Владимир Вовк, Глен Шафер

Вероятность и финансы. Ведь это только игра!

Glenn Shafer, Vladimir Vovk

Probability and Finance. It's Only a game!

New York, John Wiley & Son, 2001

О. Б. Шейнин, перевод главы 1

От переводчика

С разрешения авторов мы перевели первую главу их книги, и один из них (В. В.) смог найти время и просмотреть первые семь страниц перевода. Текст главы оказался весьма непривычным, а потому трудным для перевода, и мы совсем не уверены, что в нём не осталось ошибок. Надеемся, что В. В. сможет со временем просмотреть и исправить оставшуюся часть перевода, после чего можно будет данный текст заменить исправленным. Номера библиографических ссылок мы оставили без изменения, но, разумеется, исключили те, которые не относились к первой главе. Несколько статей В. Вовка были опубликованы на русском языке, однако в Библиографии были указаны лишь их переводы.

Предисловие

Мы показываем, как теория вероятностей может быть основана на теории игр и как это обстоятельство может освободить многие приложения теории вероятностей, особенно в области финансов, от отвлекающих и путаных предположений о случайности как механизма порождения наблюдаемых данных.
Связь теории вероятностей с играми уходит в прошлое так же далеко, как сама теория вероятностей, однако теоретико-игровая структура теории вероятностей, которую мы представляем в этой книге, свежа и нова, и работа была поэтому приятна и интересна. Надеемся, что нам удалось передать читателям возбуждавшее нас чувство открытия; мы ведь только начали разрабатывать богатейшее месторождение идей и ставили себе целью позволить и другим присоединиться к нашим усилиям.

Мы постарались в полной мере показать мощь теоретико-игровой структуры, однако неизменно предпочитали ясность и простоту изложения полноте и общности. Наша книга не является исчерпывающим трактатом по созревшей и законченной математической теории, подготовленным для хранения в долгом ящике. Она приглашает читателей к соучастию.

Наши имена указаны в алфавитном порядке, что плохо отражает суть нашего сотрудничества. На самом деле книга объединяет наши точки зрения, которые мы выработали независимо друг от друга в 1980-е и ранние 1990-е годы.

Основное математическое содержание книги исходит из ряда статей, которые один из нас (В. В.) опубликовал в середине 1990-х годов, а мысль об их объединении в книжную форму с полным описанием исторического и философского фона возникла на приятном и творческом семинаре в университете г. Олборг (Дания) в июне 1995 г.

Мы сердечно благодарны Стефену Лауритцену, который организовал этот семинар и уговорил В. Вовка объединить свои статьи, – убедил так основательно, что последнему оказалось легче уговорить другого автора, Г. Шафера, участвовать в составлении книги.

Шафер работал над вопросами, вошедшими в книгу, с конца 1970-х годов, когда изучение доводов Бейеса в пользу условной вероятности (274) впервые заставило его настаивать на том, что протоколы, в соответствии с которыми мы получаем информацию, должны быть включёны в основания теории вероятностей и условной вероятности (275). Его осознание, что подобные протоколы равным образом существенны для объективного и субъективного истолкования вероятности привело к появлению ряда его статей (276 – 279, 281), в которых он ратовал за построение более глубокого фундамента для теории вероятностей, чем обеспечиваемый укоренившимся базисом теории множеств. Позднее, в 1990-е годы, Шафер применил деревья событий, чтобы исследовать представление о причинности в теории вероятностей (283 – 285).

Собственно работа Шафера над книгой была облегчена его назначением гостевым профессором отделения компьютерных наук в коледже Ройал-Холлоуэй Лондонского университета, в котором работает Вовк. Мы оба благодарны Алексу Гаммерману, главе отделения, за его гостеприимство и поддержку нашего плана. Работе Шафера благоприятствовало также его освобождение от лекций в Ратгерском университете в 1996 – 1997 и 2000 – 2001 учебные годы. Во время первого свободного периода он смог воспользоваться гостеприимством своих коллег в Париже, Bernadette Bouchon-Meunier и Jean-Yves Jaffray (лаборатория информатики Университета Пьера и Марии Кюри – Париж 6) и Bertrand Munier (Высшая нормальная школа в Кашане, в пригороде Парижа).

