и революциями. Его научная работа, всегда отличавшаяся личной вовлечённостью, достаточно значима, чтобы надолго оставаться интересной. […] *Некоторые его начинания опередили своё время, поскольку на их направление ещё не было обращено должного внимания. Так, его упор на причинное исследование данных, полученных вне эксперимента, напоминает нам, что этот важный раздел прикладной статистики разработан намного хуже, чем описательная статистика или исследование эксперимента*. […]

Основная мощь научного наследства А. состоит, как я полагаю, в систематическом согласовании теории и приложений. Лишь в небольшой степени его значимость определяется конкретными сочинениями. […]

Несмотря на эту убедительную оценку, представляется желательным рассмотреть некоторые достижения А.

Выборочные обследования. Рукописи, содержавшие материалы выборочного обследования 1915 г. в Туркестане, а также и статистики населения в 1916 – 1917 гг., были утеряны но, пожалуй, можно уверенно предположить, что они были ценными. Нам известно первое выборочное обследование в Болгарии, которое А. (1929a) спланировал и ход которого он контролировал.

Метод последовательных разностей для временных рядов. По существу он основан на теореме о том, что n-я разность многочлена n-й степени постоянна, а $(n + 1)$-я разность равна нулю. При некоторых предположениях он применяется для исследования временных рядов; одна из этих предпосылок чувствительна: случайные ошибки не должны быть автокоррелированы. А. разработал этот метод одновременно со Стьюдентом (Tintner 1940, pp. 10 – 15), но их новшество не нашло всеобщего одобрения. И всё же оно послужило отправной точкой различных теоретических изысканий. Сам А. (1954/1957, с. 178 – 180) представлял себе ограничения этого метода. Но вот его острая критика (1929b) Гарвардского метода исследования временных рядов окончательно опозорила подобные формальные процедуры.

Количественная экономика. Исследование возможности проверки количественной теории денег (А. 1931) стало экономической классикой, потому что он воспользовался возникшим к тому времени осознанием значимости случайных остаточных величин.

Некоторые его статьи исследуют причины расходящихся цен на сельскохозяйственные и промышленные товары. В утерянных рукописях А. была критика теории Н. Д. Кондратьева о длинных волнах в экономических циклах. Вклад А. в теорию индексных чисел оказался и конструктивным, и критическим и он (1952) особенно возражал против цепочечных индексов.

Теория вероятностей и непараметрические методы. По существу А. (например, 1954/1957, с. 98 – 100) придерживался эклектической и несколько видоизменённой частотной теории. Так, он полагал, что в большинстве задач социальной статистики урновые модели с конечным содержанием были более подходящими, чем с бесконечными. Соответственно, он возражал против чересчур частого обращения к центральной предельной теореме. В статьях о непараметрических методах А. (1955a, b) имел в виду расширить применимость методов корреляции и регрессии к социально-экономическим явлениям.

Учебники. В своём первом учебнике А. (1935) попытался изложить статистические методы XX века на до-университетском математическом уровне. Ввиду времени публикации и преобладающих в то время учений этот учебник, видимо, оказал более сильное влияние вне Германии, чем в ней самой. Впрочем, его второй учебник (1954) выдержал три издания за три года. Он был необычен особо присущими автору краткими и интересными анекдотами и обилием исторических, биографических, ведомственных и математических отступлений.

[3] Ученики. Больше всех известны его ученики, ставшие профессорами в Германии: Ганс Келлерер в Мюнхене, Генрих Штреккер[3] в Тюбингене и его сын Оскар в Мангейме. Что явно характеризует их, и особенно первых двух, как последователей А., это сильный интерес и участие в проектировании выборочных обследований, забота о реальном осуществлении статистических работ и чёткие оговорки по поводу абстракций, не имеющих отношения к практике. Штреккер также разрабатывал варианты метода последовательных разностей.

Примечания

1. Мы опустили начало статьи, поскольку приведенные в нём сведения известны (Шейнин 1990/2010, § 7.8). Там же в § 15.6 помещены тексты писем, которыми обменялись Андерсон и Пирсон в 1914 г. Но укажем прежнюю статью автора об Андерсоне: *Econometrica*, vol. 29, 1961, pp. 74 – 79.

2. Остались ли эти левые взгляды в 1920 г.?

3. В разговоре с нами Штреккер как-то сказал, что в своих лекциях Андерсон часто вспоминал Чупрова, и что он, Штреккер, чувствует себя как бы сыном Андерсона и внуком Чупрова. Он умер в 2013 г.

Библиография

О. Андерсон

1929a (болг.), *Über die repräsentative Methode und deren Anwendung* […]. München, 1949.

1929b, *Zur Problematik der empirisch-statistischen Konjunkturforschung: kritische Betrachtung der Harvard-Methoden.* Bonn.

1931, Ist die Quantitätstheorie statistisch nachweisbar? *Z. f. Nationalökonomie*, Bd. 2, pp. 523 – 578.

1934, Statistical method. *Enc. of the Social Sciences*, vol. 14, pp. 366 – 371.

1935, *Einführung in die mathematische Statistik*. Wien.

1952, Wieder eine Indexverkettung? *Mitteilungsblatt f. math. Statistik*, Bd. 4, pp. 32 – 47.

1954, *Probleme der statistischen Methodenlehre in den Sozialwissenschaften*. Würzburg. Пятое издание: 1965.

1955a, Eine "nicht-parametrische" […] Ableitung der Streuung […]. *Mitteilungsblatt f. math. Statistik*, Bd. 7, pp. 85 – 112.

1955b, Wann ist der Korrelationsindex von Fechner "Gesichert" […]. Ibidem, pp. 166 – 167.

1963, *Ausgewählte Schriften*, Bde 1 – 2. Редактор H. Strecker. Tübingen. Включает все упомянутые выше статьи. Отдельно указаны не включённые сочинения.

Другие авторы

Хрестоматия (2007), *Четвёртая хрестоматия по истории теории вероятностей и статистики.* Берлин. Также Google, Oscar Sheynin, Download Area. Содержит статьи Андерсона о Чупрове и Борткевиче.

Шейнин О. Б. (1990), *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка.* М., 2010. Также Google, Oscar Sheynin, Download Area.

Tintner G. (1940), *The Variate Difference Method*. Bloomington, Ind.

Wold H. (1961), Oskar Anderson, 1887 – 1960. *Annals Math. Stat.*, vol. 32, pp. 651 – 660.

V

Дадли Кирк

Демография. Обзор

Dudley Kirk, Demography. The field. IES, pp. 136 – 144

[1. Предисловие]

Демографией называют количественное изучение населения. Её основными источниками служат переписи, статистика гражданского состояния и в возрастающей степени выборочные исследования. Её основные задачи состоят в измерении и [последующем] открытии закономерностей в основных процессах рождения, смерти, передвижения и приросте населения. Эти явления изучаются и в социально-экономическом, и в биологическом отношении.

Демография пользуется эмпирическими и статистическими методами и применяет математику повышенного уровня в той же степени, что и любая отрасль социальных наук. Как и антропология [антропометрия] и психология, демография соединяет социальные и биологические науки. Термин *демография* видимо впервые применил Guillard (1855) и происходит он от греческих *демос* (народ) и *графейн* (рисовать, описывать). До последнего времени это слово не было в общем ходу у англоговорящих народов, и тот, кто применял его, часто становился жертвой типографий или случайных слушателей, которые упорно путали его с *демократией*.

Самый широко известный в США в 1930 – 1960 гг. учебник о проблемах населения (Thompson & Lewis 1930) употребил его лишь в четвёртом и пятом изданиях, да и то мимоходом. Тем не менее, и употребление, и значение термина *демография* расширяются; полагают, что он описывает научную составляющую изучения населения [см. также § 1.2].

1.1. Формальная демография. Обычно различают *формальную* или *чистую* демографию и более широкое изучение населения. Первое является хорошо определённой темой, обладающей высоко развитой математической методологией. В основном оно занимается измерениями и исследованием компонент изменения населения, особенно рождениями, смертями и т. д. и в меньшей степени миграцией. Формальная демография интересуется структурой населения, т. е. возрастом, полом, брачностью, поскольку это способствует пониманию изменений населения.

Она обеспечила математические модели в социальных науках одним из самых плодотворных приложений. Они применяются 1) для составления таблиц дожития, указывающих условия работы системы страхования жизни и социальной защиты от безработицы и нужды; 2) для установления истинной скорости воспроизводства и других (?) утонченных мер рождаемости, что весьма способствовало пониманию векового падения рождаемости на Западе и её колебания после второй мировой войны; 3) для исследования устойчивости населения, которое установило методы оценки рождаемости и прироста населения при отсутствии надёжной статистики и часто с очень неточными данными переписей и экстраполяциями (projections)[1] численности населения, основанными на анализе тенденций в компонентах изменения населения.

Подобные экстраполяции пользуются большим спросом для целей экономического развития, исследования рынка, планирования городов и образования, оценки будущего экономически активного населения и многих других подходов к оценке [численности] производителей и потребителей.

Для целей страхования жизни демография обычно определяется в узком смысле формальной демографии (Cox 1950). Именно это определение преобладает в некоторых европейских странах, особенно в Италии.

1.2. Более широкие приложения. В более широком и всё более популярном понимании термин *демография* применяется и для изучения демографических переменных в их социальных и биологических рамках. При этом подходе демографические изменения считаются частью, равно как и причиной, и результатом соответствующего социального окружения. Демографический анализ стал означать (Spengler & Duncan 1956/1963, c. xiii)

не только статистическую переработку данных о населении, но, более существенно, изучение этих данных в качестве метода решения эмпирических проблем.

Кроме компонентов изменения населения демографические переменные, как несколько произвольно считается, включают те массовые характеристики населения, которые обычно указываются в переписях: количество и распределение населения, его биологический состав по возрасту и полу и некоторые легче измеримые социально-экономические признаки.

Из этих переменных более определённо объектами демографии обычно считаются данные о количестве населения, его географическом распределении (включая подразделение на городское и сельское), о возрастах, половом составе, брачности. Другие социально-экономические характеристики, как раса, язык, религия, образование, занятие и доход изучаются сами по себе и часто по отношению к групповым различиям в рождаемости, смертности и миграции.

Это более широкое определение демографии неизбежно включает междисциплинарные [промежуточные] темы, потому что демографы и другие социологи могут изучать население по отношению к иным переменным. Так, изучение миграции между селом и городом можно считать демографическим, если оно в основном направлено на измерение и установление количественных единообразий; экономическим или социальным, если оно связано с экономическими или социальными причинами и следствиями. Жёсткого разделения нет, его и не следовало ожидать. За пределами определённой дисциплины, формальной демографии, не существует определяющего критерия демографии как таковой, разве что её занятия количественным измерением населения. И можно сказать, что предмет демографии включает те теории населения, которые основаны на подобных измерениях и обобщениях, но не на формулируемых заранее на более абстрактном и спорном уровне.

2. Развитие демографии

Различные формы переписей проводились уже в древности. Римская перепись имела место при императоре Августе в год рождения Христа (что заставило Иосифа и Марию отправиться в Бетлехем, чтобы числиться в месте проживания их предков). Обширная перепись была проведена в Китае во 2-м году н. э. при правлении династии Хань. Подобные изолированные переписи исключительно интересны для истории демографии, однако современные переписи, пригодные для научных целей, по существу ведут начало с XIX в. Регулярные переписи с интервалом в 10 лет начались в США в 1790 г., а во Франции и Англии в 1801 г. Важным исключением были реестры населения в Скандинавии, известные в Швеции с 1686 г., и в Дании с 1769 г.

2.1. Началом демографии была статистика гражданского состояния. Эмпирическая демография ведёт начало от статистики гражданского состояния у Граунта (1662). Он изучил текущие сводки о похоронах и крещениях для населения примерно в 500 тыс. человек в районе Лондона. Само название его книги поясняет, что корнями демографии служат и биологические, и социальные исследования[2]. В 1670-е годы Уильям Петти, продолжая работу Граунта, составил трактат о *политической арифметике* [опубликован в 1690 г.], как он назвал эту дисциплину. Постепенно демография была включена в новое и более общее изучение статистики, так что в США, к примеру, забота о точности и последствиях статистики гражданского состояния привела в 1839 г. к учреждению в Бостоне Американской статистической ассоциации.

Примечательна линия развития биостатистической традиции в демографии (Lorimer 1959). Интерес к ней привёл к попыткам объяснять изменения в населении математическими процессами и особенно логистическими кривыми. Исследователи XIX в., например, Кетле и Verhulst[3], представляли изменения населения при помощи механических моделей, а позже и биологическими причинами (Pearl & Reed 1920; Lotka 1925; Udny Yule 1925).

Механические и биологические детерминированные модели в конце концов оказались неубедительными, но они привели к значительному развитию статистического анализа процессов рождения и смерти. Выдающимися среди соответствующих трудов были результаты Лотки по вычислению скорости воспроизводства и истинных скоростей естественного прироста населения, при котором его возрастная структура не изменяется.

Применение стохастических и детерминированных математических моделей возродилось в демографии, возможно в связи с модой на составление моделей в социологии вообще, и наверняка ввиду возможностей современной вычислительной технологии.

2.2. Теория Мальтуса. Экономический подход к демографии обычно прослеживается до работы Мальтуса, хоть он и с готовностью признавал сочинения своих предшественников. Его сочинение (1798) несомненно обсуждается в демографии более всех других. Хоть Мальтус и видоизменил свою точку зрения в последующих изданиях своего труда, он придерживался общего взгляда на то, что население стремится возрастать быстрее средств существования и поэтому поглощает все экономические достижения, если только это возрастание не ограничивается моральными соображениями, преступностью и нищетой.

Влияние Мальтуса было огромным, но его точка зрения была впоследствии поставлена под сомнение с трёх сторон. Во-первых, в течение XIX в. экономический рост намного превосходил прирост населения европейских народов, что привело к повышению уровня жизни. Во-вторых, несмотря на это повышение, рождаемость снизилась вначале во Франции и Швеции, а к 1880 г. во всей Западной Европе. Наконец, либералы и марксисты заявили, что нищета являлась результатом несправедливых социальных институтов, а не прироста населения. Вне зависимости от верности этого довода, он привёл к тому, что изучение населения стало связываться с консервативной социальной философией Мальтуса, и это замедлило развитие демографии как науки (Lorimer 1957, с. 21):

Брак незрелых демографии и экономики при богослужении “пастора” Мальтуса оказался бурным и бесплодным. Динамика взаимодействия *экономических факторов, и общего направления рождений, смертей и т. д. в связи со структурой населения долгое время пренебрегалась в указанном спешном синтезе с излишним упором на отношение населения к ресурсам и вытекающей теорией условно принятого жёсткого "оптимума".*

Это привело к ошибочной предпосылке о том, что возрастание населения наверняка благоприятно стране с его низкой плотностью и к неоправданному пессимизму о возможностях экономического прогресса в густо населённых странах.

Неудовлетворённость мальтузианским подходом привела к отрыву демографии от экономики и длительному подозрению со стороны некоторых экономистов в том, что демография чересчур подчёркивает мощную роль прироста населения и что контроль этого роста в развивающихся регионах в каком-то смысле отвлекает внимание от главной задачи экономического развития и даже угрожает ему. Поэтому на экономику изменений населения в современном мире, хоть она и не была полностью забыта, не обращали должного внимания. Ныне, в англоязычном мире, в основном отделённая от экономики, демография обычно преподаётся в качестве ветви социологии.

2.3. Рождаемость в Западном мире. В своём социологическом качестве изучение населения возникло как наука в 1920-е и 1930-е годы. До того времени рождения, смерти и естественный прирост населения обычно считались биологически заданными, внешними и для экономики, и для социальной системы. Но в период между мировыми войнами общее снижение рождаемости в Западном обществе стало отчётливо заметным и оказалось основной целью демографических исследований. Они указали на социальные, а не биологические соотношения как на решающие факторы этого снижения.

Итак, эмпирические исследования установили, что это снижение было результатом не биологической бесплодности, а вызывалось сильным побуждением к добровольному ограничению рождаемости. Даже сейчас быть может недостаточно известно, что вначале снижение рождаемости при помощи противозачаточных средств было в основном результатом *мужских* методов, особенно прерванных половых актов, а позднее применения кондомов. Основным *женским* методом был аборт (Tietze 1968).

Феминистское движение за контроль рождаемости было шумным, часто смелым и, разумеется, психологически важным, но существует мало эмпирических свидетельств того, что отстаиваемые им методы или предоставляемые им услуги когда-либо оказывались существенными для уменьшения рождаемости в Западном мире.

В большой части этого мира основными методами контроля рождаемости всё ещё являются прерванные половые акты и аборты, хоть они всё больше заменяются новыми методами, ставшими общедоступными лишь с 1960 г.

Другой основной заботой демографов была *дифференцированная плодовитость*, т. е. общее наблюдение того, что контроль рождаемости был вначале больше принят городскими, лучше образованными группами населения с высоким доходом, так что последовало различие рождаемости по месту жительства (город и село), образованию и классу. Демографы желали ограничиться измерением этих различий, но их наблюдения усилили озабоченность *качеством* населения, поскольку различие классов по рождаемости явно, как казалось, благоприятствовало воспроизводству социальных и экономических неудачников, а возможно и генетически худших.

Очевидная роль социального окружения и добровольного контроля в снижении рождаемости привело к новому пониманию того, что рождаемость и смертность, как и миграция, являются и следствием, и причинами социальных изменений и зависимыми и независимыми переменными относительно общества. Некоторые [демографы] чувствовали, что существовавшие общие направления беспокоили и даже тревожили, угрожали *самоубийством расы* и ухудшением *качества*.

Сильнее всего на снижение рождаемости реагировали тоталитарные страны. По националистическим причинам они приняли политику повышения рождаемости[4], к примеру, пропагандируя более многочисленные семьи, вводя семейные пособия, запрещая аборты, ссужая деньги новобрачным с уменьшением долга в период его погашения после рождения каждого ребёнка, учреждая *медали материнства* для родителей (?) многодетных семей, предоставляя различные преимущества в налогообложении и социальном страховании.

До второй мировой войны подобные меры приняли фашистская Италия, нацистская Германия, Советский Союз и Япония. Некоторые из упомянутых мер, лишённые, однако, националистических наслоений, приняли Франция и Швеция (Eldridge 1968). Англоязычные страны медленнее реагировали на убывание рождаемости. В США эта проблема усиленно изучалась Комитетом национальных ресурсов (*Problems* 1938). В Великобритании и Канаде семейные пособия были введены после второй мировой войны, а в Великобритании была создана Королевская комиссия по населению. Она издала отчёт, который оказался поворотным пунктом в национальном мышлении на эту проблему (Great Britain 1949 – 1954).

Влияние этих мер по повышению рождаемости оказалось спорным. Единственными явными случаями умеренного успеха стало повышение рождаемости, достигнутое в нацистской Германии и Советском Союзе. В Германии запрещение абортов и поддержка более ранних браков и рождений ссудами новобрачным способствовали повышению рождаемости с 14,7 в 1933 г. до 20,3 [с 1,47 до 2, 03%] в 1939 г. (Kirk 1942; Yearbook 1948, с. 262). Впрочем, значительная доля этого роста была почти наверняка обусловлена общим улучшением экономических условий и особо снижением безработицы. В Советском Союзе запрет абортов оказался особо успешным в городах, потому что ранее они были разрешены и даже предоставлялись в порядке государственной меры здравоохранения[5]. В середине 1950-х годов аборты были вновь разрешены, и теперь рождаемость в Советском Союзе очень низка. После второй мировой войны наблюдатели во Франции указали, что семейные пособия способствовали сохранению более высокой рождаемости в стране.

2..4. Теория революции в гражданских состояниях. В западных странах были отмечены важные закономерности в убывании смертности и рождаемости во времени и в пространстве. Развёртывание этого убывания смертности, а затем рождаемости является хорошо документированным примером распространения культуры. Исходя из указанных закономерностей, были выведены некоторые общие предложения о последовательности демографического развития в современном мире. Взятые совместно, эти предложения стали называться *теорией революции в гражданских состояниях* или *теорией демографического преобразования*.

В соответствии с этой теорией в прежних обществах и рождаемость, и смертность были высокими, и население воспроизводилось неполностью, поскольку для возмещения высокой смертности необходима сравнительно неограниченная высокая рождаемость. Исходным результатом модернизации явилось снижение смертности, видимо вызванная повышением уровня жизни, введением эпидемического контроля и других простейших мер общественного здравоохранения.

Без сравнимого убывания рождаемости происходит растущее преобладание рождений над смертями и возрастает скорость прироста населения. На более поздней стадии социально- экономического развития с успехами общей грамотности, ростом городов и индустриализацией (как в Западных странах и Японии) численность семей убывает ввиду контроля рождаемости и её убывания. В конце концов скорость прироста снижается.

Теория демографического преобразования правдоподобно истолковала демографические события вплоть до второй мировой войны, затем демографы попытались распространить её во времени, экстраполируя существовавшие в то время тенденции, и в пространстве, предполагая, что в процессе модернизации остальной мир последует за событиями на Западе. Предсказания населения на основе экстраполяции тенденций рождаемости и смертности стали широко распространяться и обычно воспринимались как оценки, а не как формальные экстраполяции, чем они и были на самом деле.

Забавно, что демографы разработали методы проектирования некоторых издавна существовавших тенденций в компонентах прироста населения, особенно в рождаемости, как раз тогда, когда эти тенденции исчезали. Новые отношения, благоприятные для более ранних браков и большего числа детей, появились именно в тех обществах, громадное большинство семей в которых контролировали рождаемость.

Восстановление рождаемости в западных странах непосредственно перед второй мировой войной, во время этой войны (?) и особенно после неё противоречило экстраполированию прежних тенденций и тем утверждениям демографического преобразования, которые полагали, что Западные страны приближаются к постоянному или убывающему населению. Но продолжительный резкий рост рождаемости после войны закончился, и во всех Западных странах прирост населения по-прежнему умеренный.

За исключением Японии вне Западной культуры демографическое преобразование произошло неполностью. Оно в основном закончилось в странах с преобладающей европеоидной расой и наследием, т. е. в Европе, Советском Союзе и заморских странах с населением преимущественно европейского происхождения. До настоящего времени очень немногие страны вне Европы явно достигли стадии убывания рождаемости и более медленного прироста населения.

В период разработки теории демографического преобразования Западные страны сплошь проходили через его стадии, но вне Европы этого не произошло. Вместо этого появилось резкое различие между странами, прошедшими через эту *революцию*, у которых теперь умеренные рождаемость и прирост населения, и теми, в которых смертность, но не рождаемость снижалась, так что прирост населения ускорялся. Это различие разделяет развитый и развивающийся миры. За существенным исключением Японии оно также разделяет народы европеоидной расы и традиции от остального мира.

Впрочем, имеются явные признаки того, что другие страны за пределами Европы, как Тайвань и Корея возможно входят в последующие стадии преобразования, причём развитие государственной политики помощи и особенно улучшение противозачаточных мер вполне могут ускорить этот процесс. До сих пор ни одна страна не стала *современной* в смысле созревшего социально-экономического развития без одновременного убывания рождаемости.

2.5. Дальнейшее развитие методологии. Со времени второй мировой войны в результате проблем и неудач предыдущего экстраполирования населения в демографии произошло два основных сдвига: развитие сложной методологии анализа тенденций рождаемости и применение эмпирических исследований для определения причин, влияющих на количество рождений и интервалов между ними. Попытки улучшить предсказания населения привели к последовательному улучшению измерения его воспроизводства. Так, грубая мера рождаемости была отнесена к населению, стандартизированному по возрастам.

Далее, Лотка осуществил исторический прорыв в определении истинных мер рождаемости и смертности при продолжении существующих повозрастных мер. Были произведены анализы рождаемости по продолжительности браков, в основном разработанные в Европе (в США требуемые данные отсутствовали); плодовитости по когортам; числа рождений, промежутков между ними и примерного числа рождений на одну женщину в течение всего её репродуктивного периода (Whelpton и др. 1965); устойчивого населения, т. е. математических закономерностей в соотношениях рождений, смертей, повозрастной структуры населения и прироста населения при различных указанных значениях рождаемости и смертности (Coale & Demeny 1966).

Некоторые методы в этой сфере возрастающей демографической значимости требуют сложных вычислений, облегчаемых с успехом компьютерной технологии. Несмотря на владение тонкостями метода и гораздо лучшее понимание различных возможностей измерения рождаемости, говорить о том, намного ли эти усилия (?) улучшили прогнозирование населения, ещё рано. Впрочем, они улучшили понимание современных тенденций рождаемости. Исследование плодовитости по когортам несомненно обеспечивает значимое истолкование прошлых тенденций и создаёт основание для разумной оценки совокупного числа детей, которых когорта женщин родит намного раньше окончания их репродуктивного периода.

В США у женщин, родившихся в 1905 – 1914 гг., среднее число рождений оказалось наименьшим. Это время было концом длинного периода убывания плодовитости, который начался в раннем XIX в. У последующих когорт женщин, родившихся в 1915 – 1935 гг., среднее число рождений почти наверняка будет выше (*Natality* 1963/1966, с. 6). После второй мировой войны браки в США стали заключаться в более раннем возрасте, и супруги имели больше детей, чем их родители. В результате рождаемость в США и в некоторых других Западных странах после войны оказалась выше, но недавние тенденции наводят на мысль о том, что эти силы (?) ослабевают.

Официальные статистические данные, используемые в утонченных методах анализа, упомянутых выше, не указывают причин происшедших изменений. Их пытались выявить при помощи второго недавно разработанного основного демографического метода: эмпирическим исследованием поведения по отношению к побуждениям и пожеланиям к численности семьи. В США демографы провели общенациональные выборочные исследования поведения и действий по планированию состава семьи. Таким образом собираются материалы об изменяющихся стремлениях американских семей по поводу размера семьи, женитьб, интервалов между рождениями детей и методов ограничения численности семьи, см., например, Whelpton и др. (1965); Westoff и др. (1961, 1963).

3. Демография и демографический взрыв

После второй мировой войны интерес к проблемам населения возродился с огромной силой. Это имело отношение к быстрому прогрессу, достигнутому в сдерживании смертности по всему миру без возмещающего убывания рождаемости в регионах развивающихся стран. В результате прирост населения ускорился и был с излишней тревогой отражён в обширной и иногда спорной литературе о *демографическом взрыве*. Годичный прирост населения мира составил 2% и возрастает (Grauman 1968). Это возрастание исторически уникально и по общему мнению серьёзно препятствует всей сфере социально-экономического развития, будь то в области питания, здоровья, образования, жилищных условий, а также повышению общего уровня жизни.

Прирост населения является серьёзной преградой удовлетворению возрастающих стремлений в развивающихся странах (Coale & Hoover 1958). И в развитых, и в развивающихся странах быстрый рост столиц с прилегающими районами и сопутствующий широкий размах появившихся при этом проблем был также назван *проблемой населения* ввиду ошибочного предположения о том, что в основном она была вызвана рождаемостью, а не своей главной причиной, миграцией. Было признано, что прирост населения и его сосредоточение способствовали возникновению многих проблем, например, о качестве образования, расползании городов, загрязнении атмосферы, и, как утверждали некоторые авторы, о посредственной массовой культуре и сумятице, вызванной многими обстоятельствами современной жизни.

В логическом соответствии со сказанным социологи начали больше интересоваться проблемой населения, рассматривая её либо как социальную, либо как научно интересную. Демография, конечно же, исследовала тенденции населения и виды на будущее. До второй мировой войны демографические исследования были в основном сосредоточены в странах, обеспеченных достаточными переписями и статистикой гражданских состояний, т. е. в основном в странах Западного мира. Но в последние годы возрос интерес в демографии развивающихся стран, в которых часто требуется заменять отсутствующие надёжные данные острой проницательностью и методологическим умением. Это изменяющееся ударение отразилось, в частности, в гораздо большем внимании к развивающимся регионам на Второй международной конференции по населению в 1965 г. в Белграде сравнительно с первой подобной конференцией в Риме в 1954 г. (World 1966, с. 2).

3.1. Развитие прикладной демографии. Демография предоставила большую долю фактического материала для программ политики по населению и планированию семьи, принятых некоторыми развивающимися странами. Большая демографическая литература ныне относится к изучению отношений [к соответствующим проблемам] и опытному введению планирования семьи в развивающихся странах. Во всемирном масштабе исследование знаний, отношений и практики о величине и планировании семьи, возможно, является самым широким изучением нескольких культур в социологии. Выборочные исследования этого рода были проведены примерно в 20 странах Африки, Азии и Латинской Америки. Они обнаружили, что во всех обществах можно собирать полезную информацию о таких щепетильных вопросах как о существующих почти всюду обширных *рынках* сведений о противозачаточных средствах и услугах и о практическом применении этих средств в тесной связи с уровнем модернизации страны или соответствующего социально-экономического класса (Tietze 1968).

Демография описывалась как *наблюдательная*, а не опытная наука, но по меньшей мере некоторые демографы начали заниматься контролируемыми экспериментами по поводу усилий сократить рождаемость. В нескольких случаях исследования знаний, отношений и практики включали действия, т. е. экспериментальное введение планирования семьи у населения. Их успех зависел от характеристик населения, методов его обучения и побуждения. Такие попытки оказались успешными там, где население уже находилось в процессе модернизации, испытало выживание большей доли младенцев и достигло некоторых результатов в сокращении рождений ввиду практики более поздних браков и применения противозачаточных средств и абортов. Подобные исследования прошли на Тайване, в Корее и Цейлоне [Шри-Ланке]. Однако, там, где население ещё всерьёз не попыталось ограничить численность семьи, как в Индии и Пакистане, успех оказался ограниченным (Conference 1962; Intern. Conference 1966; Studies).