В течение второго периода его поддерживал грант немецкой комиссии Фулбрайта, и он был гостем своего коллеги Ганса-Иохима Ленца в Свободном университете (Берлин). Для работы над книгой Шафер также получил грант SES – 9819116 от Фонда национальной науки США.

В работе над темами книги В. Вовк исходил из своих занятий в качестве студента, затем аспиранта А. Н. Колмогорова по его финитарному варианту мизесовского подхода к теории вероятностей, см. (319). В поздние 1980-е годы, в своих статьях о законе повторного логарифма (320, 321), он начал подходить к теории вероятностей с теоретико-игровой точки зрения. В дискуссионной статье (324) он доказывал, что теорию вероятностей следует основывать на гипотезе о невозможности системы игры, и опубликовал статью (323) о теоретико-игровом пуассоновом процессе. Появилась и его статья (329) о теоретико-игровом варианте закона больших чисел (ЗБЧ) Колмогорова, были и рукописи работ в том же направлении. Они существенно использованы в этой книге, сами же остались неопубликованными. Назовём первые доказательства теоретико-игровых вариантов центральной предельной теоремы (ЦПТ) Линдеберга (328) и Башелье (325), формулы Black – Scholes (327), а также усиленный теоретико-финансовый ЗБЧ (326).

В работе над книгой В. Вовку помогло временное членство в Center for Advanced Studies in the Behavioral Sciences (авг. 1995 – июнь 1996 г.) и краткое пребывание (17 – 22 ноября 1997 г.) в Институте Ньютона; условия для работы в обоих случаях были превосходными. Кроме того, он получил гранты Engineering and Physical Sciences Research Council GR/L 35812, GR/M 14937 и 16856 и посетил Ратгерский университет, а в начале работы его щедро поддержал Фонд международной науки Г. Сороса. Наконец, он благодарен всем своим коллегам по отделению компьютерных наук в Ройал-Холлоуэй за поддерживаемую ими научную атмосферу и бывшему главе коледжа Норману Гоуэру за административную и моральную поддержку.

Идеи, пронизывающие нашу книгу, формировались в течение нескольких десятилетий, и ни один из нас не смог бы полностью отчитаться в своих научных долгах. И всё же мы хотели бы признать, что находимся в неоплатном долгу у Фила Дейвида. С 1980-х годов он сильно повлиял на нас своей работой над тем, что он назвал предсказательной и секвенциальной структурой теории вероятностей и статистики. Мы не сохранили его терминологию, но его влияние чувствуется в книге повсюду.

Многие коллеги, с которыми мы обсуждали те или иные идеи, также повлияли на нас. С самой ранней стадии нашей работы Shashi Murthy серьёзно помог нам согласовать наши идеи с понятиями, существовавшими в финансовой литературе. Среди тех, кто особенно помог нам позднее, были Steve Allen, Nick Bingham, Bernard Bru, Kaiwen Chen, Neil A. Chris, Pierre Crépel, Joseph L. Doob, Didier Dubois, Adlai Fisher, Hans Föllmer, Peter R. Gillett, Jean-Yves Jaffray, Phan Giang, Юрий Калнишкан, Jack L. King, Eberhard Knobloch, Gabor Laszlo, Tony Martin, Nell Irvin Painter, Jan von Plato, Richard B. Scherl, Teddy Seidenfeld, J. Laurie Snell, Steve Stigler, Владимир Вьюгин, Chris Watkins and Robert E. Whaley.

1. Введение. Вероятность и финансы, понимаемые как игры

Мы предлагаем структуру теории и приложения математической вероятности, основанную более на теории игр, чем на теории множеств. Эта новая структура заслуживает внимания по чисто математическим причинам, поскольку она просто и действенно охватывает основные интуитивные представления о вероятности. Она интересна и с философской и практической точек зрения, потому что глубже проникает в суть замысла вероятности, нежели укоренившийся теоретико-множественный фундамент.

Наша структура лучше приспособлена ко многим практическим проблемам и проясняет тесную связь, существующую между теориями вероятностей и финансов. С теоретико-игровой точки зрения предлагаемая нами структура очень проста. Её самые существенные элементы были уже описаны в книге Виля (306), которая ввела мартингалы в теорию вероятностей.