Во многих странах приняты национальные программы введения планирования семьи [перечислены 15 стран, в том числе, на этот раз, Южная Корея], и этот список удлиняется с каждым годом. Большинство программ ещё слишком новы, а их масштабы невелики, так что они не достигли ощутимого результата в сокращении рождаемости. Тем не менее, шансы на их успех могут быстро возрасти с совершенствованием противозачаточных средств, особо оральных и пластичных внутриматочных.

Каждая противозачаточная мера связана с побуждением. Более новые меры действенны, потому что помогают как тем, чьё побуждение слабее, так и живущим в условиях, при которых прежние методы были неисполнимы. Это и дальнейшее усовершенствование указанных средств вероятно преобразуют весь подход к планированию семьи и в развитых, и в развивающихся странах (Intern. Conference 1966). По поводу научной значимости прикладных исследований произошли споры демографов; менее спорным является роль лучшей информации о гражданских состояниях и приросте населения, поскольку соответствующе цели являются и научными, и прикладными.

На территории, составляющей более половины всего мира, включая большинство стран, принявших политику о населении, официальные сведения о гражданских состояниях недостаточны для определения ни истинных уровней, ни годовых изменений рождаемости, смертности и прироста населения. Предпринятые новые подходы к установлению лучших оценок включают тщательно проверяемую регистрацию в отобранных районах, повторные исследования и сочетания различных методов, названные *исследованиями оценок прироста населения*.

Действенной мерой успеха национальных программ планирования семьи является снижение рождаемости и скорости прироста населения. Соответственно, демографы всё более участвуют в решении проблем измерения этого прироста, равно как и в оценивании результатов указанных программ.

4. Демография как часть социологии

Демография обычно понимается как междисциплинарная наука, устойчиво укоренившаяся в социологии, притом связанная, хоть и слабее, с экономикой, статистикой, географией, экологией человека, биологией, медициной и генетикой человека. Её редко воспринимают как совершенно отдельную дисциплину, а скорее как находящуюся внутри одной из основных наук или как её подразделение. В англоговорящих странах тот, кто называет себя демографом по профессии, обычно занимает более широкое положение как социолог, экономист или статистик, либо служит в бюро и исследовательских учреждениях, чьё наименование включает слово *население*, но редко *демография*, и это последнее слово чаще применяется в других странах.

Интерес к демографии недавно привёл к быстрому умножению бюро и институтов, специально посвящённых исследованию населения. В США таких институтов, связанных с университетами, около десяти. Важные центры демографических исследований находятся во Франции, Италии, Великобритании, Австралии и Японии. ООН содержит три региональных центра подготовки по демографии (Сантьяго, Чили, для Латинской Америки; Бомбей, для Азии; и Каир, для Северной Африки) и изучает возможность открытия других центров. Частично самый быстрый прогресс в демографической работе происходит в новых центрах в Восточной Европе и в развивающихся странах.

В некотором смысле для остальных социальных наук демография является прислугой за всё. Она оценивает и предварительно переваривает обширные источники социальных данных, собранных при переписях и статистикой гражданского состояния. Она предоставляет существенный сырой материал для изучения социальных, политических и экономических изменений. Более того, несмотря на предыдущее разочарование их точностью, у демографов постоянно запрашивают экстраполяции и оценки для множества запланированных целей.

Демография не занимала заметного места в теории социальных наук кроме как в экономике в связи с трудами Мальтуса. Она является количественной и эмпирической дисциплиной, строгой в методологическом смысле; её темами служат статистические категории, которые лишь косвенно отражают реальные социальные группы. Её количественные документы, характеризующие определённые социальные изменения, нелегко вписать в структурно-функциональные теории, преобладающие в социологии, обычно носящие спекулятивный характер и трудно поддающиеся эмпирической проверке.

В своей собственной области демография достигла наибольших успехов в исследовании смертности (Moriyama 1968), и она более всего заинтересована изучением рождаемости, выказывая наибольшее понимание тонкостей дела (Freedman 1968). Падчерица демографии, миграция, до сих пор не поддавалась утонченным измерениям, сравнимым с теми, которые были разработаны в двух других упомянутых только что областях. Хотя международная миграция уже не представляет существенного демографического значения[7], внутренняя миграция, например, в США является основной причиной различий в скорости прироста населения в отдельных штатах, городах и районах. Значимость миграции, равно как и преимущества новой компьютерной технологии, могут привнести больше таланта и ресурсов в эту область (Petersen 1968; Thomas 1968).

В последние годы самая забытая часть демографии располагалась на важных границах между ней и экономикой по таким темам как прирост населения сравнительно с накоплением капитала; приложение принципов таблиц дожития к изменениям в экономически активном населении, экономика здоровья, заболеваемости и смертности, экономические последствия различных уровней заболеваемости и смертности. Есть и неизученная возможность более плодотворных исследований в междисциплинарной области между демографией и антропологией [антропометрией], политикой, географией, экологией и генетикой. Начинания здесь имеются, но объединённых усилий очень немного.

Примечания

1. В § 2.4 автор повторно разъяснил свой термин.

2. Эта фраза весьма неточна. Название книги Граунта см. в Библиографии.

3. Бельгийский математик и статистик. О его трудах мы не можем ничего сказать, но позволим себе усомниться в том, что Кетле использовал модели (Sheynin 1986). Мы нашли у него только эмпирическую кривую зависимости роста человека от возраста. Но уже в 1772 г. Ламберт (Sheynin 1971, с. 247) ввёл закон смертности по аналогии с вытеканием воды из цилиндра и тепловыми процессами.

4. Gide (1936 – 1937/1950, с. 194 – 195) упомянул *новый закон* о запрете абортов и ужасные жилищные условия (эти общеизвестные условия были одной из главных, если не главной причиной низкой рождаемости), но он также заметил недостаток и низкое качество презервативов и процитировал местного врача, который сказал, что повсеместно распространён онанизм.

О состоянии советской статистики вообще и демографии в частности см. Шейнин (2001, §§ 2.4 и 4.2). Так, в 1930 г. был учреждён Демографический институт, однако его ликвидировали в 1934 г. Перепись 1937 г. была объявлена вредительской, и Центральное статистическое управление было разгромлено. Десятки статистиков были арестованы, некоторые расстреляны. На статистической конференции 1954 г. выступил А. Н. Колмогоров. Он перечислил основные области применения статистики, но демографию не упомянул; тема была, видимо, слишком острой. Да и ликвидация Демографического института вполне возможно была вызвана нежелательностью исследований демографии: слишком велики были потери населения от жесточайших репрессий.

5. Чуть выше успех прежних мер был назван умеренным.

6. Автор несколько раз упоминает Корею, а один раз – Южную Корею, и можно полагать, что её-то он всегда и имел в виду.

7. Международная миграция вновь стала существенным, и даже первостепенным фактором жизни общества.

Библиография

Шейнин О. Б. (2001), Статистика и идеология в СССР. *Историко-математич. исследования*, вып. 6 (41), с. 179 – 198.

Coale A. G., Demeny P. (1966), *Regional Model Life Tables and Stable Populations*. Princeton.

Coale A. G., Hoover E. M. (1958), *Population Growth and Economic Development in Low-Income Countries*. Princeton. Самое подробное сочинение по своей теме.

Conference (1962), *Conference on Research in Family Planning. New York, 1960*. Princeton.

Cox P. R. (1950), *Demography*. Cambridge, 1959.

Eldridge H. T. (1968), Population policies. IESS, vol. 12, pp. 381 – 388.

Freedman R., Editor (1968), Fertility. IESS, vol. 5, pp. 371 – 382.

Gide A. (1936 – 1937), *Retour de l'U.R.S.S. Suivi de retouches à mon retour de l'U.R.S.S.* Paris, 1950.
Grauman J. V. (1968), Population growth. IESS, vol. 12, pp. 376 – 381.
Graunt J., Граунт Дж. (1662 англ.), *Естественные и политические наблюдения над бюллетенями смертности*. В книге Граунт Дж., Галлей Э. (2005), *Начала статистики населения, медицинской статистики, математики страхового дела*, с. 5 – 105. Берлин. Также Google, Oscar Sheynin, Download Area.
Great Britain (1949 – 1954), *Papers. Royal Commission on Population*, vols 1 – 6. London.
Guillard A. (1855), *Eléments de statistique humaine ou démographie comparée*. Paris. Nabu Press, 2010.
Intern. Conf. (1966), *International Conference on Family Planning Programs. Geneva, 1965*. Chicago.
Kirk D. (1942), Relation of employment levels to births in Germany. *Milbank Memorial Fund Quarterly*, vol. 20, pp. 126 – 138.
Lorimer F. (1957), General survey, pt 1. В книге Glass D. V., Editor, *The Univ. Teaching of Social Sciences: Demography*, pp. 11 – 57. Paris.
--- (1959), Development of demography. В книге Hauser P. M., Duncan O. D., Editors, *Study of Population: Inventory and Appraisal*, pp. 124 – 179. Chicago.
Lotka A. J. (1925), *Elements of Mathematical Biology*. New York, 1957. Первоначальное название кнгиги: *Elements of Physical Biology*.
Malthus T. R., Huxley J., Osborn F. (1960), *Population: Three Essays*. New York. Мальтусу принадлежит очерк Summary view of the Principle of Population, 1830, остальным авторам очерки 1956 и 1958 гг., World Population и Population, an International Dilemma. Основное сочинение Т. Р. Мальтуса (1798 англ), *Опыт закона о народонаселении*. М., 1895.
Moriyama I. M. (1968), Mortality. IESS, vol. 10, pp. 498 – 504.
Natality (1963), *Natality Statistics Analysis*. U. S. Dept Health, Education and Welfare, Public Health Service, 1966. Nat. Center for Health Statistics, ser. 21, No. 8. Washington, 1966.
Pearl R., Reed L. J. (1920), On the rate of growth of the population of the U. S. since 1790 and its math. representation. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 6, pp. 275 – 288.
Petersen W. (1968), Migration, social aspects. IESS, vol. 10, pp. 286 – 292.
Problems (1938), *Problems of a Changing Population*. Washington.
Sheynin O. (1971), Lambert's work in probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 7, pp. 244 – 256.
--- (1986), Quetelet as a statistician. Там же, vol. 36, pp. 281 – 325.
Spengler J. J., Dunkan O. D., Editors (1956), *Demographic Analysis: Selected Readings*. New York, 1963.
Studies (1963 –), *Studies in Family Planning*. Продолжающееся издание. [The New York] Population Council.
Thomas B. (1968), Migration, economic aspects. IESS, vol. 10, pp. 292 – 300.
Thompson W. S., Lewis D. T. (1930), *Population Problems*. New York, 1965.
Tietze C. (1968), Fertility control. IESS, vol. 5, pp. 382 – 388.
Westoff C. F. и др. (1961), *Family Growth in Metropolitan America*. Princeton.
--- (1963), *The Third Child.* Princeton.
Whelpton P. K. и др. (1965), *Fertility and Family Planning in the U. S*. Princeton.
World (1966), *Proceedings Second World Population Conf. Belgrade, 1965*, vol. 1. New York.
Yearbook (1948), *Demographic Yearbook*. Издание ООН.
Yule G. Udny (1925), Growth of population and the factors which control it. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 88, pp. 1 – 58.

5. Добавление. Интерес общественности к проблемам населения усилился, и это отражается в многочисленных популярных публикациях, потоке тревожных заявлений и вводе в действие самых различных программ планирования населения и семьи в странах, в которых проживает большинство населения мира. Примерно для 70% населения мира, проживающего в традиционных или развивающихся обществах, прирост населения теперь составляет в среднем 2,4% в год, и влияние его продолжения было тем самым осознано.

Плодовитость в большинстве более развитых стран продолжала убывать от послевоенного уровня, и были приложены усилия, особенно в странах Восточной Европы, обратить эту тенденцию запрещением абортов (Румыния) и дифференцированными семейными пособиями за второго и третьего ребёнка (Чехословакия [ныне Чехия и Словакия] и Венгрия).

В рождениях нет больше твёрдого подразделения послевоенного периода между развитыми странами со сравнительно низкой рождаемостью и почти повсеместной высокой рождаемостью в развивающихся странах. Теперь рождаемость изменяется от страны к стране непрерывно, по мере того, как она сокращается в результате социально-экономического прогресса и политики её сокращения в некоторой части развивающихся стран, особенно в Восточной Азии и Латинской Америке.

Отражая беспокойство общественности, научные исследования и публикации по демографии в громадной степени расширились, так что упомянуть отдельные сочинения мы не можем. Журналы, специально посвящённые научной демографии и изучению населения, теперь выходят на нескольких языках. Из журналов, издаваемых на английском языке, наибольшего внимания заслуживают *Demography* и *Population Index*, публикуемые Американской ассоциацией населения, *Population Studies* в Англии и *Demography* в Индии. Наиболее ценные текущие научные отчёты по проблемам политики [в отношении населения] это периодические издания нью-йоркского Population Council, в том числе их *Studies in Family Planning, Reports on Population/Family Planning* и *Country Profiles.* Всесторонние отчёты *Reports* (1972 – 1974) описывают многочисленные исследования последствий возможного прироста населения в будущем. Эти ценные материалы стали менее полезными ввиду непредусмотренного дальнейшего убывания плодовитости в США. Оно по крайней мере в настоящее время подорвало экстраполяции, на которых были основаны многие изыскания.

Из нескольких значимых международных встреч особо следует упомянуть Международную конференцию по населению (Бухарест, 1974), организованную ООН. На этой, скорее политической, а не научной встрече впервые собрались официальные представители государств. Более типичным для периодических научных конференций, обсуждающих те же проблемы, были две, опять-таки организованные ООН, в Бухаресте в 1965 г. и Риме в 1954 г. Имеются и материалы двух других конференций *World Population* (1966 – 1967) и *Rapports* (1973). Наиболее честолюбивым международным исследованием из когда-либо произведенных было Международное исследование плодовитости *World Survey* (1973), организованное в 1970-е годы Международным статистическим институтом. Оно имеет целью сбор сравнительной научной информации по указанной теме во многих странах и регионах[1].

Примечание

1. Автор (§ 2.1) лишь упомянул Лотку, хотя и сослался на его фундаментальное сочинение. Альфред Джеймс Лотка (1880 – 1949) был математиком, физико-химиком и статистиком. Он основал современный демографический анализ и заложил основы экономической демографии. Существенное значение имело его изучение динамики популяций.

Библиография

Rapports (1973), *Rapports/Proceedings Intern. Population Conf. Liège, 1973*, vols 1 – 3. Liège.

Reports (1972 – 1974), *Research Reports*, Commission on Population Growth and the American Future, vols 1 – 7. Washington.

World Population (1966 – 1967), *Proceedings Second World Population Conf. Belgrade 1965*, vols 1 – 10. New York.

World Survey (1973), *World Fertility Survey. Occasional Paper* No. 1. Intern. Stat. Inst.

VI

Конрад Тойбер

Перепись

Conrad Taeuber, Census. IES, pp. 41 – 46

[1. Предисловие.] Перепись населения, т. е. его подсчёт в пределах страны, стал необходимым каждому современному государству. Какова численность населения? Каковы его основные социально-экономические характеристики? Где оно живёт и как на него влияют социальные и биологические изменения? Подобные вопросы ежедневно возникают в правительствах всех промышленно развитых странах, не говоря об ещё развивающихся государствах.

Переписи стали включать многие другие объекты кроме населения. Во многих странах часто вне зависимости от переписи населения проводятся переписи промышленности, сельского хозяйства, добычи полезных ископаемых, жилого фонда, частных фирм. Ниже речь в основном идёт о переписях населения, но многие комментарии, особенно о методах, табулировании и качестве результатов, в равной мере относятся и к другим видам переписей.

[2] Некоторые ранние переписи. Подсчёты населения или какой-то его части вероятно появились вместе с государствами. Никто не знает, какой правитель первым подсчитал мужчин, пригодных к воинской службе, или составил список хозяйств для обложения их налогом. Числа, полученные при переписях, длительное время применялись для политической пропаганды, и особо для оправдания расширения территории.

Имеются сведения о подсчётах населения в древней Японии; такие подсчёты проводились древними египтянами, греками, евреями, персами и римлянами. Многие из этих ранних переписей видимо покрывали лишь часть населения, часто мужчин, по возрасту пригодных к воинской службе, а результаты обычно считались государственной тайной. В Европе о переписи городов (или кантонов, как в Швейцарии) известно с XV и XVI веков. В 1449 г. перепись в Нюрнберге провели, как кажется, чтобы при существовавшей угрозе осады определить необходимый запас продовольствия. Сообщается и о переписи 1687 г. в Мадрасе, в Индии.

Утверждалось, что различные переписи были впервые проведены в

Новое время с целями и методами, напоминающими сегодняшние. Среди них были переписи в период 1665 – 1754 гг. в первоначальных французских владениях в Северной Америке и в Швеции в 1749 г. Их начали рано проводить в колониях в Северной и Южной Америке. В 1635 – 1776 гг. английское Министерство торговли распорядилось провести 27 переписей в колониях Северной Америки, а в этих уже бывших колониях переписи прошли между достижением независимости в 1776 г. и образованием США [конституция 1787 г.].

Старейшие периодически повторяемые переписи проходили в США с 1790 г. через каждые 10 лет, а первая перепись в Соединенном Королевстве была проведена в 1801 г., затем через каждые 10 лет за исключением военного 1941 года. Если современные переписи понимать как сбор информации по каждому лицу а не по каждому домашнему хозяйству, то их началом придётся считать примерно середину XIX в. Подобные переписи известны в Брюсселе в 1842 г., а во всей Бельгии, в 1846 г., в Бостоне в 1845 г. и по всем Соединенным Штатам в 1850 г.

[3] Международная деятельность. К концу XIX в. Международный статистический институт (МСИ) рекомендовал международную публикацию результатов всех переписей, и на рубеже XIX – XX вв. повторил свою рекомендацию, указав, что стали известны результаты примерно 68 переписей, охвативших около 43 % населения планеты[1]. Уже в 1897 г. МСИ принял правила для проведения переписей и представления их результатов, а всё, относящееся к переписям, уже в 1878 г. обсуждал Международный демографический конгресс.

Одно раннее предложение обсуждала ООН. Она предложила разработать план всемирной переписи 1950 г. Впрочем, решив, что условия для неё ещё не созрели, она предприняла меры, способствующие проведению переписей, и составила рекомендации по улучшению сравнимости их результатов. Тем временем Межамериканский статистический институт принял программу для всеамериканской переписи 1950 г., и в 1945 – 1954 гг. 18 из 21 стран этого региона действительно провели переписи. Переписи были проведены в тот же период по крайней мере в 150 местах по всему миру с охватом более 2 *млрд* человек. За 10 лет с 1955 по 1965 гг. число переписей составило около 180, и относились они к 2,2 *млрд*.

[4] Применение переписей. Причины проведения переписей изменяются вместе с нуждами соответствующих стран. Одной из основных является нынешняя забота о социальном и экономическом развитии. Много информации требуется для введения программ улучшения [общественного] здоровья, грамотности, образования, возрастания дохода, повышения уровня жизни, увеличения запасов продовольствия и других потребительских товаров, сельскохозяйственного производства и промышленной продукции.

Данные собираются также для установления представительности законодательных учреждений, числа избирателей, а также районов и групп населения, претендующих на государственные пособия. Переписи основывают многочисленные исследования демографического, экономического и социального направления, позволяют устанавливать и описывать группы трудоспособных, экономически зависимых, недавних переселенцев в города, сельские и городские населения, расовые или религиозные меньшинства, беженцев, научных и технических работников. Они также используются в качестве исходных данных для дальнейших выборочных исследований. Наконец, сравнение последовательных переписей указывает изменения численности, характера и местоположения населения.

[5] Современная перепись. Справочник ООН (*Handbook* 1958, с. 4) определил современную перепись населения как

Всеобъемлющий процесс сбора, составления и публикации демографических, экономических и социальных данных, относящихся ко всем лицам данной страны или ограниченной территории на установленное время или период.

Он также перечислил шесть основных черт переписей:

1) Они должны финансироваться *на национальном уровне*. Только национальное государство может предоставить необходимые средства и ввести надлежащие законодательные акты, хотя провинциальные и местные органы власти могут частично принять на себя ответственность за переписи, а иногда и перенять часть расходов.

2) Они должны охватывать *точно очерченную территорию*. Изменения границ, которые влияют на сравнимость последовательных переписей, должны быть явно и ясно указаны.

3) *Все охватываемые лица* должны быть включены в переписи без двойного счёта и пропусков.

4) Они должны проводиться *в установленное время*. Младенцы, родившиеся после даты переписи, не включаются в неё; напротив, умершие после неё должны быть включены. Некоторые данные, например, об участии/неучастии в экономической жизни в качестве наёмного работника или о миграции, могут относиться к другому периоду, который должен быть ясно указан.

5) Данные должны быть получены отдельно *о каждом человеке*. Это не исключает каких-либо сведений о домашнем хозяйстве в целом. При исключительных обстоятельствах может быть допущена сводная информация о группе лиц, однако цель современной переписи состоит, насколько это возможно, в сборе данных по каждому человеку.

6) Данные переписей должны *публиковаться*. Когда-то они считались государственной тайной, но сейчас признаётся, что перепись не завершена, пока её данные не собраны и не опубликованы.

[6] Что включается. Содержание переписи, в той же мере, как и её цель, определяется нуждами страны в данный момент. Вопросы, крайне важные для одной страны, могут быть сравнительно малозначащими либо для другой, либо для той же страны в другое время. Каждая национальная перепись изменялась с годами. Её содержание в основном определяют условия в стране, иные источники информации и организационные способности по предоставлению желательной информации.

ООН утвердила список рекомендаций для национальной переписи населения, содержащий следующие вопросы (*Principles* 1958): местонахождение в момент переписи и/или место обычного жительства; отношение к главе хозяйства или семьи; пол; возраст; семейное положение; место рождения; гражданство; экономическая активность или пассивность; занятие; соответствующая отрасль промышленности; работодатель или работник; язык; этнические или национальные характеристики; грамотность; уровень образования; посещение школы; число детей, рождённых каждой женщиной.

Для стран, которые не могут включить эти вопросы, был предложен следующий минимум: пол; возраст; семейное положение; какие-то указания об экономической деятельности. Каждый вопрос, разумеется, требует точного определения, а некоторые (семейное положение, вид экономической деятельности, уровень образования) относятся только к части населения.

[7] Сбор данных. При обсуждении методов переписи обычно различают счёт, основанный на реальном местонахождении населения на её день и на месте постоянного жительства. Место жительства часто понимается как место обычного проживания, хоть этот термин и не имеет официального определения. В обоих случаях общенациональные подсчёты обычно почти совпадают, однако подсчёты по отдельным местностям могут существенно различаться.

Для облегчения международной сравнимости тот же источник предложил применять *международный условный итог*, включающий всех лиц, оказавшихся в стране в день переписи за исключением иностранных военных и военных моряков и их же дипломатического персонала с семьями. Напротив, включается тот же собственный персонал с семьями, живущий за рубежом, а также моряки торгового флота, обычно проживающие в стране, но находящиеся в плавании.

Там же рекомендуется по возможности подсчитывать или оценивать следующие группы населения: туземные жители и кочевые племена, гражданские лица страны, временно проживающие на день переписи за рубежом, и гражданские иностранцы, временно проживающие в тот день в стране. Причина здесь в том, что решение о включении этих групп обычно определяется законами и нуждами данной страны, и национальные итоги можно подробно сравнивать только, если отдельный подсчёт указанных групп становится известным.

Обычно признаются два основных методов сбора данных: непосредственно переписчиком и некоторыми гражданами. В первом случае опрашивают каждого, хотя вместо кого-то сведения может сообщать глава или другой член семьи. Во втором случае данные собираются либо самим респондентом, либо главой или иным членом домашнего хозяйства и передаются переписчикам. Часто переписчики сами раздают вопросники и собирают их вместе с ответами, иногда помогают отвечать на вопросы, и ответственны за точность и полноту сведений.

В нескольких странах граждане обязаны являться для дачи сведений в определённые места, в других им не разрешается выходить из дома до того, как переписчик не опросил их. В громадном большинстве случаев переписчик отыскивает респондентов и раздаёт им вопросники или непосредственно задаёт им вопросы.

Законодательные акты обычно указывают, что граждане должны предоставлять полные и верные сведения, которые переписчики обязаны считать доверительными. Тем, кто пожелает сохранить эти сведения в тайне от других членов семьи или местных официальных лиц, выдаются для заполнения специальные формы, которые затем сдаются/пересылаются респондентом в местные, региональные или национальный органы переписи.

Реестры населения и списки семей, если они имеются, часто используются, чтобы способствовать полноте переписи. При некоторых переписях полевая работа начинается с составления списка домов, который служит для проверки полноты сведений.

Вопросники должны обеспечить непосредственный ввод требуемых сведений и быть приспособленными к табулированию результатов. Если они заполняются некоторыми гражданами (см. выше), то в них обычно имеется отдельная форма для семьи, в которую вносится информация о каждом её члене. […]

В некоторых странах существует давнишняя традиция проводить переписи каждые 10 лет, в немногих других – каждые 5 лет, но в большинстве случаев установленных сроков нет, и переписи проводятся по мере надобности. В нескольких необычных случаях переписи проводились чаще, чем через 5 лет, но либо в соответствии с законодательством, либо по традиции наиболее, видимо, часто применяется период в 10 лет[2]. В возрастающем числе стран перед полной переписью для проверки вопросника, процедуры, организации работы, а иногда и программы табулирования проводится рекогносцировочный подсчёт.

Применение выборочного метода. Он широко используется при переписях, хотя в принципе перепись требует сведений о каждом лице. Термин *выборочная перепись*, как её иногда называют, ошибочен; сбор сведений лишь об определённой части населения следует называть выборочным исследованием. При некоторых переписях часть вопросов задаётся только выборке граждан, и таким образом удаётся собрать больше сведений без сравнимого увеличения нагрузки на респондентов или на табулирование.

Многие страны основывают некоторое табулирование только на выборке из населения с целью получить предварительные итоги или уменьшить затраты на окончательное табулирование. Выборочный метод также применялся для проверки качества некоторых стадий обработки данных. В нескольких странах выборки применялись для предварительных испытаний, и полученные данные использовали для утверждения операций обработки данных.

[8] Табулирование результатов. Для их практического использования сведения об отдельных лицах должны быть преобразованы в статистические сводки. Методы табулирования весьма различны, от простого счёта до применения компьютеров, причём данные могут быть обработаны в поле, в провинциях или в центральном штабе переписи.

Вопросники, полученные от переписчиков, должны быть просмотрены, чтобы выявить неполные или противоречивые сведения. Для дополнения/исправления были разработаны методы применения иной информации в тех же вопросниках или учитывающие распределения вероятностей (?) по данным из других источников. Во многих случаях данные должны быть переведены в численный или какой-либо другой подходящий код, чтобы тем самым облегчить подсчёт и группировку в надлежащие категории.

Самый распространённый метод группировки данных состоит в перфорировании карточек и их табулировании при помощи механических средств. Позднее для этой работы были применены компьютеры, и разработаны методы для перевода данных с вопросников непосредственно на магнитные ленты, используемые в этих компьютерах. Их применение привело к существенному повышению объёма табулируемых материалов и к своевременной публикации результатов.

[9] Полнота и точность. Ввиду разнообразных общественных и частных применений данных переписей забота о полноте и точности их результатов возросла, на полноту охвата было обращено серьёзное внимание. Без специальных мер предосторожности некоторые граждане могут быть пропущены и некоторые местности не перечислены. Пропуски населения происходят чаще, чем его ошибочное завышение. Впрочем, стало известно, что некоторые ретивые работники переписей завышали число населения, жившего на какой-либо [на своей] территории.

Пропуск тех или иных граждан может происходить от неполного подсчёта членов семьи или местности, и это было особенно выявлено по отношению к детям младшего возраста и молодым людям, либо очень подвижным, либо не имеющим постоянного места работы. В странах, в которых мужчины считаются более ценными, чем женщины, число последних может быть учтено неполностью. В нескольких случаях опасение в применении переписей для мобилизации в армию привело к некоторому пропуску мужчин или к их регистрации как женщин.

Проблемы могут возникнуть с указанием места жительства. У некоторых лиц, как, например, у кочующих рабочих, обычного места жительства нет. Далее, студенты колледжей, военные, а также лица, занимающиеся перевозками на дальние расстояния, иногда короткое или длительное время проживают вне семьи. Без точных указаний на их счёт они могут быть либо пропущены, либо сочтены дважды.

Возраст часто указывается неверно, потому что респонденты полагают это в каком-то смысле полезным для себя, подчас потому, что, несмотря на обещанную доверительность, боятся его использования во вред себе, а иногда и потому, что не знают его. Во многих странах рождения не регистрируются, и возрасты точно не известны. Далее, родитель может считать, что завышение возраста своего ребёнка позволит ему быстрее поступить в школу, или что для ребёнка постарше это поможет ему избежать обязательного посещения школы. Пожилой человек может завысить свой возраст для получения социальной помощи или для повышения своего общественного положения, которое иногда достигается преклонным возрастом. Наконец, респонденты часто округляют свой возраст, так чтобы он оканчивался на 0 или на 5, даже когда их спрашивают год рождения[3].

Национальность, гражданство и родной язык особо часто указываются неверно, если правильный ответ считается вредным ввиду политической обстановки.

Повышение качества. Общественное доверие к переписям значительно влияет на точность ответов. Оно часто может возрасти в результате информационной компании, поясняющей, что данные о каком-либо лице не могут быть использованы ему во вред. В некоторых странах в качестве счётчиков используют служащих полиции, потому что они всегда на месте и авторитетны, в других же они исключаются из опасения, что может создаться впечатление, что сведения собираются не только для статистических целей.

С целью исправления качества результатов были проведены исследования о надёжности ответов, роли счётчиков, формулировании вопросов и о поведении респондентов при различных обстоятельствах. Повышено внимание к ознакомлению временных полевых работников с методами и идеями переписей и к обучению камеральных служащих принципам редактирования и кодирования.

Качество собранных статистических данных можно часто определить их исследованием после публикации всех таблиц. Раньше этим в основном занимались учёные и работники переписей, желавшие участвовать в научной работе в своё свободное время, однако сейчас подобный анализ всё чаще выполняется как обычная работа. Проверяется внутренняя согласованность переписи, равно как и её соответствие с предшествовавшими переписями и другими независимыми статистическими данными и оценками.

Пропуск или переоценку численности возрастной группы можно определять по сравнению результатов переписи с соответствующей группой в предшествовавшей переписи, выровненной за счёт смертности и миграции. Неточности в указываемых возрастах, если они вызваны [неосознанным] предпочтением респондентов к некоторым из них, можно устанавливать по внутреннему анализу данных. Иногда точность сведений [вообще] о том или ином лице проверяется сравнением со сведениями о нём в административных реестрах. Полнота и точность полученных сведений может быть проверена выборочными исследованиями. Хоть сомнения по поводу выявления ошибок в переписях и выражались, возрастает общественное признание того, что полные и честные ответы не только исправят будущие переписи, но и увеличат общественное доверие к ним.

Примечания

1. Одним из участников обсуждения был Tschuprow (Чупров) (1899). Он указал, что переписи должны быть всесторонними и поспевать за изменениями в обществе, обратил внимание на достижение сравнимости данных различных стран и остановился на положении в России, отметив быстрое изменение уклада жизни сельского населения и необходимость объединения земских переписей.

2. Это утверждение противоречит предыдущему.

3. О подобном округлении возрастов было известно уже Муавру.

Библиография

Brunsman H. G. (1963), Significance of electronic computers for users of census data. *Emerging Techniques in Population Research*. New York, Milbank Memorial Fund, pp. 269 – 277.

[Canada, Bureau of Statistics] ***Ninth*** (1955), *Ninth Census of Canada, 1951,* vol. 11. Ottawa.

Coale A. J. (1955), Population of the United States in 1950 classified by age, sex and color. Revision of census figures. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 50, pp. 16 – 54.

Eckler A. R., Hurwitz W. N. (1958), Response variances and biases in censuses and surveys. *Bull. Intern. Stat. Inst.*, vol. 36, No. 2, pp. 12 – 35.

Grauman J. V. (1968), Population growth. IESS., vol. 12, pp. 376 – 381.

Jaffe A. J. (1947), Review of the censuses and demographic statistics of China. *Population Studies*, vol. 1, pp. 308 – 337.

Mayer K. B. (1968), Population composition. *Intern. Acad. Soc. Sci.*, vol. 12, pp. 362 – 370.

Mayr Georg von (1895 – 1917), *Statistik und Gesellschaftslehre*, Bde 1 – 3. Tübingen, 1926.

Principles (1958), *Principles and Recommendations for National Population Censuses*. *Stat. Papers* M 27. United Nations.

Steinberg J., Waksberg J. (1956), *Sampling in the 1950 Census of Population and Housing*. Bureau of the Census Working Paper No. 4. Washington.

Taeuber C., Hansen M. H. (1964), Preliminary evaluation of the 1960 census of population. *Demography*, vol. 1, No. 1, pp. 1 – 14.

Taeuber C., Taeuber Irene B. (1958), *Changing Population of the U. S*. Bureau of the Census, Census Monograph Ser., No. (?) 1950. New York.

Tschuprow (Чупров) A. A. (1899, франц.), [О предстоящей общеевропейской переписи]. *Bull. Intern. Stat. Inst.*, t. 11, No. 1, pp. 68 – 74 первой пагинации.

[UN Statistical Office] ***Handbook*** (1958), *Handbook of Population Census Methods*, vol. 1. New York.

[US Bureau of Labor] ***History*** (1900), *History and Growth of the US Census*. Washington.

[U. S. Bureau of the Census] ***Bureau*** (1947 –), *Bureau of the Census Catalog*.

[U. S. Bureau of the Census] ***Century*** (1909), *Century of Population Growth from the First Census of the US to the Twelfth: 1790 – 1900*. Washington.

[U. S. Bureau of the Census] ***The 1950*** (1955), *The 1950 Censuses: How They Were Taken*. Washington.

[U. S. Bureau of the Census] ***Inquiries*** (1960a), *Inquiries Included in Each Population Census, 1790 to 1960*. Washington.

[U. S. Bureau of the Census] ***Post-Enumeration*** (1960b), *Post-Enumeration Survey 1950: Evaluation Study of the 1950 Censuses of Population and Housing*. Washington.

[U. S. Bureau of the Census] ***Evaluation*** (1964), *Evaluation and Research Program of the US Censuses of Population and Housing 1960*. Washington.

[U. S. Bureau of the Census] ***1960 Censuses*** (1966), *1960 Censuses of Population and Housing*. *Procedural History.* Washington.

[U. S. Library of Congress] ***Catalog*** (1950), *Catalog of the US Census Publications, 1790 – 1945*. Washington.

Whitney V. H. (1968), Population distribution. IESS, vol. 12, pp. 370 – 376.

Willcox W. F. (1930), Census. IESS, vol. 2, pp. 295 – 300.

Zelnik M. (1961), Age Heaping in the US Census: 1888 – 1950. *Milbank Memorial Fund Quarterly*, vol. 39, No. 3, pp. 540 – 573.

--- (1964), Errors in the 1960 census enumeration of native whites. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 59, pp. 437 – 459.

[10] Добавление. Ныне переписи охватили почти всё население планеты. ООН сообщает, что в 1965 – 1975 гг. было проведено более 170 переписей. Прикладываются усилия к тому, чтобы до 1980 г. обеспечить их проведение в тех нескольких странах, в основном в Африке, в которых их никогда не было, и для этой цели предоставляется международная помощь.

Национальные правительства и международные организации уделяют возросшее внимание вопросам методологии, связанным с проведением переписей и выбором мер точности их результатов. Применение компьютеров для табулирования стало почти повсеместным, и штабы многих переписей нашли способы выпуска микроданных, никак не относящихся к отдельным лицам и предоставляющих бесценное содействие социальным и экономическим исследователям.

Eckler A. R. (1971), *The Bureau of Census*. New York.

Kahn E. J. Jr (1974), *The American People: the Findings of the 1970 census*. New York. Издание в мягкой обложке, 1975.

Scott Ann H. (1968), *Census USA: Fact Finding for the American People, 1790 – 1970*. New York.

Taeuber Irene B. , Taeuber C. (1971), *People of the US in the Twentieth Century*. Washington.

[US Bureau of the Census] ***1970 Census*** (1972 – 1975), *1970 Census of Population and Housing: Evaluation and Research Program*. Washington.

[US Bureau of the Census] ***1970 Census*** (1973), *1970 Census of Population and Housing: Procedural History*. Washington.

[US Bureau of the Census] ***Catalog*** (1974), *Catalog of US Census Publications*, *1790 – 1972*. Washington.

VII

Николас Хоббс

Этические проблемы социологии

Nicholas Hobbs, Ethical issues in the social sciences. IES, pp. 267 – 278

[1. Предисловие.] Этика изучает нормы поведения в социальных группах, и поэтому исследования в социологии непрерывно связаны с этическими проблемами. Очень важен выбор цели социологического исследования, потому что оно часто относится к жизни людей и должно соответствовать и научным, и этическим нормам. Результаты исследований непрестанно добавляют новые данные и новые теории и требуют пересмотра установленных этических систем. Таким образом, этика и социология движутся вперёд совместно, добавляя что-то друг другу (Shils 1959).

[2] Старые и новые проблемы. Некоторые принципы этики в социологических исследованиях так широко признаются и почитаются, что нет смысла подробно на них останавливаться. Среди них назовём: соблюдение высших стандартов работы; честное сообщение о её методах и результатах; неразглашение доверительно собранных сведений; должное признание участия коллег и использования материалов других авторов; точный отчёт о своих собственных деловых качествах; и упоминание источников финансовой поддержки.

На каждой стадии правдивого исследования главной во всём этом является честность, и по этой причине некоторые социологи возражали против предложений об определении этических норм исследования, поскольку каноны науки уже указывают нормы поведения в точной и достаточной мере. Тем не менее, при продвижении в новые области, притом при новых установлениях, возникают иные проблемы, да и прежние появляются в новых рамках и должны решаться заново. Этические нормы следует непрерывно обновлять, чтобы они соответствовали меняющемуся положению. Ниже мы рассматриваем некоторые вопросы, ныне обсуждаемые и заботящие социологов. Если они вскоре устареют, то вероятно потому, что по их поводу достигнуто общее согласие, но что возникли заботы о новых проблемах.

[3] Обман в социологических исследованиях. Во многих экспериментах и исследованиях необходимо, или обычно считается необходимым скрывать или неверно описывать суть цели, поставленной респонденту. Часто это происходит для установления *ожидаемого*, с которым тот приступает к ответу. Известно ведь, что ожидаемое существенно влияет на ответ. В большинстве случаев последствиями [обмана] можно пренебречь, но иногда они, напротив, очень важны, и во всяком случае возникает вопрос: оправдан ли когда-либо обман?

Учёные несомненно полагают, что для достижения достойной цели он иногда совершенно необходим. Так, для оценки исследуемого лекарства контрольная группа испытуемых обычно получает плацебо [бездействующие таблетки и т. п.]. Они безвредны, а если лекарство будет признано действенным, члены этой группы могут получить и его.

Но последствия обмана не всегда благотворны. В одном классическом эксперименте (Hartshorne & May 1928) детей искушали воровать и лживо утверждали, что их не поймают. Некоторые дети действительно что-то украли, и исследователи заключили, что обстоятельства часто влияют на честность. Они доказали это своим собственным поведением не в меньшей степени, чем поведением детей.

Во втором известном исследовании (Festinger и др. 1956) социальные психологи проникли в религиозную группу под видом новообращённых, и их поведение было поставлено под вопрос (Smith 1957). В эксперименте о влиянии давления группы на суждение её члена (Asch 1948) пять помощников исследователя представились новичками, каким на самом деле был испытуемый.

И обман, и порождённый им стресс могут быть подвергнуты сомнению с этической точки зрения. Русские психологи, исследовавшие ту же проблему, избежали необходимости в обмане выбором наивных испытуемых и отысканием естественно возникающих тенденций в своих результатах, но [были вынуждены] смириться со снижением действенности своего эксперимента.

В подобных ситуациях этически разумным правилом была бы обязанность исследователя сообщать возможному испытуемому все обстоятельства предстоящего эксперимента, которые можно было бы полагать существенными для его согласия на этот опыт. Такой этический подход во многом привлекателен, но сопряжён с большими потерями. Так, многие исследования динамики поведения окажутся невозможными. Помимо этических, имеются, однако, и другие практические доводы в пользу полного объяснения цели эксперимента. Иначе же, становясь всё более искушённой, общественность сможет считать, что во всех социологических экспериментах следует ожидать обмана, и тогда даже истина окажется сомнительной. Этот вопрос сложен и важен, и во всяком случае социолог быть может должен всегда знакомить с ней общественность.

[4] Стресс в социологических исследованиях. Многие экспериментаторы подвергали испытуемых стрессу, но одного из них призвали к ответу за его очевидную бесчувственность к мучительным переживаниям его испытуемых и неспособность заметить более серьёзные последствия его метода. Критик (Baumrind 1964) весьма разумно указал, что неэтично подвергать испытуемых крайнему стрессу и привёл подобающие примеры из истории применения пыток к невинным в интересах науки. Возражение экспериментатора (Milgram 1964) дополнительно указывает на сложность проблемы и обосновывает значимость дальнейшего обсуждения этических проблем при исследованиях.

После эксперимента, приводящего к стрессу, с испытуемым обычно беседуют, объясняют произошедшее и стараются избавить его от любого остаточного беспокойства. Во многих случаях этого достаточно, однако были отмечены исследования, приводившие к столь сильному стрессу, после которого было бы нереально надеяться на благополучный результат подобных бесед. Неплохо было бы всесторонне исследовать возможные отдалённые последствия экспериментов, вызывающих стресс или связанных с обманом. Но возможно изучать реакции на стресс при естественных обстоятельствах. Указывалось ведь, что в жизни и так достаточно стресса по естественным причинам, и социологам не следует усиливать его.

Многие реакции непредсказуемы и могут наблюдаться только после происшествия некоторого события. Социологи, которые были готовы воспользоваться непредвиденными событиями, смогли провести прекрасные исследования непосредственно после несчастий, подобных смерчам и землетрясениям. Можно исследовать и обычно происходящие предсказуемые и неизбежные стрессы. В классах для первоклассников в первый день занятий и в комнатах ожидания для отцов в родильных домах можно изучать стрессы, возникающие вне зависимости от исследователя. Webb и др. (1966) представили полезное и возбуждающее воображение исследование методических возможностей в *социологических исследованиях, не вызывающих реакций*, в том числе и привлекающих внимание к этическим проблемам.

[5] Неразглашение получаемых сведений. У клиницистов это право широко (но не всеобще) признано обычаем, а в некоторых штатах и странах законом. Но научный исследователь не обладает столь же чётко теми же правами. К примеру, социолог может столкнуться с серьёзной этической проблемой, не имея ясных указаний о своём поведении. Если собранные им сведения представляются в суд как юридическое свидетельство, суд или одна из сторон может законно поинтересоваться надёжностью исследования и потребовать вызова респондентов в качестве свидетелей.

Обычно, однако, данные исследования добываются с уверением в анонимности, и нарушение этого обещания означает злоупотребление доверием и повредит методу исследования, поскольку уменьшит доверие общественности к тем организациям, которые применяют его. По крайней мере в одном случае суд поддержал право исследовательского бюро на неразглашение имён опрошенных, но другие судьи могут решить иначе. Социолог, проводящий исследования, во всяком случае обязан ознакомиться с соответствующими проблемами, чтобы быть в состоянии ответственно относиться к респондентам (King & Spector 1963). И можно надеяться, что он, предвидя подобные проблемы при планировании исследования, предохранится против некоторых возможных обстоятельств.

Проблему неразглашения сведений мы обсуждали в связи с исследованиями, но она может оказаться столь же уместной при других видах изысканий. Она также усложнена обязанностью исследователя разрешать знающим учёным знакомиться с ними.

[6] Вторжение в частную жизнь. В свободном обществе невмешательство в частную жизнь является одним из самых ценимых прав человека и весьма возможно важным условием для соединения опыта и достижений независимой личности. Социолог же занимается многими изысканиями, которые могут привести к вмешательству в жизнь отдельного человека. Чаще всего здесь, видимо, это происходит при сборе сведений о человеке или его семье и при их возможном официальном использовании без его ведома.

Общественность недавно обратила внимание на тестирование личности при оценке желающих поступить на работу, на проверку здоровья и недостатков характера школьников и т. п. В некоторых случаях были введены ограничения излишнего вторжения в частную жизнь. Вмешательство может относиться и к социальным институтам, действенная работа которых зависит от гарантий против него. Такова деятельность системы присяжных в США.

В 1955 г. несколько социологов с разрешения судьи, обвинителя и адвоката установили скрытые микрофоны в совещательной комнате присяжных и записали их обсуждения. Полученные сведения обрабатывались социологами особо тщательно, однако этот случай произвёл общенациональное негодование. Присяжных явно обманули, и они, естественно, возмутились. Ещё важнее была озабоченность в пристойности научного исследования устоявшегося социального института[1]. Социолог, взявшийся за подобную работу, должен особо заботиться об этических проблемах, поскольку он может повредить и социологии, и исследуемому социальному институту.

По мере того, как компьютеры всё действеннее хранят и перерабатывают данные, перед нами возникает опасность вторжения в частную жизнь совсем другого рода. Различные учреждения собирают всевозможные сведения об отдельных лицах за достаточное число лет, а результаты хранятся и обрабатываются централизованно. Возникает возможность того, что по поводу отдельного человека могут быть сделаны обширные и надёжные выводы, намного превосходящие его согласие на разглашение. Защита от невмешательства, вытекающая от раздробленности сведений или от крайнего утомления от анализа и его стоимости, быть может была действительно утрачена.

Одного примера будет достаточно для дополнительного указания значимости технологических усовершенствований. Стало возможным по почте заказывать подробный анализ реакции отдельного человека на многофазовый список характеристики личности. Такая оценка, для которой раньше был необходим труд высококвалифицированного клинициста, теперь намного быстрее выполняет компьютер. Этические последствия прогресса в компьютерной технологии ещё предстоит исследовать.

Проблема вторжения в частную жизнь возникает на пересечении двух высоко ценимых социальных благ: необходимости выяснения забот, мнений, побуждений, надежд людей и, опять же, необходимости сохранения прав личности. Противоречие этих социальных ценностей имеет давнюю историю (дыба и зажимы были устройствами для добывания сведений), но имеет существенное значение и сейчас. Число социологических исследований и зависимость от них постоянно возрастают, технология сбора сведений развивается, применяются электронные подслушивающие и записывающие устройства, фотоаппараты, компьютеры, сводки сведений об отдельных лицах, проекционные приборы, [как и прежде] внедряются в интересующие группы осведомители и сообщники.

Среди проблем, которые должны быть рассмотрены для достижения надлежащего соотношения между противоречивыми социальными и индивидуальными интересами, назовём значимость и здравомыслящее использование результатов исследования, осведомлённое согласие испытуемых на опыты, и сохранение доверительных сведений в тайне. Решения отдельных учёных по поводу этих моральных проблем должны быть согласными с мнением лиц равной квалификации или с единодушным мнением общества.

По мере того, как социолог оказывается в состоянии сообщать обществу всё более ценные сведения, он может ожидать от него лучшего понимания и большей поддержки при неизбежном вторжении в частную жизнь. Об осведомлённом и утонченном анализе проблем подобных вторжений см. Ruebhausen & Brim (1965).

[7] Проблема осведомлённого согласия. В медицине осведомлённое согласие пациента обычно считается условием его участия в исследованиях. Однако, размытое определение *осведомлённости* позволило понимать его по-разному. Решение, которое будет иметь последствие для всех исследований с участием человека, было принято в 1966 г. правлением университета штата Нью-Йорк. Оно точно определило ожидаемые условия для исследований в медицине (Langer 1966, с. 664):

Никакое согласие не является действительным, если оно не сделано человеком, обладающим для этого юридическими и умственными возможностями, и не основано на сообщении ему всех основных фактов. Любой факт, который может повлиять на согласие или несогласие, считается существенным. Пациент имеет право знать, что у него просят добровольного согласия и что он может отказаться по любой причине, разумной или нет, основанной на достаточной осведомлённости или предрассудке. Врач не имеет права скрывать от возможного добровольца ничего такого, что, поскольку это ему известно, может повлиять на его решение. И принимает решение доброволец, а врач не может лишить его этого права тем способом, которым он задаёт вопросы или ввиду необъяснённых обстоятельств.

В этом утверждении вместо слова *врач* можно прочесть *социолог*, а вместо *пациент – респондент*, и таким образом приобрести существенные руководящие указания о проведении социологических исследований. Но и здесь проблема не проста. Должен ли участник контрольной группы в медицинском эксперименте знать, что он не испытает никакого физиологического влияния, и что контролироваться будут лишь психологические результаты?

При подобной искренности многие медицинские исследования станут невозможными, и то же происходит в социологии, поскольку возможное достижение социально ценного познания следует сравнивать с возможной потерей исключительных индивидуальных прав. О явной связи того и другого в психологических исследованиях см. переписку Miller и Rokeach (1966). Последний указал на сложность проблемы принятия решений о моральных ценностях

в науке и вне её: она, как правило, связана с выбором не между хорошим и плохим, а между двумя или более положительными ценностями или между большим и меньшим злом.

Решения типа *всё или ничего* редко являются удовлетворительными[2].

[8] Исследования, касающиеся многих культур. Те многие этические проблемы, которые возникают при исследовании нескольких культур или наций, издавна заботили профессиональных антропологов, см., например, Redfield (1953) и *Statement* (1963 – 1964). В 1965 г. они же вдруг стали заметны общественности ввиду провала проекта Camelot и вызванного им замешательством. Проект, организованный Министерством обороны США, исследовал *причины революций и мятежей в неразвитых регионах мира*. Про него стало известно в одной из стран Южной Америки, затем последовали протест посла США, расследование Конгрессом, отмена проекта и требование одобрения госдепартаментом всех зарубежных исследований, организуемых правительством.

Тот факт, что Camelot стал национальным и международным cause célèbre, что им занимались послы, сенаторы, члены правительства, журналисты, официальные сотрудники университетов, социологи и сам президент, что его истолковали как операцию плаща и кинжала, – и что всё это произошло несмотря на искренность и доброжелательность участвовавших учёных, затемнило сопутствующие этические проблемы. Они должны быть серьёзно и утонченно рассмотрены социологами, не обязательно занимающимися исследованием многих культур.

Среди этих проблем назовём следующие: Должны ли цели бюро, организующего исследование, заботить социолога, даже обладающего правом полной свободы исследования? То же, относительно последующего использования полученных результатов? В чём состоит ответственность социолога за то, чтобы сам процесс исследования не оказался вредным для изучаемых? Обязан ли социолог сохранить возможность опроса тех же респондентов последующими исследователями? Существует ли момент, при котором недостатки планирования или метода исследования или отсутствие его научной значимости становятся по сути этическими проблемами ввиду возникающей обязанности их решения другими?

Эти и подобные вопросы могут казаться нетрудными, но сочувственное изучение проекта Camelot покажет их сложность и подчеркнёт необходимость их нового изучения социологами (Horowitz 1965).

[9] Социология и социальные проблемы. Социология может часто быть связана с решающими вопросами политики по отношению к общественности. Всё чаще поклонники той или иной политической и социальной политики обращаются к социологу, чтобы подкрепить свою точку зрения, либо сам социолог, воспользовавшись правом гражданина на публичные заявления о социальных и политических проблемах, обнаруживает, что его заявлениям доверяют в большей мере, чем можно было бы обосновать его данными. Действительно, его признают как учёного вне зависимости от его познаний о той или иной теме. Оказавшись в подобной необычной обстановке, социолог обязан особо осмотрительно сообщать о своих возможностях и представлять себе этические последствия своих заявлений. Проблемы, относящиеся, к примеру, к расовым характеристикам, так сочетают науку и политику по отношению к обществу, что их изучал научный комитет по поощрению благосостояния Американской ассоциации продвижения наук (*Science* 1963).

[10] Забота о подопытных животных. Психолог существенно зависел от подопытных животных (крыс, собак, птиц, приматов). Для их предохранения от пренебрежения и плохого обращения были разработаны формальные правила. Они требуют предоставлять животным достаточно пищи и воды, обеспечивать медицинский и в том числе послеоперационный уход и содержание в должных санитарных условиях, применять анестезию при операциях и иных болезненных процедурах и уничтожать гуманными средствами.

Комитеты по заботе о лабораторных животных периодически рассматривают эти проблемы. Служба общественного здоровья США опубликовала брошюру *Guide* (1963) и требует от получателей финансовой поддержки соблюдения условий для должного и гуманного обращения с лабораторными животными. Американская психологическая ассоциация настаивает, чтобы *во всех помещениях, в которых содержатся животные и производятся эксперименты на них,* были вывешены правила, озаглавленные *Руководящие принципы гуманной заботы и использования животных*.

Несмотря на эти усилия обеспечить высшие этические нормы, имеют место постоянные требования федерального законодательства о контроле использования животных, особенно собак и кошек. В 1964 г., во время его 88-й сессии, в Конгресс США было внесено 8 соответствующих законопроектов, два из которых были весьма ограничительными. Время от времени происходят случаи пренебрежения или неоправданного причинения боли, но в целом уход за животными хорош, и Конгресс не решился вводить законодательных мер в этой области (Brayfield 1963)[3].

[11] Общение в социологических исследованиях. В [первой половине] XVII в. Марен Мерсенн способствовал развитию науки своей обширной перепиской, и с тех пор проблема общения в науке крайне усложнилась, и появилось много сопутствующих этических проблем. Они включают плагиат, неверное представление сведений, злоупотребление доверием, приписывание себе излишних заслуг и иное неприемлемое поведение. С развитием того, что было названо *большой наукой*, существенно поддерживаемой государством, возникли проблемы нового и более утонченного вида. К примеру, заслуги за исследование, выполненное крупной организацией, не были, как кажется, верно приписаны ни одному только руководителю (что действительно имело место, и было опротестовано), ни 30 участникам, которые были недавно названы соавторами.

Продвижение в науке может зависеть от публикаций, но возрастает необходимость ограничить их существенными открытиями, которые вероятно окажутся полезными для других. Один лишь объём отчётов грозит заблокировать самые действенные системы кодировки, хранения и отыскания информации. Так, при навязывании одних и тех же открытий дважды примерно одной и той же аудитории нарушается развитие и распространение познания. Для контроля объёма публикаций было предложено следующее правило (Price 1964):

научная публикация должна считаться правом, если совершено какое-либо открытие, которое возможно станет необходимым читателям, но не быть обязанностью, обусловленной тратой времени и денег […]. *Кроме того*, […], *без особой просьбы ни одна рукопись не должна быть опубликована дважды*.

[12] Исследование морального совершенствования. Выше мы рассматривали теоретические и практические проблемы этики и социологических исследований. Теперь следует заметить, что сами эти исследования служат существенным источником понимания этического поведения и возникновения и совершенствования моральных норм. Пионерами в этой области были Hartshorne & May (1928). Piaget (1932) привёл теоретическую таблицу для показа стадий этого совершенствования у ребёнка, а антропологи и социальные психологи (Whiting 1963) исследовали влияние семьи на формирование характера в различных культурах. Русские педагоги не делали никакой тайны из того, что стараются применить преподавательский опыт для внушения детям коммунистических ценностей (Bronfenbrenner 1962). В США был учреждён Национальный институт детского здоровья и развития личности, чтобы способствовать исследованию нормального развития, и можно ожидать, что это поощрит фундаментальные исследования в этой области.

[13] Социальный контроль научных исследований. В современном обществе различные профессиональные (квалифицированного и неквалифицированного труда) и родственные группы сильно влияют на поведение отдельного человека. Возможно именно ввиду разнообразия этих групп они не выявляются в качестве средств социального контроля, однако было признано, что они ныне более авторитетны, чем организованные религиозные группы, и, кроме того, что они сильнее влияют на повседневное поведение, чем даже местные, штатные и национальные власти.

Многие из указанных объединений имеют формальные этические нормы, однако выяснилось, что в большинстве случаев они мало влияют на членов соответствующей группы (*Standards* 1955). Они являются одним из придатков своих групп и задуманы также и для укрепления общественного доверия [к себе]. Однако, в профессиональных группах порождаются традиции, нравы и надежды, которые действительно влияют на поведение и часто принуждают своих членов придерживаться особо возвышенных норм поведения. Если этический код согласован с давно установившейся традицией (как в *Principles of Medical Ethics*) или подкрепляются действенным механизмом принуждения, он может оказаться мощным средством социального контроля.

Американская ассоциация психологии применила теорию и методологию социологии для разработки кода этики (Hobbs 1948). Основные исходные данные для его составления были получены по описанию способов изучения критических происшествий.

Членов ассоциации просили описать ситуации, в которых какое-то участие принимал психолог, придерживаясь или нарушая этические нормы. Изучив более тысячи таких происшествий, [специальный] комитет вывел принципы, которых, видимо, придерживались психологи в своём поведении. В результате были составлены два документа: краткий код (*Standards* 1963) и Заявление книжного объёма (*Standards* 1953) об этических нормах, которые включают принципы, обсуждение проблем и примеры из указанных критических происшествий. Теперь проводится новое исследование, специально посвящённое этическим нормам в психологических исследованиях, и снова применяется тот же метод для вывода этических принципов.

Заявление психологов об этических нормах подкрепляется сбором подробных исследований, отобранных из документов комитетов (?) по этике, ответственных за соблюдение кода. Предполагается, что установление этических норм это бесконечно продолжающийся процесс и что участие членов Ассоциации в нём может быть важнее самого записанного кода для способствования высоким этическим нормам в профессии.

Комитет по сотрудничеству учёных Американской ассоциации по продвижению наук собирает подобные описания не обязательно для составления кода этики, но для иллюстрации этических проблем, с которыми сталкиваются учёные всех специальностей. Если учёные не отрегулируют своего собственного поведения к удовлетворению осведомлённых членов общества, то можно уверенно предсказать, что соответствующий контроль будет установлен законодательством или административными правилами.