Следуя Вилю, мы рассматриваем только двух игроков. Они ходят поочерёдно, ход каждого немедленно становится известным его противнику, и один из них выигрывает. В таких играх один из игроков обладает выигрышной стратегией (§ 4.6), и нам поэтому не требуются утонченные понятия решений, которые ныне находятся в центре теории игр при её приложении к экономике и другим социальным наукам.

Наша структура является простым, строгим, и не отягощённым никакими посторонними математическими или философскими добавками, развитием двух основных идей, основополагающих и для вероятности, и для финансов:

● **Принцип назначения цен посредством динамического хеджирования**. Если последовательные простые пари могут быть объединены в более сложные, то цены простых пари будут определять цены более сложных.

● **Гипотеза о невозможности системы игры.** Иногда мы предполагаем, что никакая система выбора возможных рискованных действий не может одновременно наверняка предохранять от банкротства и обладать разумным шансом обогатить нас.

Первый принцип можно заметить в письмах 1654 г. Ферма от Паскаля, с которых началась формальная история теории вероятностей. Он возродился в последней трети XX в. в качестве одного из центральных понятий финансовой теории. Гипотеза о невозможности системы игры также давно уже принималась в теории вероятностей.
Она имеет отношение к гипотезе эффективных рынков, которая изучается в теории финансов с 1970-х годов.

Мы показываем, что в строгой теоретико-игровой структуре эти две выделенные нами идеи обеспечивают достаточное математическое и философское исходное начало для вероятности и её приложений к финансовым и многим другим отраслям науки. Для того, чтобы вероятность могла появиться в математическом смысле, не требуется никаких иных средств, подобных теории множеств, и никакие дополнительные предположения или философские объяснения не нужны для её приложения к реальному миру.

Вероятность становится теоретико-игровой как только ожидаемые значения в вероятностной модели понимаются как цены в игре. Эти цены могут предлагаться воображаемому игроку, который стоит вне мира и держит пари по поводу предстоящих действий мира, или же они могут быть предложены инвестору, чьё участие в рынке означает пари о действиях рынка.

В обоих случаях мы сможем очень многое выяснить, если начнём мыслить в терминах теории игр. Многие теоремы теории вероятностей оказываются предложениями о существовании выигрывающей стратегии для игрока, который держит пари по поводу предстоящих действий мира или рынка. В этой форме теоремы оказываются проще и понятнее, и мы тогда сможем сократить число предпосылок, т. е. количество цен, которые, как мы предполагаем, будут предложены, до минимума, необходимого для верности предложений.

Эта экономность может оказаться весьма полезной на практике, потому что она допускает и поощряет ясность про предположения, которые нам необходимы и которые мы пожелаем сделать.

Установление вероятностной меры на выборочном пространстве означает назначение определенной цены для каждого неопределенного вознаграждения, определяемого в этом пространстве, по которой можно купить или продать это вознаграждение. Наша структура, однако, требует много меньше. Нам достаточно знать несколько цен, притом некоторые из них могут быть односторонними, разрешающими лишь продажу, а не покупку, или, напротив, покупку, но не продажу. Исходя из этих нескольких цен и применяя динамическое хеджирование, мы сможем установить двусторонние цены для некоторых дополнительных вознаграждений и лишь верхние и нижние цены для других.

Структуру теории вероятностей, основанную на теории множеств, в 1933 г. окончательно сформулировал А. Н. Колмогоров. Её восхваляли за философскую нейтральность; она может направлять вероятностные математические исследования вне зависимости от смысла, придаваемого вероятностям. Любые числа, удовлетворяющие аксиомам множеств, допустимо называть вероятностями, и тот, кто как-то применяет их, может считать их частотами, степенями доверия и т. д.

Наша теоретико-игровая структура равным образом допускает различные истолкования, а её большая концептуальная глубина обогащает их. Истолкование и приложение вероятностей отличаются в нашей структуре не только по источникам цен, но и в той роли, которую в ней играет гипотеза о невозможности системы игры.

Самое существенное отличие нашей структуры от теоретико-множественной заключается в её способности моделировать процессы, подверженные влияниям, которые мы не в состоянии моделировать даже вероятностно. Это свойство, как мы полагаем, может усиливать полезность теории вероятностей в тех областях, в которых наша возможность контроля и предсказания существенна, но всё же очень ограничена по сравнению с охватом детерминированной модели или теоретико-множественной вероятности.