В 1965 – 1966 гг. два основных федеральных агентства приняли руководящие правила по поводу этических проблем в исследованиях, финансируемых ими. Одно агентство настаивает, что тесты, вопросники и другие средства сбора сведений должны утверждаться в Вашингтоне специальной группой штатных работников и консультантов. Другое агентство потребовало, чтобы ходатайства о финансировании [исследований], возможно содержащих этические проблемы, рассматривались признанным местным комитетом лиц той же квалификации, что и [ходатайствующий] исследователь.

Это второе решение, как кажется, защищает испытуемых, основываясь на квалифицированном рассмотрении дела, но без опасности чересчур централизованного контроля научных изысканий. Впрочем, были ответственные исследователи, которые считали, что рассмотрение дела местными учёными той же квалификации является оскорбительным требованием, намекающим на неспособность и вину, тогда как следовало предполагать противное и вмешиваться, только если есть какие-то указания для проверки. И здесь тоже происходит социальный процесс установления надлежащих процедур, а подходящее решение ещё не выработано.

Можно ожидать, что со временем общество разработает полезное равновесие между необходимостями и познания, и предохранения отдельных лиц от вторжений, неудобств или стеснённого положения. Диалектическое напряжение между ценностями, фундаментальными для демократии, должно быть устранено в смысле и *общих принципов,* и конкретных случаев.

К примеру, свобода исследований должна быть уравновешена правами личности на невмешательство в его частную жизнь. И то, и другое высоко ценится в нашем обществе, проблема сложна, но её решение возможно. Приспособление и по существу, и по методу, вероятно окажется сравнимым с правилами, устанавливающими права известного землевладельца (eminent domain) и право отдельного человека владеть [недвижимой] собственностью[4].

Исследователь обладает здравомыслящими принципами; вот некоторые вопросы, ответы на которые не всегда ясны. Стоит ли добываемое познание наложенных для его отыскания ограничений? Не будет ли какой-либо иной план исследования столь же продуктивным и менее навязчивым? Полностью ли использовано осведомлённое желание испытуемого сотрудничать? Учтено ли в предположенном исследовании возможное ослабление его влияния на испытуемых, чтобы последующие исследователи не оказались в невыгодном положении? В какой степени предположенные методы согласованы с возникающими нормами или же они преднамеренно отклоняются от них?

Исследователь может также оценить и быть может выяснить, что его ответы в достаточной мере отвечают на следующие вопросы: Относятся ли его собственные нормы в одинаковой степени к этической и статистической изящности? Одобрят ли его другие знающие учёные? Признаёт ли его исследование более широкое общество или существенные части общества? Их поддержка существенна для развития социологии.

Величайшее значение имеет постоянное наблюдение за этическими проблемами и их обсуждение в журналах, при обучении, в широких аудиториях, в которых сами социологи взяли бы на себя инициативу вывода всё более поучительных и проясняющих принципов.

[14] Добавление. Прежде этические проблемы в исследованиях в основном заботили специалистов, теперь же они овладели вниманием общественности, живо интересуют политиков, авторов редакционных статей и даже телевизионных комментаторов. В вопросах профессиональной этики поведения решающим являются широкие и осведомлённые обсуждения.

Коды этики и руководящие указания важны для установления надлежащего научного и профессионального поведения, но самым действенным здесь является усиленное осознание и возбуждённая совесть. В результате оживлённого обсуждения обострились этические проблемы по таким решающим вопросам как невмешательство в частную жизнь, осведомлённое согласие, доверительное хранение сведений, проведение должных процедур при нарушении прав, право на помощь при стрессе, вызванным экспериментом.

Наибольший успех, видимо, произошёл в определении надлежащих основных правил проведения исследований. Самым неожиданным и серьёзным событием было вмешательство правительства для защиты прав участников экспериментов. Законодательство, руководящие административные указания о программах финансируемых исследований и судебные решения ясно выявили сознание общественности. После введения раковых клеток пациентам преклонного возраста и отказа от лечения сифилитиков с целью экспериментирования (Curran 1973) финансирующие федеральные агентства начали требовать систематической проверки применяемых методов исследований с участием добровольцев.

Эти требования имеют целью обеспечить соблюдение этических норм и обезопасить испытуемых в социологических и медицинских изысканиях. Предложения об исследованиях теперь должен рассматривать специальный комитет по месту работы соискателя, затем штатные работники финансирующего агентства и надлежащий национальный консультативный совет. В том же духе были объявленные правила, обеспечивающие должный ход работы, доверительность сведений и осведомлённое согласие участников исследований, равно как и пациентов, заключённых (?), школьников и др., в чью жизнь по любой причине вмешалось государство.

Уже в 1954 г. появилось казалось бы простое, а на самом деле блистательное решение главного судьи суда второй инстанции округа Колумбия Daniel L. Bazelon: при содержании в больнице душевно больного пациента помимо его воли, администрация больницы обязана сообщать о методах его лечения. Последовавшие судебные решения обеспечили права на лечение и образование тех, кто находится в специальных учреждениях, и на их свободу от тяжелого и плохо оплачиваемого труда. Были запрещены даже методы проверки умственных способностей школьников, если они сохраняли дискриминацию в школах. Действия правительства, разумеется, откликаются на заботы общественности, но в этом случае они были особенно успешными в повышении общего уровня осознания прав личности в учреждениях, которыми социологи интересовались уже издавна (в школах, больницах, тюрьмах).

Не является ли вмешательство государства в этические проблемы различных профессий неоправданным и вредным, как заявляли некоторые критики? Вряд ли. В демократическом государстве именно правительству население заявляет о своей приверженности моральным и этическим проблемам, равно как и о своих повседневных заботах. Можно пожелать, чтобы вносимые правительством поправки не становились необходимыми ввиду морального бесчувствия некоторых исследователей, но в конце концов лучшим другом учёного, придерживающегося этических норм, является осведомлённая и критическая общественность.

Вторым важным новшеством была работа специального комитета по этическим нормам в психологических исследованиях Американской ассоциации психологии (*Principles* 1973). По описанным выше методам Комитет собрал несколько тысяч критических происшествий при исследованиях, которые, как решили психологи, относились к этике. На основании этого материала Комитет сформулировал этические принципы по таким проблемам как ответственность за соблюдение этических норм, обязанность советоваться в сомнительных ситуациях с коллегами по профессии, условия разглашения сведений, пределы допустимого обмана, право испытуемого отказаться от [дальнейшего?] участия в эксперименте, доверительность протоколов исследования и т. п.

Последовали жалобы на ненужные и неоправданные ограничения свободы исследователей, однако работа Комитета основывалась на предпосылке о том, что существенным является широкое обсуждение разрабатываемых этических норм и что процесс разработки кода этики столь же важен, сколь окончательный результат. Его работа была успешной в достижении этой цели и в выработке самого тщательно разработанного руководства из числа имеющихся, способствующего социологу при составлении плана и осуществлении исследования с осведомлённым представлением о правах участников. Эта же Ассоциация опубликовала редакционную статью (Editorial 1977) об этических нормах, относящихся к проблемам, возникающим помимо исследований.

Третьей существенной новостью была разработка видоизменённого поведения и его применения почти в любой мыслимой ситуации, т. е. попыткой заменить сноровку и интуицию точным методом, при котором все могли бы вести себя должным образом; вот, кстати, интересный этический вопрос: что означает *должным образом*?

Эта новость существенна для обсуждения этики и морали именно потому, что требует серьёзного размышления об идее *человек как машина*, метафоры введенной Декартом и прояснённой Ламетри. Она, стало быть, была известна уже давно, однако видоизменение поведения лишило соответствующее понятие его метафизического характера и при определённых условиях превратило его в реальность. […]

Видоизменение поведения основано на предпосылке о том, что поведение и мышей, и человека контролируется внешними и непредвиденными обстоятельствами, и, кроме того, что эти обстоятельства часто удаётся точно контролировать (Skinner 1969). В принципе буквально тысячи экспериментов подтверждают эту механическую точку зрения и обеспокоили философов и богословов уже до появления книги Skinner (1971). С тех пор ожесточённые споры происходили в основном о моральных и этических проблемах, а приведенные доводы касались предположения о природе человека при различных оценках действенности контролируемого поведения, а также свободной воли и детерминизма и ответственности лиц, контролирующих поведение.

Четвёртым нововведением, которое углубило понимание этичности и моральности направленного вмешательства в жизнь отдельного человека, следует считать важные обсуждения, прошедшие по всему миру, о добровольном уходе из жизни, абортах, экспериментах на зародышах и о продлении жизни посредством особых мер. На первый взгляд эти проблемы далеки от социологических исследований, но последствия решений непосредственно относятся к ним.

Споры о морали и этике вышли за пределы научного мира в жилые помещения, на рынки и в законодательные собрания. Социологи были бы поистине счастливы, если их работа и в дальнейшем вызовет подобную общераспространённую озабоченность. Аналогичная озабоченность послужила бы вернейшей защитой социолога от вопиющих ошибок и от чрезмерного доверия мужчин и женщин, послушных методам, которыми они якобы управляют[5].

При планировании исследования социологу часто приходится сталкиваться с вопросом о том, какое вмешательство, какие неудобства и даже какой вред испытуемый, как можно ожидать, вытерпит в интересах приобретения новых познаний. К подобным решениям (?) примыкают крайне ограничительные руководящие указания по исследованиям, опубликованные в 1976 г. Национальными институтами здоровья США. Они ограничили исследования по рекомбинантной ДНК. Вплоть до настоящего времени папы римские, государи и простые смертные пытались ограничивать исследования природы[6], но эта мера оказалась, видимо, первой, которую сами учёные публично озвучили после тщательного обдумывания, потому что исследование той или иной проблемы может оказаться слишком опасным.

Если социология когда-либо сможет достичь такой же точности и быть так же контролируема, как это теперь возможно в биологии, не потребуются ли сравнимые ограничения и для неё?

Среди важных недавних событий, относящихся к этике и социологическим исследованиям, следует указать несколько симпозиумов, институтов, журналов и профессур, возникших с 1968 г., и посвящённых исследованиям этических и моральных проблем, связанных с успехами науки. Среди институтов заметны Институт общества, этики и наук о жизни (Нью-Йорк) и Институт биоэтики им. Дж. П. Кеннеди при [частном католическом] университете Джорджтауна. Из журналов назовём […].

В 1973 г. симпозиум, [посвящённый] Лойоле (Kennedy 1975) также обсуждал права человека и психологические исследования. В 1976 г. на годичном собрании Американской ассоциации психологии было представлено несколько докладов о свободе человека.

В конце 1960-х и ранних 1970-х годах в большинстве профессиональных социологических групп были серьёзно поставлены под вопрос обычные методы работы, ценности, связанные с научными дисциплинами и отношение социологии к обществу. Противники этого движения, которое прошло свою высшую точку, полагали, что оно пытается политизировать науки, а сторонники утверждали, что оно стремится к тому, чтобы науки осознали свою социальную ответственность, Его явно существенное влияние не было систематически изучено. С этим движением связаны Illich (1971) в образовании, Szasz (1970) в психиатрии, Gouldner (1970) в социологии, Bowles & Gintis (1976) в экономике и образовании и McCoy & Playford (1968) в политических науках.

Необходимо, к сожалению, упомянуть два серьёзных и получивших широкую огласку случая подделки данных исследования. Молодой исследователь в исследовательском институте рака

нарисовал чёрные лоскутки на коже белых мышей, чтобы казалось, что ему удалось пересадить кожу генетически несовместимых животных. (Culliton 1974, с. 644).

Известный психолог (Wade 1976) сфабриковал данные и даже фамилии соавторов в фальсифицированном отчёте об исследовании умственных способностей. Было предположено, что эти и другие [подобные] случаи отражают моральные настроения нашего времени. Вероятнее, однако, что они явились проявлением всегдашней человеческой слабости, но они также свидетельствуют о последующих исправлениях происходящих существенных ошибок (?) внутри самой науки, которой присуща этическая обязанность подобных действий.

В конечном счёте этические нормы исследований в социологии должны быть основаны на какой-либо теоретической или философской системе, а не просто описывать существующую практику. За последнее время этому вопросу было посвящено несколько публикаций; важным событием оказалось появление книги Rawls (1971). Следуя рационально-интуитивной традиции Локка и Канта, автор предлагает [ввести] социальный договор, основанный на понятии *правосудие как справедливость* […].

Ближе к традициям эмпирической социологии работы Scott (1971) и Kohlberg (1969). Первый утверждает, что моральному обязательству обучаются на основе тренировки побуждения. Он развивает свою формулу, предлагая интересную социальную психологию этики. Второй автор в традиции Piaget обращается к устной реакции детей на моральные проблемы как к основе для построения шкалы развития моральной возмужалости.

Исходя из экономических, социологических, политических и психологических источников, MacRae Jr. (1976, с. 5) представил важный синтез социологии и этики и полагает, что

научные положения и этические утверждения, хоть явно и отличаются друг от друга, могут быть плодотворно объединены в научных дисциплинах изучающих человека и общество.

Если возможно раздумывать о будущем и учитывать прошлое, то за последние 10 лет озабоченность этическими нормами вероятно окажется дважды смещённой. Во-первых, представляется, что нужны обязательства по отношению к другим и более обширному сообществу. Обсуждения этики усиленно подчеркнули права отдельного человека; по существу мы, возможно, находимся в периоде чрезмерного настаивания на них. Самоудовлетворение выходит на первый план, забота о других становится менее важной (Marin 1975; Bell 1976). Выживание человека (решающий критерий этических систем) может зависеть от поддержки альтруистических побуждений (Wilson 1976)[7]. Вероятно произойдёт некоторый откат, который придаст надлежащий вес закономерным нуждам социальной системы и укрепит этическое мышление.

Во-вторых, рассуждения об этике подчеркнули должный ход в защите индивидуальных прав[8], и здесь были достигнуты важные достижения. Но подчёркивание этого хода недостаточно, поскольку с ним легче иметь дело, чем с основными проблемами. Фундаментальный вопрос об этике в исследованиях связан с потерями и благами человека при углублении познания. […]

Этические проблемы в статистике. Они возникают и влияют на теорию статистики. К примеру, неоднократно обсуждались статистические проблемы доверительности и вторжения в частную жизнь. В *Records* (1973) статистические данные противопоставляются административным, а в более практическом смысле статьи, подобные Fellegi (1972), обсуждают проблемы и методы сохранения тайны в случае, при котором и составитель, и потребитель статистических сводок обладают современными компьютерами.

Неоднократно обсуждались условия для разрешения объединять или сравнивать данные, при которых сведения об отдельном человеке могли бы быть сведены воедино. Равным образом исследовалась возможность сохранения тайны без потери научного значения объединения данных (Boruch 1972).

Время от времени честность государственных и иных статистиков и ставилась под вопрос, и защищалась. Как и любой другой профессионал, статистик может столкнуться с противоречием между профессиональным или научным кодом и истинными или ощущаемыми целями своего работодателя, см. Hauser (1973), *Integrity* (1973) и Chambers (1965). О полезном обсуждении проблемы профессиональной честности см. Deming (1965) и Freeman (1963).

В дополнение к сказанному, статистики озабочены скрытыми или сфабрикованными данными; см. Zirkle (1954) и Culliton (1974). Уместно и психологическое исследование подобного обмана (Wade 1976), Kamin (1977).

Термин *осведомлённое согласие* означает ознакомление намеченных испытуемых или респондентов с целями, методами, анализом, применением и возможным влиянием эксперимента или исследования. Многие авторы настаивают на той или иной мере этической значимости такого согласия, однако существует и мнение о том, что чем сильнее требование осведомлённости, тем более обособленным будет множество подходящих испытуемых и респондентов. Эмпирически влияние осведомлённости не было в достаточной мере изучено, но работа в этом направлении активно ведётся. Некоторые её сторонники даже полагают её необходимой при измерениях, не привлекающих особого внимания (Webb и др. 1966), поскольку их публикация и анализ могут повлиять или отразиться на соответствующей социальной группе. Существуют и противоположенные утверждения о том, что чрезмерная щепетильность повредит научным достижениям в такой степени, что пострадают все социальные группы.

Некоторые этические проблемы возникают при надлежаще контролируемых рандомизированных экспериментах. Справедливо ли, к примеру, отказывать некоторым пациентам в экспериментальном медицинском лечении? Или иначе, справедливо ли подвергать некоторых пациентов экспериментальному лечению, которое может повредить им? И как рандомизация лечения или контроля повлияет на указанные обстоятельства?

Если назначение экспериментального лечения не рандомизировать, или если не выделять контрольной группы, выводы могут оказаться ошибочными или вводить в заблуждение, так что будущие пациенты подвергнутся ненужной опасности, см. Chalmers и др. (1972), Gilbert и др. (1975) и Meier (1975), а по поводу социальных психологических экспериментов Aronson (1972, гл. 9).

Примечания

1. В таком общем виде утверждение автора неверно. Известно, например, что Пуассон исследовал вероятность ошибочности приговоров в зависимости от предписанного для них большинства голосов присяжных, а также изменение процента осуждения при некоторых изменениях уголовного судопроизводства.

2. Неудовлетворительно было бы решение по принципу римской поговорки *Пусть погибнет мир, но восторжествует справедливость*.

3. Как в 1963 г. можно было сообщить о событиях 1964 г.?

4. Приведенное нами английское выражение автор указал без артикля, и фраза стала ещё менее понятна. Её перевод условен.

5. Утверждение о чрезмерном доверии непонятно.

6. Это утверждение неверно. Начиная по крайней мере с Кеплера и Ньютона, учёные пытались познать и объяснять явления природы, поскольку в них, в отличие от Библии, воля Господа проявлялась непосредственно. Впоследствии законы демографии долгое время также считались божественными.

7. Вот подходящая иллюстрация, относящаяся к эпидемиям холеры (Budd 1849, с. 27):

Все мы принадлежим к роду людскому и потому более зависимы друг от друга, чем склонны думать. […] *И тот, кто ещё никогда не был связан со своими более бедными соседями узами благотворительности или любви, может слишком поздно обнаружить, что такая зависимость существует и способна свести их в одно и то же время в общую могилу*.

8. *Должный ход* противоречит *откату* (см. чуть выше).

Краткие сведения об упомянутых лицах

Loyola I., Игнатий Лойола (1491 – 1556), основатель ордена иезуитов

De La Mettrie Julien Offray, Жюльен Офре де Ламетри (1709 – 1751), врач и философ

Библиография

К основному тексту

Asch S. E. (1948), Doctrine of suggestion, prestige and imitation in social psychology. *Psychological Rev.*, vol. 55, pp. 250 – 276.

Barber B. (1968), Sociology of science. IESS, vol. 14, pp. 92 – 100.

Baumrind Diana (1964), Some thoughts on ethics of research. *Amer. Psychologist*, vol. 19, pp. 421 – 423.

Brayfield A. H. (1963), Humane treatment of laboratory animals. *Amer. Psychologist*, vol. 18, pp. 113 – 114.

Bronfenbrenner U. (1962), Soviet methods of character education. *Amer. Psychologist*, vol. 17, pp. 550 – 564.

Festinger L. и др. (1956), *When Prophesy Fails*. Minneapolis.

Guide (1963), *Guide for Laboratory Animal Facilities and Care*. U. S. Public Health Service Publ. 1024. Washington.

Hagstrom N. O. (1968), Scientists. IESS, vol. 14, pp. 107 – 111.

Hartshorne H., May M. A. (1928), *Studies in Deceit.* New York.

Hobbs N. (1948), Development of a code of ethical standards for psychology. *Amer. Psychologist*, vol. 3, pp. 80 – 84.

Horowitz I. L. (1965), Life and death of project Camelot. *Trans-action*, vol. 3, No. 1, pp. 3 – 7, 44 – 47.

Kaplan N., Storer N. W. (1968), Scientific communication. IESS, vol. 14, pp. 112 – 117.

King A. J., Spector A. J. (1963), Ethical and legal aspects of survey research. *Amer. Psychologist*, vol. 18, pp. 204 – 208.

Kohlberg L. (1968), Moral development. IESS, vol. 10, pp. 483 – 494.

Langer Elinor (1966), Human experimentation. *Science*, vol. 151, pp. 663 – 666.

Milgram S. (1964), Issues in study of obedience. *Amer. Psychologist*, vol. 19, pp. 848 – 852.

Miller S. E., Rokeach M. (1966), Psychology experiments without subjects' consent. *Science*, vol. 152, p. 15.

Piaget Jean (1932 франц.), *Moral Judgement of the Child*. Glencoe, Ill., 1948.

Price D. K. (1964), Ethic of scientific publication. *Science*, vol. 144, pp. 655 – 657.

--- (1968), Science–Government relations. IESS, vol. 14, pp. 100 – 107.

Redfield R. (1953), *The Primitive World and Its Transformations*. Ithaca, N. Y.

Ruebhausen O. M., Brim O. G. Jr. (1965), Privacy and behavioral research. *Columbia Law Rev.*, vol. 65, pp. 1184 – 1211.

[Amer. Assoc. Advancement Sci.] ***Science*** (1963), Science and the race problem. *Science*, vol. 142, pp. 558 – 561.

Shils E. (1959), Social inquiry and the autonomy of the individual. В книге D. Lerner, ред., *Human meaning of the Social Sciences*. New York, pp. 114 – 157.

Simmel A. (1968), Privacy. IESS, vol. 12, pp. 480 – 487.

Smith M. B. (1957), Of prophesy and privacy. *Contemporary Psychology*, vol. 2, No. 4, pp. 89 – 92.

[Amer. Psychological Assoc.] ***Standards*** (1953, 1963), *Ethical Standards of Psychologists*. Washington.

[Amer. Psychological Assoc.] ***Standards*** (1955), Ethical standards and professional conduct. B. Y. Landis, ред., *Annals* [ассоциации], vol. 297. Philadelphia.

[Amer. Acad. Political & Soc. Sci.] ***Statement*** (1963 – 1964), Statement on ethics of the Society for Applied Anthropology. *Human Organization*, vol. 22, p. 237.

Webb E. и др. (1966), *Unobtrusive Measures*. Chicago.

Whiting Beatrice B., ред. (1963), *Six Cultures. Studies of Child Rearing*. New York.

Библиография к Дополнению

Aronson E. (1972), *The Social Animal*. San Francisco, 1976.

Bell D. (1976), *Cultural Contradictions of Capitalism*. New York.

Boruch R. F. (1972), Strategies for eliciting and merging confidential social research data. *Policy Sciences*, vol. 3, pp. 275 – 297.

Bowles S., Gintis H. (1976), *Schooling in Capitalist America*. New York.

Budd W. (1849), *Malignant Cholera*. London.

Chalmers T. C. и др. (1972), Controlled studies in clinical cancer research. *New England J. Med.,* vol. 287, No. 2, pp. 275 – 278.

Chambers S. P. (1965), Statistics and intellectual integrity. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. A128, pp. 1 – 16.

Culliton Barbara J. (1974), The Sloan – Kettering affair. *Science*, vol. 184, pp. 644 – 650, 1154 – 1157.

Curran W. J. (1973), The Tuskegee syphilis study. *New England J. Med.*, vol. 289, No. 14, pp. 730 – 731.

Deming W. E. (1965), Principles of professional statistical practice. *Annals Math. Stat.*, vol. 36, pp. 1883 – 1900.

Editorial (1977), Revised ethical standards of psychologists. *Amer. Psychological Assoc. Monitor*, vol. 8, pp. 22 – 23.

Fellegi I. P. (1972), On the question of statistical confidentiality. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 67, pp. 7 – 18.

Freeman W. W. K. (1963), Training of statisticians in diplomacy to maintain their integrity. *Amer. Statistician*, vol. 17, No. 5, pp. 16 – 20.

Freund P. A., ред. (1970), *Experiments with Human Subjects*. New York.

Gilbert G. P. и др. (1975), Assessing social innovations. В книге C. A. Bennet, A. A. Lumsdaine, ред., *Evaluation and Experiment*. New York, pp. 39 – 193. Сокращенный вариант в книге Fairley W. B., Mosteller F., ред, (1977), *Statistics and Public Policy*. Reading, Mass., pp. 185 – 241.

Gouldner A. W. (1970), *The Coming Crisis of Western Sociology*. New York.

Hauser P. M. (1973), Statistics and politics. *Amer. Statistician*, vol. 27, No. 2, pp. 68 – 71.

Illich I. D. (1971), *Deschooling Society*. New York.

[Amer. Stat. Assoc.] ***Integrity*** (1973), Maintaining professional integrity of federal statistics. *Amer. Statistician*, vol. 27, No. 2, pp. 58 – 67.

Kamin L. J. (1977), Burt's IQ data. *Science*, vol. 195, pp. 246 – 248.

Kennedy E. C. ред. (1975), *Human Rights and Psychological Research*. New York.

Kohlberg L. L. (1969), Stage and Sequence. В книге D. A. Goslin, ред., *Handbook of Socialization*. Chicago, pp. 347 – 480.

McCoy C. A., Playford J., ред. (1968), *Apolitical Politics. A Critique of Behavioralism*. New York.

MacRae D. Jr. (1976), *The Social Function of Social Science*. New Haven.

Marin P. (1975), The new narcissism. *Harper's Mag.*, 251, Oct., pp. 45 – 56.

Meier P. (1975), Statistics and medical experimentation. *Biometrics*, vol. 31, pp. 511 – 529.

[Amer. Psychological Assoc.] ***Principles*** (1973), *Ethical Principles in the Conduct of Research with Human Participants*. Washington.

Rawls J. (1971), *Theory of Justice*. Cambridge, Mass.

Records (1973), *Records, Computers and the Rights of Citizen*. *Report*. Dept Health, Education and Welfare. Publ. OS 73 – 94. Washington.

Rivlin Alice M., Timpane P. M., ред. (1975), *Ethical and Legal Issues of Social Experimentation*. Washington.

Scott J. F. (1971), *Internationalization of Norms. Sociological Theory of Moral Commitment*. Englewood Cliffs, N. J.

Skinner B. F. (1969), *Contingencies of Reinforcement*. New York, 1972.

--- (1971), *Beyond Freedom and Dignity*. New York, 1972.

Szasz T. S. (1970), *Manufacture of Madness*. New York.

Wade N. (1976), IQ and heredity. *Science*, vol. 194, pp. 916 – 919.

Webb E. и др. (1966), См. Библиографию к основному тексту.

Wilson E. O. (1976), *Sociobiology*. Cambridge, Mass.

Zirkle C. (1954), Citation of fraudulent data. *Science*, vol. 120, pp. 189 – 190.

VIII

Ирвинг Джон Гуд

Заблуждения в статистике

Irving John Good, Fallacies, statistical. IES, pp. 337 – 349

[Предисловие.] Мы в основном рассматриваем заблуждения в статистике, но неверные рассуждения обычно могут быть перенесены в неё и извне. После их обнаружения большинство заблуждений выглядят глупо, но встречаются они не только у дураков и статистиков. Ошибаются и великие люди, но приоткрывают своё величие, если признают свои ошибки и раскаиваются. Я упоминаю ошибки великих людей, чтобы читателям было интереснее.

Многие заблуждения, не обязательно в статистике, происходят потому, что принимают желаемое за действительное, а также от лени и занятости. Всё это ведёт к сверхмерному упрощению, к охоте любой ценой (даже за счёт ненужного *усложнения*) оказаться правым, пренебрежению противных доводов, излишней готовности следовать авторитетам или отвергать их, к чересчур доверчивому отношению к печатному слову (даже газетному), формальной системе[1] или формуле *Бог из машины*, либо к поспешному отвержению всего этого как *Дьявола из машины*.

Эти слабости, вызванные возбуждением, сами по себе не являются ошибками, но приводят к ним. Они ведут к просьбам, не учитывающим неблагоприятных для них доводов, притом с неосознанным использованием двусмысленных выражений, приводят к настойчивым утверждениям, что метод, успешно применённый в одной области, окажется единственно подходящим в другой, искажают рассуждения или упускают необходимость в них.

[1] Логические или синтаксические заблуждения. Вот пример неверного довода с верным следствием.

Не-кошка не имеет хвоста; у кошки на один хвост больше, а потому у неё один хвост.

[…] Несколько утрируя, P. M. S. Blackett как-то сказал, что физик доволен доводом, если приводит к выводу, который считает верным.

[2] Ссылки на авторитеты. Ackermann (1907) в первую очередь рассматривал не ошибочные рассуждения, а фактические ошибки, многие из которых происходят от согласия с авторитетами, хотя он и сам по меньшей мере дважды был введен в заблуждение именно по этой причине. Так, ссылаясь на нескольких авторов, к примеру на [газетную статью 1927 г. одного известного врача], он (1907/1950, с. 174 – 175) заявил, что полагает ошибочным мнение о том, что из всех видов курения курение сигарет наиболее полезно [наименее вредно]. Теперь считается, что курить сигареты вреднее, чем сигары или трубочный табак, хотя в конце концов утверждение врача может оказаться верным.

Затем Аккерман (с. 709 – 710) упомянул мнение о том, что *атомная энергия может оказаться полезной*, но сослался на Резерфорда (газета *Evening News* 11 сент. 1933 г.), который заявил, что *каждый, ожидающий, что превращение* [распад] *атомов окажется источником энергии, болтает вздор*.

Несправедливо было бы обвинять Аккермана в доверии этим авторам, но полезно иметь в виду, что даже высшие авторитеты могут ошибаться, и притом когда настойчиво высказывают своё мнение. Их нежелание выглядеть слишком научно следует иногда допускать, особенно если они занимают административные должности (?).

[3] Как в действительности надо ставить вопрос? Друг спросил умиравшую Гертруду Штейн: *Каков же ответ*? Она прошептала: *Каков же вопрос*? Чтобы увериться в том, что задан *надлежащий* вопрос, статистику важно выяснить его цель. Chambers (1965) указывает, что когда член парламента попросил [просит] сообщить некоторые числовые данные, не содержащиеся в опубликованных материалах, он неизменно выясняет цель запроса. Чаще оказывается, что недостающие данные не были нужны и что другие опубликованные данные были бы полезнее, или что задававший вопрос был вообще введен в заблуждение.

Разумным часто оказывается предварительное исследование без ясного представления об их цели. Мы только что заметили ошибочность мнения о том, что искомые сведения непременно нужны вне зависимости от того, ясна ли цель запроса или нет. Kimball (1957) обсуждает ошибочность представления *верного ответа на неверный вопрос*[2].

[**4**] **Пренебрежение сутью выявленного факта.** Рассмотрим, к примеру, отчёты о смертях в дорожных происшествиях, публикуемых после праздничных дней. Многие подумают, что увеличение числа смертельных случаев в такие дни вызвано соответствующим возрастанием опасности вождения. Это может быть и верно, но рассуждение ошибочно. Если сравнивать праздничные и обычные дни по числу смертельных случаев на километр пройденного пути, то вывод может оказаться противоположным, потому что при большей плотности движения его средняя скорость

снижается, что возможно уменьшает серьёзность, если не количество происшествий.

[5] Бог из машины – ошибки в мере точности. Если нам известен механизм или формальная система, обеспечивающая точный ответ на вопрос, мы склонны указать его и ни о чём не спрашивать. Но точные методы часто дают ответы на неверные вопросы.

Одна из основных задач статистической методологии состоит в борьбе со смешиванием желаемого и действительного и достижении некоторой степени объективности в вероятностных утверждениях. Однако, абсолютная объективность и точность редко или никогда не возможны, всегда или почти всегда при любом применении статистических методов требуется суждение, и мы это (Good 1950) особо подчеркнули.

Неопытные статистики часто переоценивают возможную степень точности и объективности. Простейший вид заблуждения по поводу точности, который свойствен статистикам меньше, чем другим, состоит в применении какого-либо среднего без указания *разброса*. Родственной ловушкой оказывается оценка некоторой меры разброса с пренебрежением систематическими ошибками (смещением). Применение среднего без учёта меры разброса может особо вводить в заблуждение и даже, если выборки невелики и разброс поэтому значителен, оказаться смешным.

Но пусть среднее и стандартное отклонение *совокупности* заданы, можно всё-таки ошибиться, если она очень асимметрична. В таком случае лучше исходить из квантилей.

Рандомизация. Заблуждения по поводу точности встречаются и в связи с важным методом рандомизации. Рассмотрим знаменитое испытание вкуса чая (Fisher 1935, гл. 1; Good 1956). Дама утверждает, что может лучше, чем случайным образом, по вкусу определить, было ли молоко влито до или после самого чая. Мы решаем испытать эту её способность, давши ей 20 чашек чая, в 10 из которых молоко было влито до, а в остальных – после чая.

Пусть дама сообщает верный ответ намного больше 10 раз, но порядок следования чашек не был рандомизирован. Можно будет заподозрить, что, как бы мы ни выбрали этот порядок, она, возможно, была склонна угадывать его по той же психологической причине, по которой мы его установили. И поэтому мы рандомизируем порядок следования чашек и, видимо, применим хвост гипергеометрического распределения как точную, объективную и фактически полную сводку статистической значимости эксперимента.

Но поразмыслим теперь о случайной последовательности чашек. Если в следовании чашек первого рода существует какая-нибудь правильность, например, порядок 3, 6, 9, 12, 15, 18, мы тем самым подрываем точную пригодность нашего результата по отношению к исследуемой гипотезе. Можно только частично устранить появившееся затруднение при помощи *неполной рандомизации*, потому что каждая конечная последовательность обладает некоторой специальной схемой, пусть сколь угодно неясной. Решить, что какая-либо заданная особенность несущественна, можно только субъективно.

Сохранить точность можно только, если обратиться к *статистическому двойнику* (Good 1960 – 1961), который должен будет вместо нас проделать эксперимент, использующий рандомизацию, а именно, сообщить количество успехов, но ни в коем случае не указывать порядка следования чашек. В рандомизированном эксперименте точность можно достигнуть только при отбрасывании части информации. Впрочем, описанный подход не является общепринятым.

Если количество чашек очень велико, значимость указанного замечания о рандомизации обычно окажется пренебрежительной. Но длительные эксперименты дороги, чего никогда нельзя забывать при их статистическом планировании. Сам по себе метод рандомизации вовсе не ошибочен, но неверно предполагать, что без потери информации он может привести к точному хвосту распределения, относящемуся только к начальной гипотезе.

[6] Отбрасывание информации. В своей грубейшей форме это часто по меньшей мере такое же зло, как и отъявленная ложь. Но мы только что показали, что в противном случае точность рандомизации теряется, а сейчас мы ещё сильнее подчеркнём, что неверно считать, что отбрасывание информации всегда преступно. Обратимся к цифровым сообщениям. Если электрический *импульс* заданной формы может быть ослаблен и искажён шумом, то часто включают какую-либо цепь, чтобы восстановить эту форму, *регенерировать* импульс.

Этот метод предполагает, что импульс действительно был. Но поскольку шум в электронной системе допускает лишь вероятность того, что предположенный импульс существует, регенерация приводит к потере информации. Однако, учитывая суть *последующего* канала связи, можно утверждать, что эта потеря часто с избытком возмещается. Мы этого утверждения здесь не доказываем, но оно по здравому смыслу не удивляет[3].

В педагогике соответствующий принцип означает, что при обучении новичков необходимо упрощение, а в статистике аналогичный метод известен как *сокращение данных*, т. е. их представление в более усваиваемом виде. Если статистики *достаточны*, потери информации не будет, но для действенного сокращения данных часто приходится удовлетворяться иными статистиками. И неверно поэтому утверждать, что отбрасывание информации всегда является статистическим преступлением. Заметим, однако, что статистика, кажущаяся достаточной, может и не быть таковой, если неверна модель[4]. Иногда публикуется лишь средняя и дисперсия выборки, что не даёт возможности проверить пригодность модели, для которой такие статистики были бы достаточны.

[7] Терминологические двусмысленности. Существенные случаи такой двусмысленности встречаются и в философии статистики, и в её практических приложениях. Будучи указаны, они часто столь же очевидны, как двусмысленность *не-кошки*, но до того они вызывают серьёзные споры не понимающих друг друга сторон. Впрочем, многие проблемы философии вероятности проясняются, как только выделены различные виды вероятности (Good 1959a). Мы не обсуждаем здесь, могут ли все эти виды быть сведены воедино, или *существуют* ли они, но их обсуждают.

В математических теориях применяются тавтологические или математические вероятности[5], которые не требуют для своего использования никакого определения. Они встречаются и в определении *простой статистической гипотезы*, т. е. такой, для которой *по определению* назначены некоторые вероятности вида P(E/H). Здесь E – некоторое событие или предложение asserting that the event obtains.

Есть и *физические* или материальные вероятности или *шансы*. Они соответствуют тавтологическим вероятностям посредством *лингвистической* аксиомы: утверждение, что H истинно, означает, что физическая вероятность события E из некоторого класса равна P(E/H). Существуют и *логические* вероятности или правдоподобия. Они *субъективны*, указывают силу убеждения и после достаточного размышления применяются при заключении пари, а *мультисубъективные* относятся к группам лиц. Наконец, есть и *психологические* вероятности, т. е. вероятности того, что человек ведёт себя as if they accept[6] даже без применения каких-либо критериев для проверки их согласованности.

При перепутывании двух из указанных шести видов вероятности друг с другом могут произойти *пятнадцать различных видов ошибок*. К примеру, часто говорят, что нет смысла обсуждать вероятность параметру совокупности принять определённое значение, потому что он *либо принял это значение, либо нет, так что эти вероятности равны 0 или 1*. Тем, кого не распирает возбуждение, вряд ли следует упоминать, что если понимать эти вероятности не как физические, а как логические или субъективные, то они не обязательно равны 0 или 1[7].

Даже физические вероятности можно перепутать друг с другом, если их ошибочно относят к одному и тому же событию. К примеру, видимые вариации в проявлении преступлений определённого вида или определённого заболевания от места к месту, как очень часто обнаруживается, вызываются лишь различием методов квалификации (классификации). Число прелюбодеяний в громадной степени возрастёт, если закон неожиданно примет определение Иисуса (Матфей 5:28):

Всякий, кто смотрит на женщину с вожделением, уже прелюбодействовал с ней в сердце своём.

Но соучастники прелюбодеяния редко составляют официальные отчёты о своих действиях, и поэтому регистры преступлений видимо предоставят лучшие примеры. Один из них (Wallis & Roberts 1956) относился к серьёзным преступлениям в Нью-Йорке. Утверждалось, что с 1949 по 1950 г. их число возросло на 34,8%, однако впоследствии выяснилось, что по крайней мере в значительной степени это было вызвано пересмотренным методом их квалификации.

Этот вид практических статистических заблуждений исключительно распространён в социологии, и его надо особо опасаться. Так, два стандартных определения числа безработных в США, – *среднемесячная доля* и *годичная доля*, – отличаются друг от друга более чем втрое. Грубо говоря, первая это среднемесячное число безработных в данном году, вторая – число бывших когда-либо без работы в том же году (Gordon 1968).

[8] Примером терминологической ошибки служит путаница слов *некоторые* и *все*. Её совершил [известный невропатолог Джексон.] Некоторое повреждение левого полушария головного мозга он, видимо, перепутал с его полным разрушением (Penfield & Roberts 1959, с. 62). Другой пример той же ошибки состоит в том, что, если по мнению каждого разумного знатока, некоторые стихотворения лучше других, то при любом наборе стихов один из них должен быть наилучшим. В более общем смысле легко проглядеть возможность *частичного* упорядочения.

Хотя предположение о подобном упорядочении вернее, чем полное упорядочение [о полном упорядочении], оно слишком сложно, чтобы его применить в заданной ситуации. К примеру, на конкурсе красоты каждая участница может быть наилучшей в своём роде, но может оказаться существенным присудить приз только одной из них. При некоторых социальных исследованиях респондентов просят расположить несколько объектов (objects) по порядку их достоинства (merits). В ином варианте, который часто окажется менее размытым из-за необходимости достичь решения в сомнительных случаях, требуется сравнивать пары объектов, но не допускать ответа *сравнения нет*[8].

[9] Пренебрежение родственными сопутствующими переменными. *Смертность в американской армии в мирное время ниже, чем в Нью-Йорке. Бросай город, вступай в армию*. Ошибка здесь в том, что методы отбора в армию смещены в пользу продолжительности жизни и по возрасту, и по здоровью, и вот эти явно относящиеся к делу переменные не были учтены. Можно также считать, что заблуждение произошло из-за не учтенной возможности смерти жителей Нью-Йорка от болезней раннего детства, хронических заболеваний и ввиду преклонного возраста, тогда как солдаты очень редко подвержены этим опасностям [опасности хронических заболеваний]. Наконец, см. ниже, ошибку можно объяснить *смещённой выборкой*.

[10] Пренебрежение половиной таблицы сопряжённых признаков. Обычно считается, что в Англии учёные на государственной службе зарабатывают в среднем больше, чем преподаватели университетов. Однако, Rowe (1962) отметил, что средний возраст последних ниже, потому что многие из них оставляют преподавание до возраста примерно 35 лет. Он показал, что у университетских преподавателей старше 35 лет средний заработок выше, чем у учёных на государственной службе, однако не оценил их *возможного* заработка на этой службе. Он опровергнул первоначальный довод, но не задал себе действительно требуемого вопроса, на который, однако, очень трудно ответить. Возможным подходом, который прольёт на него некоторый свет, было бы выяснение распределения заработков в функции должности, возраста и результатов теста на интеллект.

Вечная проблема здесь состоит в выборе ковариат и момента, в котором следует прекратить этот выбор, потому что в типичном случае число возможностей слишком велико. Имеет место и родственное затруднение: чем больше число классифицирующих переменных (размерность таблицы сопряжённых признаков), тем меньше случаев в соответствующей ячейке. В этом состоит одна из нерешённых проблем науки о страховании жизни: в ней проблема оценки вероятностей в многомерных таблицах сопряжённых признаков важна с философской точки зрения. Мы Good (1965) провёли некоторое исследование этой проблемы и указали соответствующую литературу.

В некоторых случаях какой-то факт почти никогда не учитывается, хотя при обозрении прошлого он явно оказывается весьма значимым. В конце 1950-х годов многие в США утверждали, что уровень штата преподавателей в колледжах снижается, потому что снижается доля вновь принятых на работу преподавателей с докторской степенью. Но в этом рассуждении не учли, что повышается доля учителей, ставших докторами науки после поступления на работу. Cartter (1965) утверждает, что почти никто верно не истолковал существовавшее положение.

[11] Смещённые выборки. […] Не всегда замечают, что описания зверств обычно оказываются смещённой выборкой[9]; газеты склонны описывать зверства политических противников чаще зверств сторонников. Исключением были зверства фашистской Германии. Они были настолько зловещи, что прежде, чем им поверили, потребовались непогрешимые свидетельства. О них, кажется, ничего не было сказано в издании 1951 г. Британской энциклопедии[10].

Иногда выводы сделаны по выборке, смещённой ввиду сезонных вариаций. Так, Министр труда Wirtz (Starnes 1962) заявил непосредственно перед выборами, что

Число американцев, имеющих работу, сейчас более, чем на 4,5 млн превышает их число на январь 1961 г., когда к власти пришла нынешняя Администрация.

Позже он признал, что эту цифру следует уменьшить до 1,224 млн, поскольку *не полагается сравнивать цифры января и октября без сезонного выравнивания*. Аналогичную ошибку совершил губернатор Нью-Йорка Нельсон Рокфеллер, который как-то сослался на прирост рабочих мест, равный 450 тыс., с момента своего вступления в должность.

В социологических исследованиях, к примеру, при опросах, трудно избежать смещений. Формулировка вопросов часто неудовлетворительна, а иногда, особенно при политических и коммерческих исследованиях, она весьма спорна.

Мало того, смещенный вывод может последовать и при несмещённой выборке, если вычислять уровень значимости различных критериев начальной гипотезы и выбирать наиболее соответствующий пожеланиям. Подобные критерии основаны на одной и той же выборке, а потому статистически взаимозависимы, и существует разумная вероятность того, что один из 20 критериев достигнет уровня значимости в 5%. Мы (Good 1958a) предложили метод сочетания таких *параллельных* критериев.

[12] Пренебрежение неинтересным. Допустим, что эксперимент имеет уровень значимости 5%. Должны ли мы отвергнуть начальную гипотезу? Быть может другие исследователи проделывали тот же эксперимент и не получили значимых результатов. Если принять их во внимание, общая значимость может оказаться несущественной. Более того, эти другие эксперименты быть может не были опубликованы как не доставившие значимых результатов, а потому неинтересные.

Это обстоятельство объясняет, почему некоторые кажущиеся успехи медицины впоследствии не оправдывают возлагавшихся на них надежд. Публикуемая статистика смещена в сторону интересного. Как выразился один врач (Good 1958b, c. 283; Sterling 1959), *Торопитесь, пока не поздно, принимать это лекарство*.

[13] Выборка слишком мала. Доверие к подобным выборкам является одной из самых распространённых и простейших статистических ошибок. В 1933 г. один врач, Медуна, решил, что шизофрения и эпилепсия несовместимы, потому что редко происходят совместно. Соответственно, он начал химическими средствами вызывать судороги у душевно больных. И таким образом благотворное влияние подобной меры на лиц, страдающих депрессией, было в конце концов случайно обнаружено. Но выборка у Медуны была слишком мала, и на самом деле оказалось, что корреляция шизофрении и эпилепсии *положительна* (Slater & Beard 1963). Мораль: есть смысл экспериментировать, не имея теоретически обоснованной причины верить в успешность работы[11].

[14] Намеренно ошибочное применение графиков, рисунков и схем. Газеты часто используют эти средства, надеясь обмануть читателей, не имеющих опыта в их истолковании. Иногда график недостаточно пояснён; или же масштаб выбран так, чтобы исказить наклон; или же график показан в перспективе таким образом, который подчёркивает последнюю фазу процесса, или же он показывает слишком незначительный отрезок временного ряда, притом начиная с (локального) минимума (уловка, полезная продавцам акций).

Для обмана при помощи схем полезно (!) изображать, например, заработки прямоугольными копилками, *линейные* размеры которых пропорциональны им, так что их накапливание намного преувеличивается. Другой метод приписывается одному из банков Бостона (Huff 1954). Этот банк представил государственные затраты картой США, на которой штаты с низкой плотностью населения были затемнены, чтобы показать, что общие государственные затраты были равны доходам их населения. Банк надеялся, что читатель подумает, что федеральные расходы, являющиеся долей полного дохода США, равны площади всех затемнённых штатов делённой на площадь всей страны[12].

[15] Меньше или меньше необходимого? Мы иллюстрируем путаницу между этими выражениями в контексте наследственности и укажем преувеличенное упрощение теории естественного отбора. Пусть действительно более умные люди склонны иметь меньше детей, чем менее умные и что уровень интеллекта передаётся по наследству. Мы не комментируем указанного предположения и не приводим точного истолкования *умного*. И тогда средний уровень интеллекта видимо должен снижаться.

Эта ошибка будет признана большинством читателей известного зоолога Medawar (1960, с. 86) ввиду его утверждения (и несмотря на его оговорку):

Если не умные с рождения лица склонны иметь более многочисленные семьи, то при некоторых ограничительных условиях можно заключить, что средний уровень интеллекта будет снижаться.

Чтобы показать, что без указанной оговорки этот довод не имеет силы, достаточно применить модель, которая в иных случаях оказалась бы намного упрощенной (Behrens 1963). Пусть 10% населения умны и 90% не умны и что в среднем у 100 умных отцов будет 46 детей, только 28 из них умных, а у 100 не умных 106 детей, только 8 из них умных. Видно, что ожидаемая доля умных мужчин (males) окажется постоянной[13].

Но был ли задан верный вопрос? Допустим, что мы убеждены, что общий уровень интеллекта снижается, и предложим меры, поощряющие более умных иметь больше детей. Но разве не стали бы мы предлагать их при *повышении* общего уровня интеллекта? Не захотели бы заметить ускорение этого возрастания? Да, разумеется, хотели бы. Приняв эту точку зрения, мы могли бы, не соглашаясь полностью с выводами автора, вполне одобрить некоторые его рекомендации.

[16] "Регрессивная ошибка". Если мы случайным образом выберем низкого или высокого человека, его потомки будут скорее ближе, чем он, к среднему росту населения. Гальтон назвал это явление регрессией. Если теперь рассмотреть рост сыновей низких и высоких мужчин, можно будет заключить, что вариации роста убывают со временем[14]. Но это – пример регрессионного заблуждения, в чём можно убедиться, рассмотрев рост родителей низких и высоких людей, что приведёт нас к противоположному выводу!

Wallis & Roberts (1956) приводят несколько других примеров заблуждения того же вида. Так, по распространённому мнению второй год состояния в главной спортивной лиге неудачен для новых игроков в бейсбол, успешно закончивших свой первый год.

[17] Необоснованное применение формул или теорем. Это – специальный и очень частый случай заблуждения вида *Бог из машины*. Вот несколько примеров.

Неявная предпосылка независимости. Пусть эксперимент состоит из n испытаний с вероятностью успеха в каждом, равной p. Будет ли дисперсия числа успехов равна $np(1 - p)$, как при независимости? Примером может служить проверка качества изделий. Приведенная формула настолько хорошо знакома, что мы склонны считать, что она всегда обеспечивает хорошее приближение. Но знакомство чревато ошибками; в случае цепей Маркова, см., например, Good (1963), она может оказаться совсем иной, как при выборочном исследовании характерных черт у детей в семье или фруктов на дереве[15].

Другой пример ошибочно предположенной независимости относится к вариации физиологических особенностей. Пусть этих особенностей будет всего 8 и каждая из них допускает три равных по численности значений. Тогда лишь один человек из $3^8 = 6561$ окажется в средней (нормальной) группе[16].

Предположение о форме определяет распределение. Пусть n_{ij} будет частостью появления последовательных цифр (ij) в последовательности N

случайно отобранных цифр (i, j = 0, 1, 2, …, 9). Ясно, что $\sum n_{ij} = N - 1$. Пусть

$$\psi^2 = \frac{10}{N-1}\sum_{i,j}[n_{ij} - \frac{N-1}{100}]^2.$$

Не менее четырёх раз в статистической литературе ошибочно принималось, что при больших N величина ψ^2 имеет асимптотическое распределение хи-квадрат. В одном случае эта ошибка привела к неверному отклонению метода отбора псевдослучайных чисел. Ошибочное распределение видимо появилось ввиду формальной тождественности выражения ψ^2 со знакомой статистикой критерия хи-квадрат. Ссылки на три из четырёх упомянутых источников и на статью с верным методом применения ψ^2 см. Good (1963). Неверное применение указанного выше так называемого сериального критерия особенно пагубно при работе в бинарной системе счисления.

Ошибочное предположение о том, что победитель опережает побеждённого n/2 раз при n испытаниях относится к статистически независимым безобидным азартным играм. Это – неверное применение закона больших чисел и объясняется оно одной из самых поразительных теорем теории вероятностей, так называемым законом арксинуса.

Пусть доля времени, в течение которой определённый игрок опережает своего противника, менее x. Тогда, см., например, Феллер (1950/1964, с. 95), вероятность этого утверждения примерно равна

$$\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}.$$

Это означает, что гораздо вероятнее, что при любой продолжительности игры определённый игрок будет намного чаще либо опережать своего противника, либо отставать от него, чем быть примерно наравне с ним. К примеру, вероятность определённому игроку опережать противника или отставать от него на протяжении не менее 90% общей продолжительности игры примерно равна 0,40, а для 40 – 60% она окажется равной лишь примерно 0, 13. По словам Феллера, закон арксинуса *должен служить напоминанием для тех, кто легко обнаруживает “явные” вековые тренды* в экономических и социальных явлениях[17].

Ошибка игрока. Простейшее неверное применение закона больших чисел или *закона средних* известно как ошибка игрока. В первую мировую войну многие солдаты укрывались в воронках, полагая, что два снаряда редко попадают в одно и то же место. По этой же причине английский мастер по шахматам P. S. Milner-Barry решил оставить за собой квартиру, разбомбленную во второй мировой войне, однако её разбомбили вторично.

При игре в рулетку, как говорят, предпочитают ставить на тот цвет, который редко выигрывал в недавних играх[18]. Практически, конечно, если монета впала одной и той же стороной 50 раз подряд, повторение этого события в следующем броске окажется *более*, а не менее *логически* вероятным. На самом деле вероятно обе стороны монеты тождественны.

Существуют, разумеется, обстоятельства, при которых повторение того же самого события менее вероятно, например, при некоторых несчастных случаях и во многих случаях при выборках без возвращения. Обычно эта проблема является чисто эмпирической, но выражение *ошибка игрока* или заблуждение Монте Карло обычно относится к последовательности событий, статистически независимых по крайней мере с хорошим приближением.

Неверное применение закона больших чисел к парам объектов. Это заблуждение при рассмотрении пар объектов, отобранных из какого-либо множества, хорошо запоминается при изучении *задачи о дне рождения*. Если 24 человека отобраны случайно, то более вероятно, что по крайней мере двое из них родились в один и тот же день и месяц. Это легко доказать, но неплохая интуитивная *причина* сказанного состоит в том, что число пар в группе из 24 человек равно 276 и $\exp(-276/365) < 1/2$. Этот грубый довод основан на пуассоновой аппроксимации вероятности отсутствия *успехов* в 276, грубо говоря, независимых испытаниях с единой вероятностью успеха в 1/365. Полученный результат тем более верен, если дни рождения не распределены равномерно в течение года.

В феврале 1951 г., в программе *Обзор науки* Британской радиовещательной корпорации, C. R. Hewitt заявил, что вероятность совпадения отпечатков пальцев двух человек менее $1/64\cdot 10^9$. Он поэтому заключил, что никакие два человека не имеют одних и тех же отпечатков, и таким образом совершил ошибку *дня рождения*. Его довод останется ошибочным, даже если исключить схожесть отпечатков у родственников, поскольку число *пар людей* на Земле составляет $4\cdot 10^{18}$. Вывод может быть верен[19].

Аналогичное заблуждение происходит в связи с предвидением. Пусть, хоть это и совершенно нереально, известен лишь один примечательный и хорошо удостоверенный случай пророческого сна у кого-то. Какой низкой может быть вероятность того, что сообщение об этом, если оно правдиво, само по себе убедит нас в возможности предвидения? Обратная (reciprocal) вероятность должна, видимо, быть порядка произведения населения Земли на число снов у человека на число пережитых им наяву происшествий, т. е.

доходить быть может до 10^{27} [$1 - p = 1 - 10^{27}$].

Это неформальное приложение статистики должно отбить охоту от готовности сразу же решить, что свидетельство об очевидном пророческом сне неоспоримо. Формальное применение статистических методов было бы здесь весьма затруднительным. Мы не собираемся подрывать веру в возможность предвидения, но просим тщательнее оценивать свидетельства о нём.

Неточные обозначения. Примером ошибки, происходящей от недостаточно явных обозначений, служит фидуциальный довод (Fisher 1956, с. 52 – 54). Фишер выводил окончательное (апостериорное) распределение параметра без предположений о его априорном распределении. Это было по меньшей мере упорной попыткой, потому что *из ничего – ничто*.

Довод начинался с рассмотрения параметрического распределения случайной переменной X. Фишер подобрал пример, частный случай которого таков. Пусть для каждого $x_0 > 0$

$$P(X > x_0|\theta) = \exp(-x_0\theta),$$

где $\theta > 0$. Мы интересуемся его значением и апостериорным распределением. Пусть $x_0 = u/\theta$, тогда

$$P(X\theta > u|\theta) = \exp(-u).$$

Используя обычные аксиомы теории вероятностей[19], можно теперь доказать (хоть Фишер этого не сделал), что

$$P(X\theta > u) = \exp(-u)$$

для всякого $u > 0$, если только начальное распределение θ существует. Знание этого распределения не обязательно. Поэтому

$$P(\theta > \theta_0) = \exp(-x\theta_0),$$

где $\theta_0 = u/x$. Фишер заключает, что

$$P(\theta > \theta_0|x) = \exp(-x\theta_0),$$

где $\theta_0 > 0$.

Тем не менее, это последнее уравнение следует из аксиом теории вероятностей только, если априорное распределение θ пропорционально

1/θ. Заблуждение было вызвано тем, что Фишер так и не указал, что *дано* в его вероятностном обозначении. Но его авторитет был так высок, что до сих пор многие статистики применяют фидуциальный довод, а потому указанный выше анализ считается спорным.

[18] *Предположение о возможности обращения операций*. Примером этого заблуждения является предположение того, что ожидание квадрата равно квадрату ожидания, см. Moroney (1951, с. 250). Он заявляет, что, как очевидно, ожидаемое значение хи-квадрата для полиномиального распределения равно нулю.

[19] Корреляция и причинность. *Положительная корреляция не означает причинности, а причинность не означает положительной корреляции.* Существует положительная корреляция между числом девственных тёток у человека и доли кальция в его костях, но число первых нельзя увеличить приёмом кальциевых таблеток. (Люди помоложе скорее имеют больше девственных тёток и больше кальция в костях.)

Здоровые жители новогебридских островов более завшивлены, чем жители, страдающие лихорадкой, но больным нельзя посоветовать обзавестись вшами, потому что те избегают горячих тел (Huff 1954, с. 99).

Отсутствие корреляции не означает статистической независимости. Исключением является двумерное нормальное распределение и некоторые специальные семейства распределений.

Пусть существует положительная корреляция между A и B и между B и C. Это не означает, что корреляция между A и C положительна даже в случае трёхмерного нормального распределения. Исключением является случай, при котором сумма квадратов коэффициентов корреляции в первых двух случаях превышает единицу.

При обратном порядке во времени причинность по меньшей мере неправдоподобна. В одном исследовании оспопрививания в различных районах Индии оно оказалось положительно коррелированным с некоторыми заразными заболеваниями. Противники оспопрививания использовали этот вывод для пропаганды, но не будь они возбуждены, вероятно заметили бы, что в некоторых районах более активное оспопрививание последовало вслед за возрастанием числа заболеваний (Chambers 1965).

После этого значит вследствие этого. В лекции 2 февр. 1965 г. в Оксфорде D. O. Moberg указал, что половая связь до женитьбы видимо положительно коррелируется с разводом и заключил, что склонность к разводу возрастает после подобных связей. Вывод *возможно* верен, но с таким же успехом можно заявить, что и то, и другое в основном вызвано одними тем же отношением к институту женитьбы. Возможно также, что ложные ответы [на вопросники] связаны со склонностью к разводам, либо с противоположной склонностью.