С математической точки зрения начальным критерием пригодности структуры теории вероятностей является то изящество, с которой она позволяет формулировать и доказывать основные теоремы этой теории. Особенно это относится к классическим предельным теоремам, – к ЗБЧ и повторного логарифма и к ЦПТ.

В первой части мы показываем, как наша теоретико-игровая структура выдерживает это условие, и утверждаем, что в этом отношении она превосходит множественно-теоретическую структуру. Иногда наши теоретико-игровые доказательства мало отличаются от стандартных доказательств классической структуры, но они прозрачнее. И область приложения наших предельных теорем шире, потому что теперь они допускают учёт действий других игроков, включая экспериментаторов, специалистов, вкладчиков капитала и граждан на поступки реальности.

Они также мощнее математически, поскольку соответствующие множественно-теоретические теоремы являются их простыми следствиями. В случае ЦПТ мы, кроме того, выводим интересное одностороннее обобщение для случая, при котором имеются лишь верхние границы изменчивости отдельных уклонений.

Во второй части мы исследуем приложение нашей структуры в области финансов. Мы назвали эту часть *Финансы без вероятности* по двум причинам. Во-первых, те две идеи, основополагающие, по нашему мнению, для вероятности (принцип назначения цен посредством динамического хеджирования и гипотеза о невозможности системы игры), свойственны теории финансов, в которой они применяются в своей естественной форме без постороннего стохастического моделирования.

Во-вторых, мы утверждаем, что подобное моделирование, хоть иногда вроде бы и требуется в теории финансов, часто можно с пользой заменить дополнительным рыночным установлением цен. Впрочем, постороннее стохастическое моделирование можно включить и в нашу структуру, и в этой второй части читатель найдёт исследование процессов диффузии, являющимися стохастическими моделями, которые наиболее часто используются в финансах и ряде других областей.

Продолжая наше Введение, мы более подробно и неформально рассматриваем наши основные идеи. Мы объясняем, как динамическое хеджирование и невозможность системы игры можно выразить в терминах теории игр и как это приводит к теоретико-игровой формулировке классических предельных теорем.

Далее, мы обсуждаем разнообразные возможные приложения теоретико-игровой теории вероятностей и кратко указываем, как наша последовательная теоретико-игровая точка зрения может укрепить теорию финансов.

1.1. Игра с миром

В центре нашей структуры находится последовательная игра двух игроков. Она может состоять из многих и даже из бесконечно многих конов. В каждом из них Первый игрок держит пари по поводу будущего, после чего Второй решает, что именно произойдёт. Оба они обладают полной информацией, и каждый узнаёт о ходе противника, как только тот сделан.

Чтобы легче запомнить роли игроков, мы обычно называем их соответственно Скептиком и Миром. Эта терминология подсказана идеей проверки вероятностной теории. Скептик– это воображаемый учёный, не вмешивающийся в происходящее и проверяющий теорию повторными пари. Воображаемые ставки в них определяются ценами, которые назначает проверяемая теория. Каждый раз Мир решает, что должно произойти и как поэтому изменится воображаемый капитал Скептика. Если этот капитал слишком возрастает, теория ставится под сомнение.

Разумеется, даже вне области финансов не все приложения математической вероятности научны. Иногда цены, которые испытывает Скептик, выбраны им по наитию и не отражают никакой теории или даже взяты с потолка, но мысль о проверке научной теории неплохо служит нам в качестве руководящего примера. В случае финансов мы иногда называем наших игроков соответственно Инвестором [как раньше] и Рынком. Инвестор является настоящим игроком, он рискует реальными деньгами и каждый раз принимает решение о своих инвестициях, рынок же решает, как изменяется их стоимость, а потому и капитал Инвестора.

1.1.1. Динамическое хеджирование. Назначение цен при помощи динамического хеджирования применимо и к теории вероятностей, и к финансам, но термин хеджирование мы переняли из теории финансов. Инвестор хеджирует риск, покупая и продавая по рыночным ценам, возможно в течение некоторого времени, чтобы таким образом уравновесить риск. В некоторых случаях риск можно исключить полностью. Если, к примеру, Вкладчик имеет финансовое обязательство, которое зависит от цен на определённые ценные бумаги в какой-то будущий момент времени, он возможно в точности выполнит своё обязательство разумными последовательными инвестициями в акции до указанного срока.