Экологическая корреляция. Допустим, что мы установили, что в американских *городах* существует связь между долями неграмотных и лицами, родившихся за пределами страны. Из этого не следует, что та же связь существует для *отдельных лиц* (Goodman 1959). Возможно также, что каждый, родившийся за рубежом, был хорошо образован. Города могут привлекать приезжих, а также и неграмотных или приводить к неграмотности.

[20] Неверные критерии приближённой оптимизации. Мы признаём, что в большинстве случаев принятия решений вопрос касается не столько оптимизации, сколько её примерного значения. Но всё же существует ещё насущная проблема в выборе того, как следует приближённо оптимизировать. Неверный критерий или выбор без критерия приводят к многочисленным заблуждениям (Koopman 1956; Good 1962). Критерий часто выбирается, исходя из слишком узкой точки зрения, безотносительно к согласованности с критериями более высокого уровня.

К примеру, когда вопрос о совместном обучении в одном из колледжей Оксфорда обсуждался там же в другом колледже, относительные требования к обучению мужчин и женщин не рассматривались, но было упомянуто влияние совместного обучения на атмосферу в комнате отдыха преподавателей.

Другим заблуждением является игнорирование побочных последствий какого-либо действия. Иногда, когда необходимо быстрое решение, издержки от задержки рассмотрения подробной теории неоправданно не принимаются во внимание. В других случаях утверждают, что стоимость теории слишком высока и забывают при этом, что при аналогичных обстоятельствах её результаты могут оказаться ценными впоследствии и что существенно обучать теоретиков.

Иногда критерий прибыльности либо недооценивается, либо переоценивается (McKean 1958; Hitch & McKean 1954).

[21] Статистика статистических заблуждений. Имеются неопубликованные работы Скотта (Christopher Scott) о статистике статистических заблуждений и ошибок при выборочных исследованиях по почте. Этот автор прочёл 117 английских статей и отчётов, опубликованных до конца 1960 г. Он исключил 22 отчёта либо потому, что они повторяли другие отчёты, либо ввиду явно недостаточного описания примененных методов.

В 54 из 95 оставшихся документах Скотт обнаружил не менее одной очевидной ошибки и явные недостатки в 13 других. В 14 ошибочных случаях исследуемая переменная не была успешно выделена, и изменение результата было приписано изменению метода, тогда как первое могло бы быть разумно разъяснено изменением какой-либо сопутствующей переменной.

В 9 случаях не были указаны безусловно необходимые данные, как, например, объём выборки или доля ответов на вопросы, а в 7 случаях не был проверены необходимые критерии значимости. Мы не можем приводить дальнейшие подробности, но надеемся, что они будут опубликованы. О неверном применении критерия хи-квадрат см. Lewis & Burke (1949).

[22] Заблуждения с хорошим последствием. Неверно полагать, что все заблуждения скверны. Явно противоречивые эпиграммы могут оказаться утонченным средством высказывания истины или совета для всех, кроме придирчивых. Вот примеры:

Только полуправду можно выразить в двух словах

Всё дело в умеренности

Это оказалось бы *non sequitur* [оказалось бы, что из этого ничего не следует] не будь это повторением

Расы аморальных людей вымерли ввиду естественного отбора

Нет ничего плохого в шахматистах, что нельзя было бы исправить, не будь они людьми

Нам пришлось отказаться от описания многих заблуждений. Более подробно о них и о логических заблуждениях см. Good (1959b), Thouless (1932), Wallis & Roberts (1956, гл. 3) и Wagemann (1935).

Краткие сведения об упомянутых лицах

Blackett P. M. S. (1897 – 1974), физик

Stein Gertrude (1874 – 1946), писательница

Примечания

1. Автор несколько раз ссылается на формальную систему; на формальные правила?

2. Противоречие с предыдущим мнением.

3. Непонятно, притом появилась электронная система.

4. Непонятно.

5. Классическое определение вероятности действительно является тавтологическим. Точнее, это просто формула для вычисления, определение же невозможно. Чуть ниже фраза грамматически непонятна.

6. Фраза снова грамматически непонятна.

7. Но кого может устроить подобная вероятность?

8. Непонятно.

9. Мы исключили несколько строк, в которых автор рассуждал о квазарах, этих крайне интересных астрономических объектах, потому что его описание совершенно устарело. Он также сообщил о замечании Эддингтона: если ловишь рыбу сетью (разрешено ли это?), то кажется, что вся она по размеру превышает размер ячеек сети.

10. Это означает, что о зверствах нацистов умолчали сознательно.

11. Объяснение непонятно, к тому же неясно, почему речь зашла о депрессии.

12. Непонятно.

13. Автор только в одном случае упомянул мужчин, вообще же быть может рассуждал о людях (men). Но представляется, что о женщинах он не счёл нужным упоминать. Неизменность доли *умных* автор доказал, полагаясь на необоснованные числа, и его рассуждение не имеет смысла.

14. Здесь снова забыты женщины.

15. Вместо цепей Маркова можно было упомянуть нарушение условий появления биномиального распределения.

16. Непонятно.

17. Этой фразы в русском переводе нет; автор, видимо, привёл её по позднейшему английскому изданию.

18. Эта *система*, как известно из литературы, психологически действует на некоторых шахматистов, и действовала на лётчиков, благополучно совершивших во время второй мировой войны несколько боевых вылетов. В картах же существовала и противоположная и столь же бессмысленная система, о чём сообщали Монмор и Лаплас (Шейнин 2013, § 3.1.1).

19. Автор и ниже вновь упомянул какие-то аксиомы, никак не относящиеся к аксиоматической теории вероятностей.

Библиография

Кузьмин А. Д. (1999), Фидуциальное распределение; Фидуциальный интервал. В книге Прохоров (1999, с. 769 – 770).

Прохоров Ю. В., ред. (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М.

Феллер В. (1950 англ.), *Введение в теорию вероятностей и т. д.*, т. 1. М., 1964.

Шейнин О. Б. (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. Также Google, Oscar Sheynin, Download Area.

Ackermann A. S. E. (1907), *Popular Fallacies*. London. 1950.

Behrens D. J. (1963), High IQ, low fertility? etc. *Mensa Correspondence* (London), No. 50, p. 6.

Cartter A. M. (1965), New look at the supply of college teachers. *Educational Record*, vol. 46, pp. 267 – 277.

Chambers S. P. (1965), Statistics and intellectual integrity. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. A128, pp. 1 – 15.

David H. A., Edwards A. W. F. (2001), *Annotated Readings in the History of Statistics*. New York.

Fisher R. A. (1930), Inverse probability. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 26, pp. 528 – 535. Перепечатка с комментарием в David & Edwards (2001, pp. 189 – 201).

--- (1935), *Design of Experiments*. См. Fisher (1990).

--- (1956 англ.), *Статистические методы для исследователей*. М., 1958.

--- (1990), *Statistical Methods, Experimental Design and Scientific Inference.* Oxford. Три книги, каждая со своей пагинацией.

Good I. J. (1950), *Probability and Weighing of Evidence*. London.

--- (1956), Which comes first, probability or statistics? *J. Inst. Actuaries*, vol. 82, pp. 249– 255.

--- (1958a), Significance tests in parallel and in series. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 53, pp. 799 –

813.
--- (1958b), How much science can you have at your fingertips? *IBM J. Res. Devt*, vol. 2, pp. 282 – 288.
--- (1959a), Kinds of probability. *Science*, vol. 129, pp. 443 – 447.
--- (1959b), Classification of fallacious arguments and interpretations. *Technometrics*, vol. 4, 1962, pp. 125 – 132.
--- (1960 – 1961), Paradox of confirmation. *Brit. J. Phil. Sci.*, vol. 11, pp. 145 – 149; vol. 12, pp. 63 – 64.
--- (1962), How rational should a manager be? В книге M. K. Starr, ред., *Executive Readings in Management Science*. New York, 1965, pp. 88 – 98.
--- (1963), Quadratics in Markov-chain frequencies etc. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. B25, pp. 383 – 391.
--- (1965), *Estimation of Probabilities etc*. Cambridge, Mass.
Goodman L. A. (1959), Some alternatives to ecological correlation. *Amer. J. Sociology*, vol. 64, pp. 610 – 625.
Gordon R. A. (1968), Employment and unemployment. IESS, vol. 5, pp. 49 – 60.
Hitch C., McKean R. N. (1954), Sub-optimization in operations problems. В книге J. F. McCloskey и др., ред., *Operations Research for Management*, vol. 1. Baltimore, pp. 168 – 186.
Huff D. (1954), *How To Lie with Statistics*. New York.
Kimball A. W. (1957), Errors of the third kind in statistical consulting. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 52, pp. 133 – 142.
Koopman B. O. (1956), Fallacies in operations research. *J. Operations Res. Soc. America*, vol. 4, pp. 422 – 426.
Lewis D., Burke C. J. (1949), Use and misuse of the chi-square test. *Psychological Bull.*, vol. 46, pp. 433 – 489. Обсуждение статьи см. в томах 47 и 48.
McKean R. N. (1958), The criterion problem. В книге автора *Efficiency in Government through Systems Analysis*. New York, pp. 25 – 49.
Medawar P. B. (1960), *The Future of Man*. New York.
Moroney M. J. (1951), Facts from Figures. Harmondsworth, England, 1958.
Penfield W., Roberts L. (1959), *Speech and Brain-Mechanisms*. Princeton.
Rowe P. (1962), What the Dons earn. Газета *Sunday Times* (London), Oct. 21.
Slater E., Beard A. W. (1963), The schizophrenia-like psychoses of epilepsy etc. *Brit. J. Psychiatry*, vol. 109, pp. 95 – 112.
Starnes R. (1962), Age of falsehood. Газета *Trenton Evening Times*, Dec. 19.
Sterling T. D. (1959), Publication decisions etc. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 54, pp. 30 – 34.
Thouless R. H. (1932), *Straight and Crooked Thinking*. Второе издание: *How to Think Straight*. New York, 1947.
Wagemann E. F. (1935), *Narrenspiegel der Statistik*. Salzburg, 1950.
Wallis W. A., Roberts H. V. (1956), *Statistics: A New Approach*. Glencoe, Ill.
Zabell S. L. (1992), R. A. Fisher and the fiducial argument. *Stat. Sci.*, vol, 7, pp. 369 – 387.

Добавление. К [4]. Сравните заглавие статьи в газете г. Чикаго *Fatality* (1966): *Число несчастных случаев со смертельным исходом с мотоциклами за три года возросло на 60%* с комментарием: *Между 1961 и 1964 гг. число смертельных случаев на 100,000 мотоциклов понизилось с 118 до 115. Число зарегистрированных мотоциклов возросло …*

В другом газетном сообщении в Чикаго Harris (1969) ошибочно заявил: *Вы намного безопаснее ночью в пустынном парке, чем в своём* *собственном доме.* […] *Больше убийств происходит за месяц от похоти, ревности, ярости, оскорблённых чувств, возмущения и раздражения, чем просто от корысти за год*.

Решил ли кто-нибудь из его читателей, или он сам переночевать в летнее время на скамейке в парке?

К [6]. В 1969 г. появилось объявление о лекарстве *прелюдин*. Утверждалось, что из 93 толстых пациентов, получавших это лекарство или плацебо [бездействующие таблетки] по 4 месяца каждое, *61%* (57 человек) *потеряли больше веса от прелюдина, чем при приёме плацебо, в среднем по 1,9 фунта в неделю, т. е. почти вчетверо больше.* Да, но что известно по поводу остальных 36 пациентов? […]

К [8]. Rensberger (1975) упоминает исследование, которое выполнили Evan Zaidel и Roger Sperry и которое имеет отношение к обсуждению речи и человеческого мозга. Представление, что правое полушарие мозга взрослого человека,

которое, как прежде считалось, лишь немного способно к языку, обладает словарём 14-тилетнего и синтаксической способностью 5-тилетнего.

Поэтому Джексон пришёл быть может к более правильному выводу, чем я полагал, но обосновал его слабо.

Смесь двух различных совокупностей при оценке их процентного соотношения: парадокс Cohen & Nagel (1934). Допустим, что [некоторое] лечение какой-либо болезни вредно и для мужчин, и для женщин, поскольку приводит к повышению вероятности смерти. Далее, пусть для сравнения отобраны две выборки пациентов, S_1 и S_2, так что этому лечению подвергается только вторая. Может случиться, что смертность в S_2 ниже, хотя объёмы выборок были так велики, что влиянием случайных вариаций допустимо пренебречь[1].

Этот *парадокс* имеет место, если вероятность смерти у женщин ниже, чем у мужчин, а выборка S_2 включает больший процент женщин, чем S_1 (Cohen & Nagel 1934, с. 449). Парадокс не произошёл бы при отборе S_1 и S_2 при помощи одного и того же случайного метода. Описание этого парадокса см. Gardner (1976) и Blyth (1972a; 1972b), а Bickel и др. (1975) обсудили его в связи с обвинениями университетов в дискриминации по полу.

К [9]. Uhr (1959) собрал свидетельства о том, что женщины являются худшими водителями, чем мужчины, но не учёл, что они быть может имели меньше практики.

К [10]. Важным источником по многомерным таблицам сопряжённых признаков является книга Bishop и др. (1975).

К пренебрежению неинтересным [12] и истолкование критериев

значимости. По мнению Tullock (1959),

тот, кто затратил много времени на проверку гипотезы […] *и был вынужден заключить, что она неверна, обычно просто записывает этот результат. Но если он увидит статью об аналогичном опыте со значимым результатом, то по крайней мере сообщит* [о своём опыте] *редактору соответствующего журнала. Но такие случаи редки, и я полагаю, что повторение аналогичных опытов тоже редко*.

Очень часто хвост распределения с вероятностью 0,05 соответствует в бейесовском анализе умножению соответствующих шансов не-начальной гипотезы в 4 – 5 раз. Пусть x – доля опытов, при которой начальная гипотеза (примерно) верна. Если $x > 0{,}8$, опубликованная вероятность хвоста распределения в точности равная 0,05 часто приведёт к тому, что иная гипотеза станет лишь примерно столь же вероятной как начальная.

В каждом случае окажется больше информации для обоснования бейесовского анализа и в том числе для формулирования иной гипотезы, но было бы интересно узнать больше о числовом значении x. Поскольку опыты, которые не отклоняют начальной гипотезы, обычно не публикуются, оценку x по опубликованным данным не так просто основать.

Berkson (1942) полагает, что низкое значение P ещё не свидетельствует против начальной гипотезы, если не предложено иное толкование, при котором это значение P окажется более вероятным. Он также считает, что среднее значение P, равное, например, 0,6, может [уже] подкрепить начальную гипотезу. Его мнение согласуется с обычными выводами бейесовского анализа.

К [18]. Mackie (1967) указывает, что многие заблуждения могут быть отнесены к этой категории, как, например, следующее ошибочное доказательство детерминизма:

Ты должен либо уйти, либо остаться, поэтому ты по необходимости либо уйдёшь, либо останешься[2].

К [21]. Lana и др. (1962) заметили, что в *Journal of Experimental Psychology* доля статей, в которых применяется критерий хи-квадрат, не изменился со времени появления статьи Lewis & Burke (1949), но что произошло заметное возрастание доли его верного применения с 21 до 64%.

Заблуждение ошибочного противопоставления. Ingle (1972) утверждает, что

ошибочно считать, что если данная теория выражает важную истину, любая иная теория неверна. […]. *В ранние 1930-е годы была принята гипотеза о* [действии определённого гормона и конкурирующая гипотеза об ином его действии].

Существенная истина заключалась в обеих гипотезах.

В сложных системах существует опасность слишком поспешного применения *лоботомии Оккама*[3]. К примеру, многие склонны предполагать, что мозг работает либо последовательно, либо по параллели, но имеются основания полагать, что происходит и то, и другое (Good 1971; Noton & Stark 1971).

Неверное индуктивное рассуждение. Научная индукция всё ещё является спорной философской ареной и иногда приводит к утонченно ошибочным рассуждениям.

Исчезновение априорных вероятностей. Popper (1959, с. 363) заявляет, что

в бесконечной вселенной […] *вероятность любого (не тавтологического) всеобъемлющего закона будет равна нулю*.

Мы (Good 1975, с. 49) опровергли этот довод[4].

Парадокс подтверждения. Пусть H будет гипотезой типа *все величины x относятся к классу C*, например, все вороны чёрные. Обычно принимается, что наблюдение примера H (чёрной вороны) по необходимости подкрепляет эту гипотезу. Мы (Good 1967; 1968) показали ошибочность этого предположения[5]. См. также Schlesinger (1975).

Неверное понимание условной вероятности. Говорят, что некто берёт с собой бомбу, когда садится в самолёт, потому что весьма неправдоподобно, чтобы на одном и том же самолёте независимо оказались две бомбы.

Изучение будущего и прошлого. При изучении, склонны ли обстоятельства Q вызывать другие обстоятельства U, часто бывает *легче* отобрать выборку случаев U и посмотреть, что происходило прежде, чем заглядывать вперёд[6]. Второй путь, однако, часто обеспечивает гораздо больше сведений на единицу выборки.

В английском языке U почти всегда следует за Q[7], но из этого не следует, что Q почти всегда предшествует U. Тенденция Q *приводить* к U существенна только, если вероятность того, что U следует за Q близка к 1, а вероятность того, что U следует не за Q, намного менее близка к 1. Часто требуется определить эти две условные вероятности, $P(\mathrm{U}|\mathrm{Q})$ и $P(\mathrm{U}|\text{не Q})$, без установления количественной меры причинности.

Эти вероятности нельзя вывести только из значений $P(\mathrm{Q}|\mathrm{U})$ и $P(\mathrm{Q}|\text{не U})$. Так, Bortkiewicz (1911) критикует сочинение о дроблении поместий следующим образом:

Можно отобрать выборку идиотов и узнать, что почти все их деды и бабки были в основном нормальны. Было бы, очевидно, нелепо заключить, что большинство внуков нормальных людей идиоты.

Но изучение прошлого не обязательно следует применять подобным идиотским способом. Оно может быть настолько легче, чем изучение будущего, что его значимость на единицу затраченного труда окажется выше и, разумеется, особенно в случае, при котором последнее практически почти неосуществимо. Формально

$$P(\mathrm{U}|\mathrm{Q})/P(\mathrm{U}) = P(\mathrm{Q}|\mathrm{U})/P(\mathrm{Q})$$

и если нам удастся установить, что $P(\mathrm{Q}|\mathrm{U}) > P(\mathrm{Q})$, то можно будет заключить, что $P(\mathrm{U}|\mathrm{Q}) > P(\mathrm{U})$, т. е. что Q есть вероятностная причина U, хоть и не обязательно существенная. Подобная причина может и не быть существенной, но важной.

Joshua Lederberg указал мне поразительный пример в сочинениях Herbst и др. (1971; 1975), которые выяснили, что многие матери дочерей, у которых обнаружили рак влагалища, лечились во время беременности диэтилстильбэстролом (событие Q). Следует понимать, что *многие* означает, что $P(\mathrm{Q}|\mathrm{U})/P(\mathrm{Q})$ существенно превышает 1, так что $P(\mathrm{U}|\mathrm{Q})/P(\mathrm{U})$ также намного больше 1.

Это, правда, не приводит к тому, что $P(\mathrm{U}|\mathrm{Q})$ близко к 1, но показывает (если наблюдённые факты несомненны, а наблюдения не были подправлены), что этот препарат, принятый во время беременности, может оказаться очень вредным.

Если Q и U – одна и та же отличительная черта родственников, как, например, форма головы у деда и внука, то происходит другое особое обстоятельство. Для некоторых подобных черт $P(\mathrm{Q}) \approx P(\mathrm{U})$, так что $P(\mathrm{Q}|\mathrm{U}) \approx P(\mathrm{U}|\mathrm{Q})$. Если эта вероятность близка 1, то изучение прошлого и будущего информационно почти равноправно. Конечно, $P(\mathrm{Q})$ и $P(\mathrm{U})$ не обязательно совпадают для всех черт, потому что некоторые из них сильно положительно или отрицательно связаны с плодовитостью и в совокупности их относительная частота меняется от поколения к поколению.

Замечания о ссылках. De Morgan (1847) привёл примеры ошибочных рассуждений в обычном языке и особенно осудил неточные цитаты. Он полагает, что следует указывать, например, так: *Цицерон (которого цитировал Бэкон), говорит, что* … Я думаю, что неточные цитаты приемлемы, если это обстоятельство ясно видно, быть может при введении нового типа кавычек.

De Morgan (1872) собрал беспорядочную и забавную коллекцию статей, в том числе рецензий книг, из еженедельника *Athenaum* по литературным, социологическим, естественнонаучным и математическим вопросам со многими примерами ошибочных рассуждений. Он несколько обескуражен доказательствами квадратуры круга и Королевским обществом, в которое его так и не приняли[8].

Fischer (1970) собрал заблуждения, среди которых есть несколько статистических, в исторических сочинениях. Его книга очень интересна и хорошо написана, но, к сожалению, в ней немало едкого и догматического. Сомневаешься в том, что какое-либо историческое исследование смогло бы избежать её строгой критики.

Ingle (1972) перечислил около сотни видов заблуждений, включая несколько статистических, в биологии и медицине и привёл весёлые цитаты из Льюиса Кэрролла[9]. Он сообщает лишь несколько точных примеров, но нет причин сомневаться в том, что большинство его типов заблуждений действительно имеет место.

Mackie (1967) весьма сжато описал заблуждения в рассуждениях с упором на формальную логику и философию и указал полезную литературу. Moran (1967) привёл полезный список 15 статистических заблуждений. Некоторые из них не так хорошо известны, как многие, упомянутые нами.

Примечания

1. Автор видимо описывал опыт лечения.

2. Где же здесь обращение операций?

3. Лоботомия это нейрохирургическая операция. У. Оккам (примерно 1285 – 1349), а его *бритвой*, которую, наверное, вспомнил автор, называется его высказывание *Сущности не следует умножать без причины*. Мы не берёмся пояснять соотношение этой *бритвы* с лоботомией, но заметим *Правило философствования* № 1 Ньютона (1687/1936, с. 502):

Не должно принимать в природе иных причин, сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

4. Мы не берёмся комментировать утверждение Поппера, хотя закон всемирного тяготения, как представляется, противоречит ему. Но зачем автору оно понадобилось? Следовало бы взамен обсудить исходные положения Бейеса.

5. Следовало бы разъяснить суть указанного опровержения.

6. Как именно заглядывать вперёд, да ещё при помощи выборки (см. ниже)?

7. Исключения из указанного правила английского языка нам известны только для нескольких слов, заимствованных из других языков.

8. Вот, однако, малоизвестное утверждение Де Моргана (De Morgan Sophia Eliz. 1882, с. 147) из его письма 1842 г.: синус и косинус бесконечности равны нулю, а тангенс и котангенс выражаются мнимыми числами. В позднейшей статье он (1864, с. 42) заявил, что вероятность может быть и отрицательной, и превышать единицу. И если вероятность события равна 2,5, то оно должно произойти дважды с равным шансом наступить или не наступить в третий раз.

9. Настоящее имя Ч. Л. Доджсон (1832 – 1898), математик (работы по математической логике) и писатель, автор *Алисы в стране чудес* и *Зазеркалья*.

Библиография

Berkson J. (1942), Tests of significance considered as evidence. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 37, pp. 325 – 335.

Bickel P. J. и др. (1975), Sex bias in graduate admissions. *Science*, vol. 187, pp. 398 – 404.
Bishop Yvonne M. M. и др. (1975), *Discrete Multivariate Analysis*. Cambridge, Mass.
Blyth C. R. (1972a), On Simpson's paradox etc. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 67, pp. 364 – 366.
--- (1972b), Some probability paradoxes etc. Там же, pp. 366 – 381.
Bortkiewicz L. von (1911), Прения по докладу, *Schriften des Vereins für Sozialpolitik*, Bd. 138, pp. 175 – 176.
Cohen M. R., Nagel E. (1934), *Introduction to Logic and Scientific Method*. New York.
De Morgan A. (1847), *Formal Logic*. London, 1926.
--- (1864), On the theory of errors of observation. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 10, pp. 409 – 427.
--- (1872), *Budget of Paradoxes*, vols 1 – 2. Chicago – London, 1915.
De Morgan Sophia Eliz. (1882), *Memoir of Augustus De Morgan*. London.
Fatality (1966), Motorcycle fatalities up 60% in three years. Газета *Chicago Tribune*, Aug. 1, sec. 3, p. 7, col. 4.
Fischer D. H. (1970), *Historians' Fallacies etc*. New York.
Gardner M. (1976), Mathematical games etc. *Scient. American*, vol. 234, March, pp. 119 – 124.
Good I. J. (1967), The white shoe is a red herring. *Brit. J. Phil. Sci.*, vol. 17, p. 322.
--- (1968), The white shoe qua herring is pink. Там же, vol. 19, pp. 156 – 157.
--- (1971), Письмо в редакцию. *Scient. American*, vol. 225, Oct., p. 8.
--- (1975), Explicativity, corroboration and the relative odds of hypotheses. *Synthese*, vol. 30, pp. 39 – 73.
Harris S. J. (1969), You're safer in a lonely park. Газета *Chicago Daily News*, March 31.
Herbst A. L. и др. (1971), Adenocarcinoma of the vagina etc. *New England J. Med.*, vol. 284, No. 16, pp. 878 – 881.
--- (1975), Prenatal exposure to stilbestrol etc. Там же, vol. 292, No. 7, pp. 334 – 339.
Ingle D. J. (1972), Fallacies and errors in the wonderlands etc. *Perspectives in Biology and Medicine*, vol. 15, pp. 254 – 281.
Lewis D., Burke C. J. (1949), См. Библиографию к основному тексту.
Lana R. E., Lubin A. (1962), Chi square revisited. *Amer. Psychologist*, vol. 17, p. 793.
Mackie J. L. (1967), Fallacies. *Enc. of Philosophy*, New York, vol. 3, pp. 169 – 179.
Moran P. A. P. (1979), Problems and mistakes in statistical analyses. *Communications in Statistics*, vol. 2, pp. 245 – 257.
Newton I., Ньютон И. (1687 латин.), *Математические начала натуральной философии*. Опубликовано в качестве т. 7 *Собр. соч.* переводчика, А. Н. Крылова. М. – Л., 1936.
Noton D., Stark L. (1971), Письмо в редакцию. *Scient. American*, vol. 225, Oct., p. 8.
Popper K. R. (1935 нем.), *Logic of Scientific Discovery.* New York, 1959.
Rensberger B. (1975), Language ability found in the right side of the brain. Газета *New York Times*, July 1, sec. 1, p. 14, cols 1 – 2.
Schlesinger G. (1975), *Confirmation and Confirmability*. New York.
Tullock G. (1959), Publication decisions and tests of significance. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 54, p. 593.
Uhr L. (1959), Sex as a determinant of driving skills etc. *J. Appl. Psychology*, vol. 43, p. 35.

IX

Роберт Штротц

Эконометрия

Robert H. Strotz, Econometics. IES, pp. 188 – 197

[1. Предисловие]

Эконометрию можно кратко определить как исследование экономической теории в её отношении к статистике и математике. Её основная предпосылка состоит в том, что эту теорию можно сформулировать математически, обычно как систему отношений, возможно включающих случайные переменные. Экономические наблюдения, как правило, считаются выборкой из теоретически описанной генеральной совокупности. Используя эти наблюдения и методы статистических выводов, эконометрист старается оценить те соотношения, которые составляют теорию. Затем можно исследовать статистические свойства этих оценок и возможность их использования для предсказания будущих наблюдений, а оценки и суть ошибок предсказания ввести в теперь уже преобразуемую теорию.

Таким образом, существует взаимодействие между формулированием теории и эмпирической оценкой и исследованием. Основной характеристикой здесь является явное применение математики и статистических выводов. Ни нематематическое теоретизирование, ни чисто описательная статистика не относятся к эконометрии.

Объединение экономической теории, математики и статистики было скорее стремлением эконометриста, чем ежедневным достижением. Многое, обычно известное как эконометрия, является математической экономической теорией без эмпирических исследований, а некоторые иные положения, также относимые к эконометрии, являются статистическим оцениванием соотношений, приспособленных к рассматриваемому случаю и лишь в небольшой степени обоснованных.

Впрочем, это не должно обескураживать. Подобный подход составляет часть процесса развития науки, а именно построения непроверенных теорий и поиска эмпирических закономерностей без одновременного систематического создания теоретической основы. Поэтому, хоть термин *эконометрия* явно подразумевает измерения, многие абстрактные математические построения теорий, будь их последующее эмпирическое обоснование возможно или нет, часто считается её частью.

Этот термин часто понимают расширительно, обозначая математическую или статистическую экономику, а в общежитии эконометристом называют экономиста, владеющего математикой и заинтересованного в её приложении даже вне зависимости от математической статистики. Ниже я принимаю это обобщенное определение и рассматриваю эконометрию и в её узком смысле, и математическую экономическую теорию.

[2] Краткая история

Приложение математики и статистики в экономике имеет свою историю. Во второй половине XVII в. Сэр Уильям Петти опубликовал очерки по *политической арифметике*. Этот неоперившийся, но примечательный для своего времени труд, был эконометрическим по своей методологии, притом даже с современной точки зрения. Хоть Адам Смит и не сослался на него, в 1711 г. итальянский инженер Giovanni Ceva призвал применять математический метод в экономической теории. В дальнейшем появилось большое число статистических исследований, но революционное воздействие математического метода проявилось лишь во второй половине XIX в.

В наибольшей степени зачинателем экономики общего равновесия, т. е. основы современной математической экономики, был Леон Вальрас, профессор Лозаннского университета (Jaffé 1968). В его трудах, далёких от каких-либо непосредственных статистических применений, была разработана полная система отношений между экономическими переменными, включающими деньги, для объяснения взаимосвязи стоимости и количества производимых и обмениваемых предметов потребления и товаров промышленного назначения.

По Вальрасу, экономика действует как бы в соответствии с законами классической механики: её состояние определяется соотношением сил, действующих между всеми участниками рынка. Впрочем, его система общего равновесия была в основном статической, потому что значения экономических переменных в ней не определяли свою собственную скорость изменения. Термин *равновесие* поэтому не совсем верен: общая система Вальраса не была явно динамической, и её решение нельзя определять как состояние равновесия. Тем не менее, как со многим в экономическом теоретизировании, происходили широкие обсуждения свойств выравнивания в экономике, так что в обобщённом смысле решение этой системы можно считать результатом колебаний динамических сил выравнивания.

Существенное сочетание математической теории и статистического оценивания впервые появилось у Генри Мура, профессора Колумбийского университета, в первой половине XX в. (Stigler 1968). Он проделал действительно эконометрическую работу по циклам деловой активности, определению расценок заработной платы и спроса на некоторые товары. Его основной труд, итог примерно трёх десятилетий, *Synthetic Economies,* появился в 1929 г. Трудно поверить, но эта книга, столь плодотворная для дальнейшего развития существенной части социологии, разошёлся лишь в 873 экземплярах (Stigler 1962).

В 1920-е годы эконометрия стала самостоятельна в качестве подхода к изучению экономики. Число приверженных этой младенческой области постоянно росло, и 29 декабря 1930 г. они учредили международную ассоциацию, Эконометрическое общество. В большой мере это произошло благодаря энергии и настойчивости Рагнара Фриша из университета Осло при содействии и поддержке заслуженного американского экономиста Ирвинга Фишера, профессора Йельского университета (Allais 1968a).

Признание появившегося небольшого меньшинства экономистов особой религиозной группой означало бы приписывание им слишком ограниченных и миссионерских взглядов, хоть они и чувствовали своё призвание в том, чтобы (Frisch 1933)

содействовать исследованиям, посвящённым объединению количественного теоретического и количественного эмпирического подходов к экономическим проблемам, притом пронизанным конструктивной и строгой мыслью, подобной той, которая стала преобладающей в естествознании.

Их проницательность и стремление были хорошо обоснованы. В последующие годы, пройдя через многочисленные методологические споры о роли математики в экономике (ныне довольно избитой темой), они стали многочисленнее, а их влияние в более широком кругу экономической профессии постоянно росло. Сегодня все основные университетские факультеты экономики в Западном мире, включая с последнего времени страны советского блока, предлагают исследования по эконометрии и во многих случаях делают упор на это направление[1].

Конкретные курсы по эконометрии были введены даже на студенческом уровне, появились учебники, а аспиранты-экономисты теперь лучше подготовлены по математике и статистическим методам, и видимо, всё больше тяготеют к специализации по эконометрии и вскоре овладевают эконометрической техникой в большей степени, чем их преподаватели. Членство в Эконометрическом обществе выросло со 163 в 1931 г. более, чем до 2500 в 1966 г. Журнал общества, *Econometrica*, по существу удвоил свой объём, и почти все другие научные журналы по экономике публикуют регулярную долю статей, математическая и статистическая утонченность которых в 1920-е и 1930-е годы поразила бы основателей эконометрического движения.

Области приложения эконометрии к экономике постоянно расширяются, и вряд ли сейчас имеется отрасль прикладной экономики, включая её историю, в которую не проникла бы математическая и статистическая теория. С возрастанием интереса к эконометрии и сосредоточением части экономической профессии на ней само понятие специализации [по эконометрии] размылось. Успех эконометрии в качестве мощного интеллектуального движения внутри экономики приводит к потере её самостоятельности, к её исчезновению в качестве особой отрасли экономики, к её пониманию почти как синонима последней.

Эти замечания не следует, однако, понимать ошибочно. Осталось много проблем и много предстоящих исследований, которые не относятся ни к математике, ни к статистике. Общий уровень подготовки по математике и статистике и интереса к этим наукам у современных экономистов намного выше, чем у их предшественников, но неизбежно остаётся вполне подходящая шкала этой подготовки и этого интереса. Повторяясь, скажем более того: многое, известное как эконометрия, всё ещё не согласовывает математико-теоретического и статистического, т. е. не достигает устремлений, указанных в определении этой научной дисциплины.

[3] Обзор эконометрии

Поскольку эконометрия более не является островком в море экономики, обзор её содержания должен охватить многое из самой экономики.

[3.1.] Общее равновесие. Следуя за вальрасовским понятием общего экономического равновесия, в последние годы математические экономисты занимались уже гораздо более тщательным анализом его проблем (Arrow 1968). При ранних исследованиях это равновесие описывалось системой равенств, включающих неопределенно большое число экономических переменных, равное, однако, числу независимых уравнений. Предполагалось, что при этом условии будет иметь место *равновесное* решение.

Этот вывод, однако, нестрог и в последнее время экономисты-теоретики были озабочены более строгой переработкой прежних учений. Равенство числа уравнений и неизвестных не является ни необходимым, ни достаточным условием ни для существования, ни для единственности решения. Нельзя, стало быть, уверенно заключать, что прежняя теория достаточна для объяснения состояния общего равновесия, к которому экономика должна стремиться по определению.

Подобное отрицательное заключение может иметь место либо потому, что теория не накладывает необходимых условий, обеспечивающих существование общего состояния равновесия, либо ввиду того, что теория, возможно, оказывается неопределённой, поскольку подразумевает несколько различных решений. Современный теоретик в области проблем равновесия поэтому постарался [старается] установить необходимые и достаточные условия существования общего экономического равновесия.

В соответствии со своим понятием, *равновесием* называется состояние, при котором никакие силы, действующие во времени внутри модели, не стремятся лишить её устойчивости. Но даже если удастся доказать, что подобное состояние существует для какой-либо модели общего равновесия, остаётся вопрос, будет ли оно устойчиво. Или иначе, будут ли силы либо стараться восстановить первоначальное равновесие после какого-либо отклонения системы от него, либо ещё дальше удалять систему от него.

Исследование этих вопросов, довольно более сложных, чем это представляется по нашему описанию, требует явного введения динамических соотношений выравнивания. Мы обсуждаем вопросы существования, единственности и устойчивости равновесия не для конкретной экономики; они относятся к свойствам теоретической модели, которая должна будет описывать её. В этом смысле исследование ориентировано на то, чтобы улучшить понимание скорее последствий различных уточнений самой теории, а не эмпирического понимания того, как работает наша экономика.

Более того, подобные исследования были в основном ограничены исследованием модели общего равновесия в экономике *с конкуренцией*, т. е. поистине специальным случаем. Но он особо интересен, потому что, приняв идеальные предпосылки, экономисты, изучающие в этом случае социальную помощь и проблемы благосостояния, приписали равновесию качества, которые удовлетворяют критериям, интересным для социальной оценки действия экономики (Mishan 1968). По Парето, состояние экономики оптимально, если не существует иных технологически возможных состояний, при которых некоторые люди окажутся в лучшем положении, но никто не окажется в положении, которое он считал бы худшим (Allais 1968b).

Условия, при которых общее экономическое равновесие будет в этом смысле оптимальным, были поэтому строго рассмотрены. Экономика благосостояния по Парето ныне неизбежно включается в исследования систем общего равновесия, но эмпирически она недостаточно развита.

Полезные экономические исследования, озабоченные предсказаниями, были в принципе также связаны с системой общего равновесия, хотя и с другой точки зрения. Главным в них является выяснение, как изменение экономического параметра (коэффициента, или, возможно, значения некоторой независимой переменной, которая не определяется системой) вызывает изменение в равновесных значениях одного или нескольких переменных, устанавливаемых системой. Или, короче: как решение, приводящее к равновесию, зависит от параметров? Это – проблема *сравнительной статики*, которая противопоставляет два состояния равновесия, отличающихся друг от друга значениями одного или нескольких параметров.

[3.2.] Сравнительная статика и частичное равновесие. В контексте только что сформулированной цели сравнительной статики мы вернее всего отличим, как это обычно и делается в литературе, экономики общего и *частичного равновесия*. Пусть вблизи равновесия общая система экономических отношений полностью изменяется в соответствии с изменением определённого параметра, так что учитываются все непосредственные и косвенные влияния этого изменения. Тогда можно надеяться установить направление соответствующего изменения некоторой экономической переменной. Пусть увеличится какая-то налоговая ставка или изменится потребительская предпочтительность определённого товара; будет ли спрос на какой-то иной товар возрастать? Уменьшаться? Оставаться прежним? Иногда на этот вопрос можно ответить по набору знаков (+, –, 0) многих или всех частных производных от функций (предполагается, что все они непрерывно дифференцируемы), образующих систему[2].

Теоретические рассуждения или здравый смысл могут предварительно уточнить их знаки и, например, удостоверить нас, что эластичность спроса отрицательна, или что его перекрестная эластичность положительна. В некоторых случаях, однако, теоретик чувствует себя здесь неловко, и некоторые знаки могут поэтому оставаться неопределёнными. Вопрос состоит в том, достаточны ли те ограничения, которые теоретик желает наложить с самого начала, чтобы определять знак полной производной интересующей его экономической переменной относительно данного параметра.

Формальное рассмотрение необходимых и достаточных ограничений, требуемых для того, чтобы определённо решить этот вопрос, является предметом исследований качественной экономики и представляет отдельную математическую проблему (Samuelson 1947; Lancaster 1965). При некоторых обстоятельствах окажется необходимым знать не только знаки различных частных производных, но и их относительные абсолютные величины. Нужны будут статистические оценки этих производных, что указывает на задачу, относящуюся к эконометрии в её теснейшем смысле.

Иногда полезно знать также, что некоторые производные достаточно близки к нулю, так что приравнивание их нулю не изменит заключение о знаке интересующей нас полной производной. Необходимые для этого сноровка или искусство составляет суть анализа частичного равновесия. Он так называется потому, что стремится изолировать часть общей системы от мало связанной с ней остальной части общей системы.

Анализ частичного равновесия таким образом является особым случаем анализа общего равновесия, при котором вводятся более смелые предварительные ограничения для вывода более определённых и значимых результатов сравнительной статики. Как экономика общего равновесия обычно связывается с именем Вальраса, так и экономика частичного равновесия связывается с работой Альфреда Маршалла (Corry 1968).

Рассматривая динамическую устойчивость системы, качественная экономика в известной степени помогает установить знаки частных производных системы. При предположениях о характере соотношений динамического выравнивания можно установить соотношения между условиями, необходимыми для устойчивого равновесия и знаками частных производных. Аналогично, как устойчивость зависит от предположения о воздействии различных переменных на заданные отношения в положительном или отрицательном направлении, так же и это направление может быть иногда установлено по предположению об устойчивости равновесия. Таков знаменитый принцип соотношений Самуэльсона (Baumol 1968).

[3.3.] Трёхмерные модели. […]

[3.4.] Объединение в агрегатные модели. Поскольку системы общего равновесия охватывают миллионы отдельных соотношений, они, естественно, не поддаются количественной оценке. Весьма интересно поэтому уменьшить размерность системы, чтобы появилась какая-то возможность эконометрической оценки. Это означает, что отношения обычного типа, как, например, описывающие поведение фирм данной отрасли промышленности или домашних хозяйств определённого характера, должны быть агрегированы и описывать поведение множества сравнимых экономических факторов [единиц]. Условия, необходимые для этого, и требуемые методы только начали исследоваться, однако литература по этому вопросу уже разрастается (Nataf 1968).

Прежняя проблема состояла просто в объединении множества схожих переменных в единую переменную. Такова знаменитая проблема индексов; к примеру, задача о наилучшем представлении цен весьма разнообразных товаров единым индексом. У этой задачи имеется, стало быть, и теоретическая, и статистическая сторона, а теория индексов оказалась полезной для ориентирования при истолковании различных статистических формул.

Основные усилия при эмпирическом изучении систем общего равновесия, обобщённых в какой-то ограниченной мере, относится к исследованиям схем *затрат – выпуска*. Этот подход предложил Василий Леонтьев в конце 1930-х годов. По существу он рассматривал экономику как систему *линейных* соотношений и полагал относительные количества необходимых затрат постоянными. Эти затраты, конечно, могут быть выпусками других процессов. Так, при заданных коэффициентах, соотносящих затраты и выпуск в структуре объединённых производств, можно определить, какой *прейскурант товаров* [какие количества товаров и по какой цене] может быть произведен при заданных и имеющихся в наличии количествах различных *первичных* не произведенных (?) затратах. Или же можно определить количества этих исходных затрат, необходимых для производства заданного прейскуранта товаров. […]

Агрегатные модели могут принадлежать к типу либо частичного, либо общего равновесия. Первый имеет дело с одним-единственным изолированным сектором экономики и предполагает, что внешние или экзогенные переменные, существенно влияющие на этот сектор, не подвержены обратному влиянию его поведения. Так, в рыночной модели спроса и предложения для отдельного товара можно считать совокупный доход потребителей и его распределение заданными вне зависимости от цены и наличия этого товара. И всё же функции рыночного спроса и предложения являются обобщением таких же функций для многих отдельных лиц и фирм.

Агрегатные модели типа общего равновесия могут объяснить взаимную определённость многих основных экономических переменных, которые в свою очередь являются обобщениями большого числа отдельных переменных. Примерами обобщённых переменных служат совокупная занятость, совокупный импорт, совокупные вложения. Подобные модели обычно называются *макроэкономическими* в отличие от *микроэкономических*, которые изучают отдельные домашние хозяйства, фирмы, профсоюзы в смысле частичного равновесия.

Многие макроэкономические модели имеют дело не только с *реальными* переменными, т. е. с физическими запасами, движением товаров и производственных услуг, но и с *монетарными* переменными, – уровнем цен, количеством денег, стоимостью совокупной продукции, процентами на капитал. Эти модели особенно распространились с 1936 г. под влиянием Кейнса (*Общая теория занятости, процента и денег*. М., 2012) и порождённой литературы.

Один из типов агрегатных макроэкономических моделей выделяет несколько существенных секторов экономики, либо соотносит макроэкономические переменные двух или нескольких экономик, взаимосвязанных торговлей. Многое в теории международной торговли имеет дело с подобными моделями (McKenzie 1968). Действительно, поскольку это было обычным для исследования международных экономических проблем, теория международной торговли исторически была одной из самых оживлённых областей развития экономической теории, и математической, и нет. Более узкие эконометрические исследования в этой области сосредоточились на оценках эластичности импортного спроса.

Кроме того, макроэкономические модели позволили изучать экономические изменения, и именно с их помощью были достигнуты самые существенные результаты экономической динамики. Динамическими в экономике называются те системы, значения экономических переменных в которых в данный момент определяют либо их собственную скорость движения (непрерывные модели с дифференциальными уравнениями), либо их значения на последующий момент (дискретные модели с дифференциальными уравнениями). Общее обсуждение динамических моделей см. в источнике Baumol (1968).

Итак, динамические модели включают и переменные, и меру их изменения во времени. Первые часто являются *запасами*, вторые – *потоками*. Включение и тех, и других в модель приводит к трудностям при согласовании их желательных количеств. Подобные проблемы становятся особо важными при включении монетарных переменных, например, при рассмотрении отдельных лиц, желающих и удерживать некоторую сумму монетарных активов, и увеличивать их с определённой скоростью. Clower (1968) обсуждал конкретные проблемы моделей запасов и потоков.

Динамические модели появляются и в теории длительного экономического роста (Morishima 1968), в которой применяются и макроэкономические модели общего равновесия без всякого объединения элементов, и в теории циклов деловой активности, в которой очень часто применяются макроэкономические модели. Не все модели, предназначенные для объяснения уровня деловой активности, должны быть циклическими. В современных исследованиях упор делается на макроэкономические модели, не обязательно циклические. Они объясняют этот уровень и его изменения динамической системой, которая реагирует на внешние переменные, в том числе обусловленные экономической политикой (государственным дефицитом, политикой центрального банка) и на другие переменные, существенно влияющие на экономику, объяснение которых находится вне пределов теории (рост населения, быстрота технологических перемен).

Внешние или экзогенные или автономные переменные воздействуют на динамическую экономическую систему и производят в ней не обязательно периодические колебания во времени. Эти (?) модели можно исследовать эмпирически, и их оценке было посвящено очень много работ; соответственно, их структура была усовершенствована.

Большим преимуществом агрегатных моделей является, разумеется, существенное уменьшение громадного числа переменных и уравнений в системах общего равновесия, что позволяет оценивать их. Тем не менее, они могут быть весьма сложными либо потому, что всё же содержат большое число и переменных, и уравнений, либо ввиду нелинейности их функций. Компьютеры позволяют оценивать системы подобного уровня сложности, однако математический анализ часто не может преодолеть трудности исследования их динамического поведения.

Снова выручает компьютер, симулируя сложные системы, включая в них экзогенные переменные и случайные возмущения, соответствующие определённым распределениям вероятностей. Таким образом можно обозревать поведение этих систем при различных предположениях о поведении экзогенных переменных, учитывая при этом большие выборки случайных переменных.

В макроэкономических моделях обычно возникающими переменными являются совокупные расходы потребителей, вложения в товарные запасы и в предприятия и оборудование. Первое отражает поведение домашних хозяйств при решении о затратах на потребительские товары, которые в некоторых исследованиях подразделяются на товары длительного и краткосрочного пользования и услуги.

При регрессионном анализе расходы потребителя выражаются в зависимости от других переменных, экономических (доход потребителя, его изменение, наивысший предыдущий доход, уровень потребительских цен и скорость его изменения, процент на капитал, условия потребительского кредита, ликвидные активы) и демографических (раса, величина семьи, проживание в городе или сельской местности). За последние 20 лет зависимость расходов потребителя от подобных переменных усиленно изучалась эмпирическими методами, см. Tobin (1968).

Также серьёзно изучалось поведение вложений в товарные запасы: как они изменялись во времени относительно общего уровня деловой активности и как они реагировали на такие переменные, как процент на капитал, объём продаж, невыполненные заказы, см. Stanback (1968). Установление функции вложений в товарные запасы связано с некоторыми тонкими моментами.

Иногда вложения накапливаются, потому что таково желание фирм, но иногда и вопреки желаниям противоположного характера, если, например, объём продаж резко падает по сравнению с возможностями изменения производительности. Теоретические исследования оптимизации поведения фирм в политике вложений могут поэтому несколько обосновывать выбор и истолкование роли различных переменных функции вложения в товарные запасы. Зависимость вложений в предприятия и оборудование от объёма продаж, его изменения, прибыли, ликвидности также может изучаться методами эконометрии, а понятия об относительной значимости этих различных переменных были в какой-то мере обоснованы различными теориями. Как и функция потребления и установления вложения в товарные запасы, функция вложений в предприятия и оборудование усиленно исследовалась на протяжении последних нескольких десятилетий эмпирическими методами, см. обзор Eisner (1968).

[3.5.] Принятие решений. Экономисту методически приемлемо постулировать пригодные для данного случая частные соотношения между макроэкономическими переменными (Peston 1959), но приятнее и сильнее объединяющим экономическую теорию был бы вывод поведения макропеременных, исходящий из простейших положений о поведении микропеременных, служащих элементами первых. Это и есть упомянутая выше проблема обобщения. […]

Микроэкономическая теория в основном дедуктивна и систематически исходит из аксиом предпочтения и выбора, переходя к теоремам об экономическом поведении. Тщательное прослеживание логических тонкостей этой дедуктивной теории существенно требует формальную математику. Индивидуальные рыночные решения обычно полагаются осторожными и рациональными, т. е. в основном соответствующими определённым основным критериям принятия решения, которые считаются в существенной мере интуитивно привлекательными. […]

При разработке теории поведения потребителя и теории фирм направленное и благоразумное поведение обычно связывалось с попытками максимизировать некоторую функцию с учётом рыночных и технологических ограничений. Для экономиста математика подобного максимизирования оказалась важнейшим средством в его арсенале. При создании моделей, максимизирующих поведение и лучше поддающихся количественному определению и решению, интерес сосредоточился на проблемах, в которых максимизировалась линейная функция, а ограничения представлялись множеством линейных неравенств. Методы решения таких проблем стали называться линейным программированием, а с дальнейшим продвижением теории были введены нелинейности и случайные элементы, а метод стал применяться и к проблемам последовательного принятия решений. Всё вместе теперь называется математическим программированием.

Ввиду своей практической пользы эти методы были применены к анализу различных проблем планирования и оптимизации, особенно в пределах фирмы. Появление этих методов, успехи теории вероятностей и некоторый военный опыт системного анализа несколько оживил современный количественный подход к проблемам продукции и управления бизнесом, который стал известен как исследование операций. Это нововведение явилось результатом разделения, поскольку исследование операций теперь считается отличным от эконометрии, хотя у них и имеется много общего и многие профессора и практические работники занимаются и тем, и другим. […]

Теорию игр можно представить как проблему общего равновесия и теперь уже тесно связанной с современными исследованиями экономики общего равновесия. […] В целом, прежнее воодушевление применением теории игр к проблемам поведения в промышленности пока ещё подтвердилось лишь в ограниченной степени.

[3.6.] Процессы распределения. Экономика издавна интересовалась распределением величин экономических переменных. Что определяет распределение семейных доходов, активов или объёмов продаж фирм данной отрасли промышленности? В прошлые годы эта проблема решалась описанием и подгонкой распределения частот к данным различных стран, лет или этих отраслей. Хорошее согласование с данными из различных источников могло быть объявлено эмпирическим *законом*; таков был закон Парето распределений доходов. Позднее проблема распределения величин была сформулирована заново и теперь эконометристы считают её примером формулирования динамического процесса роста и убывания со случайными элементами.

Задача состоит в оценке параметров процесса и установлении существует ли равновесное распределение величин и каково оно. Хорошая пригонка может поэтому иметь за собой какой-то теоретический механизм, а параметры можно сделать зависимыми от других экономических переменных, которые либо могут изменяться, либо быть управляемыми.

[3.7.] Статистические методы. В естествознании исследователь должен измерять, но экономика сама производит огромное количество данных. Налогоплательщики, коммерческие фирмы, банки и т. д. регистрируют свои операции, многие реестры доступны экономисту. К сожалению, эти данные не всегда оказываются в точности такого типа, который он хотел бы иметь, и часто приходится приспосабливать их для научных целей.

В последние десятилетия правительства всё более занимались сбором и переработкой экономических данных, что оказало громадную помощь развитию эконометрии. Так произошло не только в США и государствах западной Европы, но и в плановых экономиках, в которых они необходимы для планирования (Liu 1968; Ruggles 1968; Spulber 1968).

Недостаток данных серьёзнее всего ощущается при изучении развивающихся стран, хотя при посредстве ООН и других организаций собирается и сопоставляется возрастающий объём данных по этим регионам.

Большая доля экономических данных встречается в последовательной регистрации экономических наблюдений во времени. Так, могут существовать данные о ценах на определённые товары за многие годы, о занятости и др. Поэтому эконометрист по традиции был серьёзно озабочен исследованием временных рядов, особенно с применением методов регрессии. Это обстоятельство позволило развивать уравнения динамической регрессии и пытаться объяснить определённое наблюдение на какой-то момент времени как функцию не только других переменных, но и одного или нескольких предыдущих значений той же самой переменной. Так, соотношение динамической регрессии является разностным уравнением со случайным членом.

Но если в разностное уравнение включено много предыдущих значений некоторой переменной, оно оказывается очень высокого порядка. Становится трудно без потери многих степеней свободы оценивать коэффициенты этих предыдущих переменных (?), и потому эконометристы пытались подчинить эти коэффициенты какой-либо схеме отношений, чтобы их все можно было бы оценивать в качестве функций сравнительно небольшого числа параметров. Таков метод распределённой во времени регрессии с запаздывающим аргументом.

Только что описанный метод стал в основном заменять прежние методы разложения временных рядов на тренд, циклы различной длительности, сезонную схему вариаций и случайную составляющую. Эти методы подразумевали взаимодействие повторяющихся влияний регулярной периодичности и амплитуды. При дальнейшем развитии были введены экзогенные переменные, а влияние случайных возмущений стало кумулятивным. […]

Ввиду повторения сезонов, праздников и т. д. для сезонной составляющей всегда было разумно принимать довольно строгую периодичность, и поэтому при изучении временных рядов с ежедневными, еженедельными или ежемесячными наблюдениями обычно вначале оценивают и исключают сезонную составляющую. Экономист также использует перекрестные данные, например, выборку произведенных примерно в одно и то же время наблюдений активов, доходов и расходов различных домашних хозяйств, фирм или отраслей промышленности.

Наблюдая различия в поведении отдельных лиц в выборке и опять-таки обычно с помощью регрессионного анализа приписывая эти различия расхождениям других переменных, не управляемых указанными лицами, эконометристы пытаются понять, как поведение аналогичных экономических единиц изменится во времени, если изменятся значения независимых переменных. Много есть ловушек для выводов об изменениях во времени для данной фирмы или домашнего хозяйства на основе различий между фирмами и хозяйствами в данный момент. […]

Очень часто в эконометрии возникает проблема при различии вида соотношений между отдельными переменными. К примеру, совокупность вложений зависит от национального дохода, но последний иначе зависит от совокупности вложений. При исследовании спроса и предложения равновесные обмениваемые количества и рыночные цены должны удовлетворять одновременно функциям того и другого.

При применении регрессионных методов одновременность множества взаимоотношений между теми же самыми переменными приводит к особым проблемам. За последние 20 лет они серьёзно изучались и ныне имеются различные методы обращения с ними. Эти методы часто очень сложны, но с прогрессом статистической теории, наличием данных и применением компьютеров они стали широко применяться при оценке частичного равновесия и макроэкономических моделей иногда весьма больших размерностей. […] Здесь мы лишь слегка затронули эту основную проблему статистической методологии, однако она, возможно, является самой центральной чертой эконометрического анализа и предметом многих сочинений. […]

Для исследователей, находящихся на переднем крае любой науки, прогресс всегда кажется исключительно медленным, однако при обзоре работы эконометристов за последние 20 или 30 лет и в развитии экономической теории, и в её количественной оценке и проверке чувствуется её громадный успех. Но с решением прежних задач появляются новые, и таким образом продвижение эконометрии продолжается не ослабевая.

Примечания

1. О трудном внедрении эконометрии в СССР см. Шейнин (2001, § 5).

2. О налоговой ставке автор уже не упомянул.

Библиография

Мы включили источники 1) из Примечаний; 2) описывающие историю эконометрии и те, которые автор считал основными и 3) отдельно: те, которые упомянуты в тексте и не включены в основные источники

Шейнин О. Б. (2001), Статистика и идеология в СССР. *Историко-математич. исследования*, вып. 6 (41), с. 179 – 198.

Allen R. G. D. (1956), *Mathematical Economics*. New York – London, 1963.

Divisia F. (1953), La Société d'Económétrie a atteint sa majorité. *Econometrica*, vol. 21, pp.

1 – 30.
Frisch R. (1933), Editorial. *Econometrica*, vol. 1, pp. 1 – 4. Опубликовано анонимно.
Malinvaud E. (1964 франц.), *Statistical Methods in Econometrics*. Chicago, 1966.
Samuelson P. A. (1947), *Foundations of Economic Analysis*. *Harvard Econ. Studies*, vol. 80, 1958. Издание в мягкой обложке: 1965.
Theil H. (1971), *Principles of Econometrics*. New York.
Tintner G. (1953), Definition of econometrics. *Econometrica*, vol. 21, pp. 31 – 40.
--- (1954), Teaching of Econometrics. *Econometrica*, vol. 22, pp. 77 – 100.
Allais M. (1968a), Fischer, Irving. IESS, vol. 5, pp. 475 – 485.
--- (1968b), Pareto, Vilfredo. IESS, vol. 11, pp. 399 – 411.
Arrow K. J. (1968), Eonomic equilibrium. IESS, vol. 4, pp. 376 – 389.
Baumol W. J. (1968), Statics and dynamics in economics. IESS, vol. 15, pp. 169 – 177.
Clower R. W. (1968), Stock-flow analysis. IESS, vol. 15, pp. 273 – 277.
Corry (1968), в Библиографии отсутствует
Eisner R. (1968), Investment. IESS, vol. 8, pp. 185 – 194.
Jaffé W. (1968), Walras, Léon. IESS, vol. 16, pp. 447 – 453.
Lancaster K. J. (1965), Theory of qualitative linear systems. *Econometrica*, vol. 33, pp. 395 – 408.
Liu Ta-Chung (1968), Economic data, mainland China. IESS, vol. 4, pp. 373 – 376.
McKenzie L. W. (1968), International trade, mathematical theory. IESS, vol. 8, pp. 96 – 104.
Mishan E. J. (1968), Welfare economics. IESS, vol. 16, pp. 504 – 512.
Morishima M. (1968), Economic growth, mathematical theory. IESS, vol. 4, pp. 417 – 422.
Nataf A. (1968), Aggregation. IESS, vol. 1, pp. 162 – 168.
Peston M. H. (1959), A view of the aggregation problem. *Rev. of Econ. Studies*, vol. 27, No. 1, pp. 58 – 64.
Ruggles R. (1968), Economic data, general. IESS, vol. 4, pp. 365 – 369.
Spulber N. (1968), Economic data, Soviet Union and Eastern Europe. IESS, vol. 4, pp. 370 – 372.
Stanback Th. M. Junior (1968), Inventories, inventory behaviour. IESS, vol. 8, pp. 176 – 181.
Stigler G. J. (1962), Henry L. Moore and statistical economics. *Econometrica*, vol. 30, pp. 1 – 21.
--- (1968), Moore, Henry J. IESS, vol. 10, pp. 479 – 481.
Tobin J. (1968), Consumption function. IESS, vol. 3, pp. 358 – 369.