Предположим для упрощения, и в этой главе, и почти во всей остальной книге, что процент на капитал равен нулю. Это упрощает и пояснения, и математические рассуждения без реальной потери общности, потому что выводимая теория легко обобщается при отказе от этого предположения, см. § 12.1.

Если для выполнения обязательства требуется начальный капитал α, мы можем сказать, что Вкладчик обладает стратегией превратить alpha в необходимую будущую выплату. Мы можем также сказать, что α есть цена выплаты в этой игре. В этом заключается принцип установления цен при помощи динамического хеджирования.

Схема 1.1

Скептик и Мир характеризуют область вероятностного, Вкладчик и Рынок – область финансов

Игрок 1 держит пари на то, что случится. **Скептик** держит пари против вероятностных предсказаний научной теории. **Вкладчик** держит пари, выбирая портфель инвестиций

Игрок 2 решает, что именно произойдёт. **Мир** решает исход предсказания. **Рынок** решает, как изменится цена каждого вложения.

В приложении к вероятности, принцип динамического хеджирования просто означает, что цены, предлагаемые каждый раз Скептику, могут быть объединены, чтобы обеспечить цены [капитал?] для выплат, которые зависят от нескольких ходов Мира. Каждый раз цены могут учитывать вероятности действия Мира, а окончательные цены могут учитывать всю последовательность игры Мира. Обычно мы предполагаем, что цены в каждом коне заданы либо в начале игры, либо в её процессе, а цены более длительных рисков выводятся. Но когда идея вероятностной игры применяется для изучения мира, цены могут иногда ошибочно выводиться в противоположном направлении ошибочным будет знак изменения цены. В этом случае [как узнать, что этот случай наступил?] принцип определения цен динамическим хеджированием становится просто принципом согласованности, который указывает нам, как в различные моменты цены должны прилаживаться друг к другу.

Мы не вводим никаких общих правил о количестве пари, которые предлагаются Скептику. Иногда ему может быть предложено заключать пари по поводу каждой детали следующего хода Мира, иногда же ему вообще ничего не будет предложено. Таким образом, наша структура всегда позволяет моделировать то, и только то, что моделирует наука.

1.1.2. Основополагающая истолковывающая гипотеза (ОИ гипотеза). В отличие от принципа динамического хеджирования гипотеза о невозможности системы игры в нашей структуре не обязательна [это противоречит предыдущему]. В § 1.3 мы объясним, что эта гипотеза сводится к предположению о том, что событие с нулевой или низкой вероятностью вряд ли произойдёт (или в более общем виде: с нулевой или низкой верхней вероятностью вряд ли произойдёт). Это предположение является основополагающим во многих приложениях теории вероятностей, потому что игра, к которой она применяется, становится теорией о мире.

Принимая эту гипотезу, мы оказываемся в состоянии проверять цены в игре. Если событие с нулевой или низкой вероятностью всё же произойдёт, мы сможем считать, что эта игра не является моделью мира. Но мы не всегда принимаем эту гипотезу, мы не нуждаемся в ней, ни когда игра происходит между Вкладчиком и Рынком, ни когда субъективно истолковываем вероятности в смысле де Финетти. Действительно, для де Финетти и других неосубъективистов субъективные цены, определяемые данным человеком, являлись лишь ценами, которые регулируют его выбор между рискованными возможностями, но не более того, см. §§ 1.4 и 2.6.

Гипотезу о невозможности системы игры мы будем также называть *основополагающей гипотезой, истолковывающей* вероятность. Она истолковывает, потому что указывает, что означают для мира цены и вероятности в игре, к которой она применяется. Она не входит в наши математические рассуждения, она остаётся вне математики и служит мостом между ней и миром.

Работая с финансами, в которых наша игра описывает реальный рынок, мы также называем нашу основную гипотезу *гипотезой эффективного рынка*.

Основополагающая истолковывающая гипотеза	
Невозможность системы игры	*Гипотеза эффективного рынка*
Реальный рынок отсутствует, деньги только воображаются, наличные не требуются	Реальный рынок существует наличные деньги должны быть установлены
Гипотеза относится к Скептику, т. е. к воображаемому игроку	Гипотеза может относиться и к Скептику, и к Инвестору, т. е. к реальному игроку

Рис. 1.1. Фундаментальная истолковывающая гипотеза в теории вероятностей и финансах

В приложении к отдельному финансовому рынку, на котором время от времени покупаются и продаются некоторые ценные бумаги, наша гипотеза утверждает, что вкладчик (реальный инвестор (называемый Вкладчиком) или воображаемый вкладчик, называемый Скептиком) не может обогатиться, не подвергаясь риску банкротства.