X

Трюгве Хаавелмо

Циклы деловой активности. Математические модели

Trygve Haavelmo, Business cycles: mathematical models. IES, pp. 30 – 34

[1. Предисловие.] Поскольку это касается экономического содержания, математическая модель деловых циклов не обязательно является специальным видом теории деловых циклов. Математическая формулировка это инструмент для организации нашего знания фактов и наших гипотез. Для достижения этой цели математические инструменты могут быть не только полезны, но и незаменимы. Применение какого-нибудь из них может привести к полезным теориям, которые невозможно было бы обнаружить словесным рассуждением, и к тому же точная математическая формулировка позволяет подтвердить или опровергнуть предыдущие теории, предложенные в свободной словесной форме, и проложить путь к более систематическим эмпирическим исследованиям.

Дату возникновения математических моделей циклов деловой активности установить нелегко; элементы таких моделей встречаются даже в классической экономической теории. Тем не менее, справедливо, видимо, было бы сказать, что разработка явных и полноценных моделей указанного вида началась лишь в ранние 1930-е годы, см. Frisch (1933), Kalecki (1935), Tinbergen (1935).

Эти первые модели были явно макроэкономическими и характеризовали экономическую систему лишь несколькими ключевыми переменными. В дальнейшем было предложено очень много подобных моделей, см. Samuelson (1939), Metzler (1991), Hicks (1935), Goodwin (1951). Неплохой обзор некоторых из них находится в учебнике по математической экономике (Allen 1957, pp. 209 – 280).

Были разработаны и более подробные модели с большим числом экономических переменных, см. Tinbergen (1938 – 1939), Klein (1950) и др. Их целью было не только представить более подробное теоретическое объяснение циклов деловой активности, но и проложить путь к проверке и измерению в соответствии с принципами статистических выводов. В исследованиях подобного рода возрастающая важная роль принадлежит компьютерам.

[2] Общие черты. Факты и данные о взлётах и падениях деловой активности составляют смущающую массу информации. Любая попытка описать *всё, что происходит* во время быстрого роста и депрессии не только безнадёжна, но и довольно неблагодарна, поскольку дело здесь обстоит в реальном понимании. Приходится как-то отыскивать принципы систематической классификации и упрощающие идеи *симулирования*, чтобы уменьшить число учитываемых единиц. Так каковы же тогда общие черты динамических процессов, которые мы называем циклами деловой активности?

Кроме некоторых сравнительно грубых теорий, которые объясняют эти циклы как нечто "привнесённое извне" (теории [влияния] солнечных пятен или подобные), их остальные теории сосредоточиваются на идее о том, что наблюдаемое есть результат решений и действий человека. *Движущей силой* является надежда на прибыль или экономическую выгоду того или иного вида. Запуск, мощность и направление таких сил можно считать реакциями на систему *сигналов*, руководящих экономической активностью отдельных лиц или групп. Подобными сигналами являются цены на товары и услуги, либо другие данные, которые используются при подсчётах экономической выгоды или убытка по каждой рассматриваемой единице.

Запущенным таким образом силам противодействуют различные составляющие инерции и трения, частично возникающие ввиду человеческой нерешительности и медлительности, но также вызванные ограничениями природы или косностью установлений. Существует и запутанная сеть "обратных связей", для которых характерно взаимодействие одной группы решений с сигнальной системой, руководящей какой-либо иной подобной группой. И очевидно, что если в этой системе существуют элементы инерции и задержек, то продолжительный процесс выравнивания того или иного вида оказывается почти неизбежным.

Рассматривая ход быстрого роста и депрессий в только что описанных рамках, поражаешься его схожестью с моделями сил и движения в прикладной механике. Соответственно, применение идеи о подобных аналогиях без чрезмерного доверия к ним, – вот один из основных принципов математического моделирования для анализа циклов деловой активности.

Понятие динамического равновесия. У экономистов издавна укоренилось чувство, что в "нормальном" состоянии деловой активности *нет никакого движения* (кроме быть может некоторого тренда). Весьма странно, что применение математики для создания систем общего равновесия на рынке быть может укрепило влияние подобного понятия нормальности на очень многих экономистов. Ясно, что при распространённом признании этого понятия колебания деловой активности часто рассматриваются как “уклонения от нормальности” и несовершенство рынка, как непредсказуемые и нежелательные исключения из правила. Такие мысли, однако, мало плодотворны в качестве основы для понимания циклов деловой активности. Суть здесь, конечно, в том, что в стационарном состоянии, как при равновесии в системе Вальраса, действуют силы, и на самом деле очень существенные, но оказывается, что они *выравниваются так, что движения не происходит*.

Впрочем, это весьма специальный случай уравновешивания сил. В общем случае выравнивание осуществляется продолжающимся *движением* некоторых элементов экономики, и это объясняет, почему математические уравнения, основанные на принципе сил в равновесии, могут представлять ход изменения деловой активности. Экономические силы могут находиться в равновесии при различных скоростях движения соответствующих экономических величин. Эта общая идея динамического равновесия оказывается основой математических теорий деловых циклов.

Объяснение точек поворота. Основной проблемой теории деловых циклов, разумеется, является выяснение причин смены расширения на сокращение и обратно. Одним из основных достижений математического подхода здесь было доказательство того, что объяснить точки поворота не труднее, чем любой другой фазы циклических движений. Применяя понятие динамического равновесия можно просто сказать, что в любой момент относительная мощь экономических сил определяет, необходимо ли для достижения равновесия расширение или спад.

Причина, почему математический подход превосходит словесный анализ, очевидна. При словесном рассуждении достаточно просто перечислить разнообразные действующие экономические силы развития, но часто трудно, а иногда невозможно, определить направление движения, возникающего под действием относительной мощи различных сил.

Влияние обучения [встроенного в модель]: *необратимость*. Одно из возражений, вдвинутых против теорий деловых циклов в виде жёстких математических моделей, состояло в том, что подобные модели ведут к неизменным повторениям резких взлётов и депрессий одного и того же вида, тогда как *история никогда не повторяется*. Действительно, так можно критиковать некоторые, но не все математические модели. Возможным средством против этого недостатка является явное введение в модель элементов обучения.

К примеру, схема потребительского спроса может постепенно изменяться в результате накапливающегося опыта или метода, применяемого производителями для установления своих ожиданий (т. е. основы для действия) после сравнения прежних надежд с действительностью. В последние годы всё больше внимания уделялось подобным элементам, которые считаются необходимыми частями математической модели делового цикла (Goodwin 1951).

Хоть элементы необратимости могут быть включены в модель подобным образом, необходимо понять, что она основана на том предположении, что *какие-то* стороны экономического развития должны повторяться. В противном случае невозможна никакая теория, ни математическая, ни словесная.

[3] Основные виды моделей. При классифицировании различных моделей делового цикла на основе их принципов, а не тех или иных экономических переменных, можно сгруппировать эти модели в таблицу размером два на два. Вначале мы решаем, исходят ли основные активные движущие силы *извне* или являются *внутренними* частями самой экономической системы. Соответствующие виды моделей иногда называются *открытыми* и *закрытыми*. Затем мы решаем для каждого из этих видов по отдельности, происходят ли циклы потому, что *циклична сама движущая сила* ("вынужденные колебания") или ввиду того конкретного способа, которым *экономическая система отзывается* на стимулирующие силы ("свободные колебания"). Эти принципы классификации полезны, но действительно полноценная модель деловых циклов может содержать элементы, которые поместят её во все четыре графы сразу (Samuelson 1947, pp. 335 – 349). Несколько ясных примеров пояснят многие обстоятельства, обсуждённые выше.

Паутинообразная модель с внешними силами. Пусть $x^{d}(t)$ обозначает спрос на товар x в момент t и $p(t)$ – его цена в тот же момент. Положим, что

$$x^{d}(t) = f[p(t)]. \qquad (1)$$

Далее, пусть $x^{s}(t)$ означает предложение этого товара в тот же момент. Положим, что

$$x^{s}(t) = g[p(t - \theta)] + v(t), \qquad (2)$$

где $\theta > 0$ и $v(t)$ – некоторая внешняя сила, независимо воздействующая на $x^{s}(t)$. Например, $v(t)$ может быть каким-то фактором погоды или некоторым влиянием иного и независимого экономического сектора. Для распродажи рынка на момент t должно выполняться равенство $x^{d}(t) = x^{s}(t)$.

Пусть $x(t)$ – количество товара x, при котором он распродастся в момент

t. Из уравнений (1) и (2) и этого условия часто возможно вывести равенство

$$x(t) = G[x(t - \theta)] + v(t). \qquad (3)$$

Обычная форма кривых предложения и спроса наводит на мысль о том, что первая производная от G отрицательна.

При постоянной и не зависящей от t величине v эта модель была бы обычным случаем "паутины", который описывается в учебниках (Allen 1957, pp. 2 – 6). В подобных моделях возможны деловые циклы с периодом 2θ, которые в конце концов исчезли бы или продолжали бы вечно и энергично следовать друг за другом.

Рассмотрим теперь результат изменения $v(t)$. Пусть при постоянной $v(t)$ функция $x(t)$, колеблясь, стремится к некоторой константе. Тогда переход $v(t)$ на новый уровень, вообще говоря, вновь приведёт в движение $x(t)$, которая станет какое-то время колебаться даже при постоянном новом уровне $v(t)$. Другими словами, для возбуждения колебания в $x(t)$ систематическое колебание движущей силы $v(t)$ не обязательно. Достаточно, чтобы эта сила изменялась время от времени, притом возможно весьма неправильным образом.

Разумеется, если $v(t)$ обладает своим собственным циклом, произойдут какие-то последствия в форме кривой $x(t)$, которая, ввиду функциональной формы G и запаздывания θ, воспримет, однако, и циклические качества, отсутствующие в $v(t)$. Модель, оказывается, имеет вид "свободных" колебаний с внешней движущей силой.

Рассмотрим теперь особый случай $\theta = 0$. Из (3) следует, что $x(t)$ теперь можно непосредственно выразить через $v(t)$, если только вид (3) допускает такое решение. И теперь при неподвижной $v(t)$ не может двигаться и $x(t)$. А если $v(t)$ циклично, её циклы так или иначе отразятся на $x(t)$ в виде "вынужденных" колебаний.

Циклы капиталовложений – закрытая модель. Обозначим на момент t потребление через $C(t)$, общие вложения через $I(t)$ и доход в закрытой экономике через $Y(t)$. Тогда

$$Y(t) = C(t) + I(t). \qquad (4)$$

Рассмотрим простую функцию потребления по Кейнсу

$$C(t) = f[Y(t)] \qquad (5a)$$

или динамический вариант потребления

$$C(t) = F[Y(t), Y(t-1)]. \tag{5b}$$

Пусть по какой-то причине существуют внешние силы, вызывающие независимые колебания в проценте на вложения $I(t)$. Тогда в случае (5a) произойдут *вынужденные колебания* функций $C(t)$ и $Y(t)$. В случае (5b) и потребление, и доход будут колебаться и свободно, и вынужденно.

Описанную модель следует назвать *открытой*, потому что она не "объясняет" поведения вложений. Для превращения её в закрытую можно применить принцип ускорения. Начнём с очень простого варианта этой идеи. Пусть $K(t)$ будет в момент t (физическим) объёмом наличного капитала в экономике, а $K^*(t)$ – его объём, *желательный* производителям. Если эти величины совпадают, производители будут удовлетворены. Если же $K^*(t) > K(t)$, спрос на дополнительный капитал *за единицу времени* окажется неограниченным, т. е. производители согласятся с любым процентом на вложения. Далее, если в экономике существует предел производственных мощностей для всей её продукции, то выпуск товаров производственного назначения (capital goods), будет ограничен сверху со стороны *предложения*. Если же $K^*(t) < K(t)$, то спроса на подобные новые товары не будет даже для их замены, и в этом случае вложение будет определяться *спросом*, а скорость изнашивания установит (отрицательный) "пол", ниже которого спрос не сможет упасть (если упомянутые товары не будут намеренно уничтожаться).

Теперь модель "объясняет" вложение, если только известны определяющие величины желательного капитала $K^*(t)$ и порядка изнашивания товаров производственного назначения. В противном случае модель остаётся *открытой*, и возникает задача её превращения в *закрытую*. Для этой цели были введены простые предположения (Allen 1957, с. 242 – 247): желательный капитал является функцией всего выпуска [продукции], или же, более определённо, предположена пропорциональность $K^*(t)$ и $Y(t)$ и постоянство скорости изнашивания.

Приняв эти предпосылки, легко установить характерные свойства модели. Пусть потребление задано функцией (5a), а мощности по производству товаров производственного назначения (investment goods) достаточны для того, чтобы капитал мог *достичь и превзойти* желательный объём. После достижения этого объёма выпуск продукции, очевидно, должен будет опуститься ниже возможного. Но снижается при этом и уровень желательного капитала. И это снижение не сможет остановиться, если не прекратится общий выпуск товаров производственного назначения. Это привело бы к минимальному уровню общего выпуска [продукции] и, следовательно, желательного капитала.

Спрос на новые товары производственного назначения может появиться только после использования существующего капитала до уровня, ниже минимально желательного. Но *когда* это в конце концов наступит, выпуск будет снова возрастать, затем возрастёт и объём желательного капитала, и выпуск снова достигнет предела возможного. Таким образом, мы получим *закрытую модель со свободными и поддерживаемыми колебаниями*.

Впрочем, этот вариант модели в нескольких отношениях неудовлетворителен. Во-первых, надо объяснить, почему объём желательного капитала должен быть функцией выпуска товаров. Во-вторых, действительно ли безопасно предполагать, что уровень желательного капитала когда-либо будет достигнут. В третьих, всё-таки возможно, что закрытая модель окажется в какой-то степени искусственным образованием, поскольку она пренебрегает принципами установления заработной платы и денежной политикой. Краткие указания на способы устранения некоторых перечисленных недостатков будут, возможно, интересны.

Пусть $X(t)$ обозначает полный выпуск, δ постоянно и $\delta K(t)$ – изнашиваемость. Тогда

$$X(t) = Y(t) + \delta K(t). \tag{6}$$

Пусть также $X(t)$ обозначает выпуск при “классической” производственной функции

$$X(t) = \varphi[N(t), K(t)], \tag{7}$$

где $N(t)$ – приложенная рабочая сила, и предположено, что затраты N и K дополняют друг друга. Пусть также действительная норма зарплаты $w(t)$ будет возрастающей функцией приложенной рабочей силы

$$w(t) = W[N(t)] \tag{8}$$

и, наконец, $r(t)$ – процент на капитал. Рассмотрим два варианта.

Вариант 1. Предположим, что со стороны спроса нет предела для $X(t)$, тогда можно считать, что приложенная рабочая сила определяется приравниванием наименьшей допустимой производительности труда норме зарплаты, но только если затраты на всю заработную плату ниже текущих поступлений. Если же эта производительность превышает или равна $(r + \delta)$, спрос на X фактически окажется неограниченным ввиду спроса на возросший объём капитала.

Вариант 2. Предположим, что выпуск $X(t)$ ограничен существующим спросом, так что роль производителей сводится к производству по заказам.

Тогда приложенная рабочая сила определяется по формуле (7) с заданным $K(t)$, но только если затраты на всю заработную плату в соответствии с (8) ниже текущих поступлений. Если соответствующая наименьшая допустимая производительность капитала не превышает $(r + \delta)$, спрос на $X(t)$ окажется ограниченным и равным спросу потребителей, потому что производители не пожелают никаких новых капиталов.

Будут ли в этой модели перескоки от одного варианта к другому и обратно, подобно тому, что происходило в более простой рассмотренной выше модели, существенно зависит от движения процента на капитал. При Варианте 1, если он вот-вот нарушится, снижение этого процента может продлить положение. Но если позволить возникнуть Варианту 2, то для возвращения к Варианту 1 снижение обычно должно быть намного существеннее, чем было бы достаточно для поддержания существовавшего Варианта 1.

Эта модель очень гибка и может быть обобщена для включения последствий технического прогресса, влияния эффекта храповика в потребительском спросе и т. д.

Библиография

Allen R. G. D. (1957), *Mathematical Economics*. New York – London, 1963.

Baumol W. J. (1968), Statics and dynamics in economics. IESS, vol. 15, pp. 169 – 177.

Frisch R. (1933), Propagation problems and impulse problems in dynamic economics. В *Readings in Business Cycles*. Homewood, Ill, 1965, pp. 155 – 185. Редакторы R. A. Gordon, L. R. Klein.

Goodwin R. M. (1951), The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. *Econometrica*, vol. 19, pp. 1 – 17.

Hicks J. R. (1950), *Contribution to the Theory of the Trade Cycle*. Oxford.

Kalecki M. (1935), A macrodynamic theory of business cycles. *Econometrica*, vol. 3, pp. 327 – 344.

Klein L. R. (1950), *Economic Fluctuations in the United States: 1921 – 1941*. New York.

Metzler L. A. (1941), The nature and stability of inventory cycles. В *Readings in Business Cycles*. Homewood, Ill, 1965, pp. 100 – 129.

Samuelson P. A. (1939), Interaction between the multiplier analysis and the principle of acceleration. В *Readings in Business Cycle Theory*. Philadelphia, 1944, pp. 261 – 269. Редактор G. Haberler. Впервые опубликовано в *Review of Economic Statistics*, vol. 21.

--- (1947), *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge (Mass.), *Harvard Economic Studies*, vol. 80, 1958. Издание в мягкой обложке: 1965.

Tinbergen J. (1935), Annual survey: quantitative business cycle theory. *Econometrica*, vol. 3, pp. 241 – 308.

--- (1938 – 1939), *Statistical Testing of Business-Cycle Theories*, vols 1 – 2. Geneva.

XI

Карл Ф. Крайст

Всеобъемлющие эконометрические модели

Carl F. Christ, Econometric models, aggregate. IES, pp. 181 – 188

[1. **Предисловие.**] *Эконометрическая модель* это система уравнений, составленных для количественного объяснения поведения экономических переменных. Мы обсуждаем модели, которые сосредоточиваются на поведении экономики *в целом*, и особенно на ходе таких переменных, как национальный доход и продукция, потребление, вложения, занятость, уровень цен, процент на капитал и т. д.

Первую модель такого типа построил Tinbergen (1939), затем в течение нескольких лет ведущим составителем всеобъемлющих моделей был Лоренс Р. Клейн. Подобные модели появились в результате сочетания нескольких различных направлений, оформившихся из математических работ Леона Вальраса, который представлял экономику системой уравнений. Вторым служила работа Рагнара Фриша и других по теории экономической динамики. Третьим направлением оказалось изучение статистических выводов, связанное с Карлом Пирсоном и его последователями и указывающее, как оценивать значения неизвестных параметров по предварительной информации и наблюдённым данным. Четвёртым была разработка Уилфордом Кингом, Саймоном Кузнецом и другими количественной оценки национальных доходов и расходов и их составляющих (Kendrick 1968). Наконец, пятым направлением назовём формулировку всеобъемлющих экономических теорий дохода и занятости Р. Ф. Канном, Джоном Мейнардом Кейнсом и другими.

[2] Общие черты. Ниже описаны общие черты всеобъемлющих эконометрических моделей, затем приведен очень простой пример и обсуждаются современные модели.

Определяющие уравнения (тождества). В любой всеобъемлющей модели некоторые уравнения являются *определениями* (обычно называемые *тождествами*) такого типа, который возникает в национальных финансовых отчётах. Считается, что эти уравнения выполняются в точности и не содержат никаких неизвестных параметров.

Примеры: “Потребление, плюс чистые вложения, плюс государственные закупки, плюс экспорт, минус импорт равно чистой национальной продукции”или “Полная денежная заработная плата равна средней денежной норме заработной платы, умноженной на количество затраченного труда”.

Стохастические уравнения. Остальные уравнения являются стохастическими. Считается, что они выполняются только приближённо и содержат небольшие случайные и не содержащие сдвигов ненаблюдаемые возмущения. Пример: “Потребление в течение любого периода составляет постоянную долю свободного дохода за этот период, плюс постоянная доля потребления за предыдущий период, плюс третья постоянная, плюс случайные возмущения”.

В некоторых моделях возмущения принимают форму случайных ошибок измерения переменных. Предположение о *случайности* возмущений очень удобно для статистической оценки значений неизвестных констант (параметров). Иногда эта предпосылка обоснована, даже если в возмущениях имеются систематические составляющие; если эти компоненты невелики, многочисленны и взаимно независимы, их общее влияние оказывается примерно случайным [в силу центральной предельной теоремы]. При формулировке моделей этого вида надеются явно включить в каждое уравнение все имеющие место существенные систематические влияния, чтобы возмущения оказались небольшими и по крайней мере примерно случайными.

Структурные уравнения. Некоторые стохастические уравнения описывают *поведение* какой-либо экономической группы, например, потребителей (см. предыдущий пример) или инвесторов в товары промышленного назначения. Другие описывают ведомственные или технологические *ограничения*, как, например, законы о налогах или так называемые производственные функции, которые указывают высшую возможную продукцию при любом вводе. Далее, есть уравнения, описывающие процессы *выравнивания* на определённых рынках (например, рынках труда или товаров) при избыточном спросе или предложении. Специальным случаем уравнения выравнивания является условие равновесия, утверждающее, что спрос равен предложению.

Эти четыре вида уравнений (определяющие и описывающие поведение, ограничения и выравнивание) называются *структурными*, потому что каждое предположительно описывает какую-то более или менее хорошо определённую часть структуры экономики.

Типы переменных. Кроме постоянных параметров и ненаблюдаемых случайных возмущений уравнения содержат наблюдаемые переменные, число которых обычно превышает число уравнений в модели. Некоторые переменные, как полагают, определяются силами, полностью действующими вне модели. Их значения считаются заданными, и их называют *экзогенными*. Таковыми часто считаются переменные государственной политики, население, действия иностранных государств и др. Другие переменные, чьи значения определяются системой при известных параметрах, возмущениях и экзогенных переменных, называются *эндогенными*. В типичном случае в полной модели уравнений столько же, сколько этих переменных.

Во многих случаях уравнения для данного периода включают и текущие, и предшествовавшие значения эндогенных переменных. Текущие эндогенные переменные известны как *совместно зависимые*. Экзогенные и предшествовавшие эндогенные переменные вместе называются *предопределёнными*, потому что их значения определяются для любого периода (либо вне системы, либо по её предшествовавшей деятельности), когда система начинает определять совместно зависимые переменные для этого периода.

Редуцированная форма и предсказание. Допустим, что система структурных уравнений решена относительно совместно зависимых переменных, каждая из которых выражена в функции структурных уравнений этой системы, предопределённых переменных и возмущений. Полученный результат называется *редуцированной формой* модели. Её можно применять для предсказания будущих значений совместно зависимых переменных, если заранее были известны её параметры, будущие значения возмущений и предопределённых переменных.

Практически они не известны, так что параметры приходится оценивать, будущие возмущения принимаются приближённо, по оценкам их ожидаемых значений (возмущения, как считается, имеют нулевые средние, так что их оценки часто принимаются равными нулю), а будущие значения предопределённых переменных должны быть предположены. Таким образом, предсказания, исходящие из редуцированных форм, по необходимости являются приближёнными.

Если считается, что экзогенные и предшествовавшие эндогенные переменные заданы, то основанные на них предсказания, исходящие от редуцированных форм, называются *условными* относительно этих данных. К примеру, модель может предсказать, что *если* налоговая ставка в конце нынешнего года будет сокращена на 10%, а другие предопределённые переменные не изменятся, то в следующем году национальный доход окажется на 7% выше нынешнего, в противном же случае и при прочих равных условиях доход поднимется лишь на 4%.

Если неизвестные будущие значения предопределённых переменных как-то предсказаны (для экзогенных переменных потребуется информация извне), то при редуцированной форме предсказания совместно зависимых переменных называются *безусловными*. К примеру, можно предсказать, что налоговая ставка *будет* сокращена в конце этого года на 10% и применить модель для предсказания, что в следующем году национальный доход окажется на 7% выше нынешнего.

Динамические черты. Если модель включает предшествовавшие эндогенные переменные, она имеет динамический характер, потому что на её совместно зависимые переменные действуют не только параметры, возмущения и экзогенные переменные, но и прошлая история системы. Простые системы, содержащие предшествовавшие значения или изменения эндогенных переменных от года к году, могут производить циклы и/или длительные периоды роста или упадка даже без изменения параметров, возмущений или экзогенных переменных.

Существуют другие методы для введения динамических влияний, например, переменных с временным трендом, производных по времени или накопленных переменных, как, например, основных фондов, т. е. суммы предшествовавших чистых вложений.

Линейность или нелинейность. Если структурные уравнения линейны по совместно зависимым переменным, а матрица параметров этих переменных не особенна, то решение (редуцированная форма) линейно по этим переменным и единственно. Если же структурные уравнения содержат нелинейные члены в совместно зависимых переменных, их решение окажется нелинейным и, возможно, не единственным.
В этом случае для исключения посторонних решений можно применить дополнительную информацию и установить то, которое представляет поведение экономики. К примеру, любое решение, приводящее к отрицательному национальному доходу, является посторонним.

Или иначе, нелинейную модель можно примерно представить линейной, а результаты окажутся приемлемыми, если область изучаемых переменных мала по сравнению с их экстремальными значениями. Так, вероятно, и будет происходить на протяжении коротких, но не длительных периодов. Модели с нелинейными *переменными* достаточно распространены, но почти все составляемые модели имеют неизвестные линейные параметры, что значительно упрощает их оценивание.

[3] Построение и оценка моделей. Численные оценки неизвестных и предположительно постоянных параметров системы редуцированной формы или структурных уравнений определяют встраиванием уравнений к предшествовавшим данным, если только параметры *опознаваемы*. При этом применяются уточнения, указывающие, какие переменные эндогенны и какие экзогенны; каковы запаздывания; какие переменные появляются в каждом структурном уравнении; какова математическая форма этих уравнений; и каковы предположенные свойства распределений вероятностей случайных возмущений. […]

[4] Предсказание и испытание моделей на практике. […]

[5] Простой пример. […]

Библиография

Kendrick J. W. (1968), National income and product accounts. IESS, vol. 11, pp. 19 – 34.

Tinbergen J. (1939), *Statistical Testing of Business-Cycles Theories*, vol. 2. Geneva.

[6] Добавление. Во многих странах составлены новые всеобъемлющие эконометрические модели, а проект LINK под руководством Лоренса Р. Клейна предназначен для объединения моделей нескольких стран, чтобы каждая участвующая страна могла исследовать международные последствия экономической политики и событий.

Модели экономики США были видоизменены, чтобы усилить роль монетарной политики и количества денег, поскольку накопились убедительные сведения о значимости этих факторов. Число уравнений в моделях было увеличено, равно как и доля их нелинейности. Была разработана технология компьютерного симулирования, и каждая модель теперь может быть применена для получения предположительного будущего поведения каждой эндогенной переменной при произвольно уточнённых условиях.

Библиография

Battenberg D. и др. (1975), MINNIE: a small version of the […] econometric model. *Federal Reserve Bull*., Nov., pp. 721 – 727.

Christ C. F. (1975), Judging the performance of econometric models of the U. S. economy. *Intern. Econ. Rev*., vol. 16, pp. 54 – 74.

Conference (1969), Conference on Econometric models of cyclical behaviour. *Econometric models of cyclical behaviour*, vols 1 – 2. Columbia Univ. Press, 1972.

Duesenberry J. S. и др., ред. (1969), *The Brookings Model: Some Further Results*. Chicago – Amsterdam.

Econometric (1974 – 1975), Econometric model performance. *Intern. Econ. Rev*., vol. 15, pp. 265 – 414, 541 – 654; vol. 16, pp. 1 – 113.

Fair R. C. (1971), *A Short-Run Forecasting Model of the US Economy*. Lexington, Mass.

--- (1974), *A Model of Macroeconomic Activity*, vol. 1. Cambridge, Mass.

Fromm G., Klein L. R. (1973), Comparison of eleven econometric models of the US. *Amer. Econ. Rev*., vol. 63, pp. 385 – 393.

--- (1976), The model comparison seminar. *Annals Econ. & Soc. Measurement*, vol. 5, pp. 1 – 28.

Fromm G., Taubman P. (1968), *Policy Simulation with an Econometric Model*. Washington.

McCarthy M. D. (1972), *The Wharton Quantity Econometric Forecasting Model*. Philadelphia.

McNees S. K. (1975), Evaluation of economic forecasts. *New England Econ. Rev*., Nov. – Dec., pp. 1 – 39.