Для уточнения гипотезы мы должны указать не только, кого именно из них мы имеем в виду, Вкладчика или Скептика, но и единицу, в которой измеряется капитал игрока. Эта единица может быть монетарной (например, долларом или рублём), однако измерение возможно и относительно полной стоимости рынка (и тогда за единицу следует принять подходящую долю этой стоимости) или относительно лишённой риска облигации (которая в этом случае окажется единицей) и т. д.

Таким образом, гипотеза эффективного рынка может принимать различные формы, но в любом случае её следует проверять, и она определяет эмпирически значимые верхние и нижние вероятности. Примерно с 1970 г. экономисты обсуждали гипотезу эффективных рынков (во множественном числе), которая в таком случае утверждает, что финансовые рынки эффективны в общем, т. е. исключают возможность лёгкого обогащения. Во второй части книги (§ 9.4 и гл. 15) мы объясняем, что наша гипотеза эффективного рынка имеет, грубо говоря, тот же смысл и её можно проверять аналогичным образом. Но она гораздо определённее, поскольку требует указания тех ценных бумаг, которые должны обращаться на рынке, точных условий для возрастания капитала и выбора единицы его измерения.

1.1.3. Открытые системы в мире. Наша схема игры Скептика с Миром может быть дополнена весьма разнообразными способами. Одно из её важнейших свойств заключается в том, что она допускает подразделение Мира на несколько игроков, например, на троих:

Экспериментатор (который решает, о чём будет идти речь в каждом коне игры), Предсказатель (который устанавливает цены) и Реальность (которая определяет результаты).

Это разделение выявляет открытый характер нашей структуры. Принцип установления цен динамическим хеджированием требует, чтобы Предсказатель указывал согласующиеся цены, а фундаментальная истолковывающая гипотеза требует, чтобы Реальность соблюдала их. Во всём остальном все три игрока, представляющие Мир, открыты для сведений и влияний извне. Экспериментатор имеет широкие возможности при выборе эксперимента, Предсказатель может использовать информацию извне для установления цен, и на Реальность также могут повлиять непредсказуемые внешние силы, лишь бы её поступки не противоречили условиям, наложенным Предсказателем.

Многие научные модели обеспечивают проверяемые вероятностные предсказания только после установления немалого числа внешних дополнительных факторов. Присутствие Экспериментатора в нашей структуре, однако, позволяет нам весьма естественно обращаться с этими моделями. К примеру, стандартная математическая формализация квантовой механики в терминах гильбертовых пространств по Джону фон Нейману вполне возможна в нашей структуре. Учёный, который решает, что именно следует измерять, оказывается Экспериментатором, а квантовая теория является Предсказателем (§ 8.4).

Предсказание погоды представляет пример, в котором используется внешняя по отношению к модели информация. Предсказателем может быть человек или очень сложная компьютерная программа, которую не удаётся определить математически, потому что она непрестанно развивается. В любом случае Предсказатель будет использовать внешнюю информацию (карты погоды, предыдущий опыт и т. д.). Если он должен каждый вечер указывать вероятность завтрашнего дождя, Экспериментатор не нужен, и в игре участвуют только трое в следующей очерёдности

Предсказатель, Скептик, Реальность.

Предсказатель объявляет шансы завтрашнего дождя, Скептик решает, держать ли пари за дождь или против него, а Реальность решает, будет ли дождь. Фундаментальную истолковывающую гипотезу, которая утверждает, что Скептик не может обогатиться, можно проверить любой стратегией заключения пари на основе объявленных шансов.

Труднее осмыслить проблему предсказания погоды в теоретико-множественной структуре. Вероятности, объявленные Предсказателем, очевидно, следует считать здесь условными, поскольку учитывается то, что случилось ранее. Но он, как ожидается, учится на своём опыте, и притом использует весьма сложную и непредсказуемую внешнюю информацию, так что нет смысла считать его предсказания условными при заданном вначале распределении вероятностей. Он также не выстраивает этого распределения по ходу дела, ибо это означало бы установление условных вероятностей завтрашних событий не только при условии того, что произошло, но и то, что могло бы произойти.

В 1980-е годы А. Филипп Дэйвид предложил, что успех предсказания последовательности событий распределением вероятностей следует оценивать только по фактическим результатам, и последовательности предсказаний (условных вероятностей), к которым приводят эти результаты, без учёта остальных сторон этого распределения, и в этом заключается его преквенциальный (предсказательный и секвенциальный) принцип (Dawid 1984). В нашей теоретико-игровой структуре этот принцип выполняется автоматически, потому что у нас имеются только вероятности, указанные Предсказателем, и результаты, определяемые Реальностью. Пока Предсказатель не выберет стратегию, никакое распределение вероятностей даже и не определено.

Явная открытость нашей структуры обеспечивает её хорошую приспособленность к моделированию систем, открытых для влияний и сведений извне в духе непараметрических, полупараметрических и мартингальных моделей современной статистики и даже менее определённых методов предсказаний, разработанных в теории машинного обучения. Она также соответствует открытому духу современной науки, который подчёркивал Поппер (250). В XIX веке многие учёные придерживались философии детерминизма, внушённого ньютоновой физикой: в любой момент каждая будущая характеристика мира должна быть предсказуема высшим разумом, которому известны начальные условия и законы природы.

В XX веке в детерминизме серьёзно усомнились ввиду дальнейших успехов физики и особенно квантовой механики, которая теперь настаивает на том, что некоторые фундаментальные явления могут быть только вероятностно предсказаны. Специалисты по теории вероятностей иногда полагают, что это поражение позволяет вернуться к вероятностному обобщению детерминизма: наука должна предсказывать нам вероятности всего того, что может произойти. Фактически, однако, наука сегодня описывает лишь островки порядка в беспорядочной вселенной. Современные научные теории осуществляют точные вероятностные предсказания лишь о некоторых сторонах мира, и часто лишь после того, как эксперименты [какие?] были спланированы и подготовлены. Например, измерения в квантовой механике: вероятности появляются только после того, как мы решим, что и когда измерять. Теоретико-игровая структура не спрашивает большего.

1.1.4. Скептик и Мир всегда играют по очереди. Основная математическая часть этой книги была разработана для определённых примеров, и, как мы только что объяснили, во многих примерах Мир разделён на множество игроков. Важно заметить, что это подразделение не лишает смысла простую схему, в соответствии с которой Скептик и Мир играют поочерёдно, причём Скептик держит пари о поступке Мира в следующий момент. Действительно, мы продолжаем применять эту простую схему в более общих случаях и здесь, и в последующих главах.

Можно убедиться в том, что эта схема остаётся в силе, представляя, например, что Скептик принимает решения непосредственно перед каждым игроком, который представляет Мир, но что только его ход непосредственно перед Реальностью может принести ему ненулевой (возможно отрицательный) доход. Или иначе, и это окажется удобным при подразделении Мира на Предсказателя и Реальность, можно добавить Скептику один лишь фиктивный ход в начале игры, затем объединить все последующие ходы Предсказателя с предыдущими решениями Реальности, так чтобы последовательность игры стала такой

Скептик, Предсказатель
Скептик (Реальность + Предсказатель)

В любом варианте Скептик вступает в игру поочерёдно с Миром.

1.1.5. Финансовые науки. Иногда помимо Вкладчика и Рынка в игру вступают иные игроки. Финансы это не просто практика, существует и теория рынков, и при её изучении нам будет иногда необходимо включить в игру Предсказателя и Скептика. Так произойдёт в нескольких случаях в гл. 14, в которой мы предлагаем теоретико-игровое истолкование обычного стохастического исследования оценивания опционов. Предсказатель будет представлять вероятностную теорию поведения рынка, а Скептик проверять её. Напротив, в гл. 15, при изучении гипотезы эффективного рынка, роль Предсказателя выполняет Рынок Открытия, устанавливающий цены (цены открытия), по которым Вкладчик и, возможно, Скептик смогут приобретать ценные бумаги. В этом случае роль Реальности исполняет Рынок Закрытия, который решает судьбу указанных вложений.

Впрочем, на большом протяжении 2-й части, и особенно в главах 11 – 13, мы изучаем игры, в которых участвуют лишь Вкладчик и Рынок. Для нас эти рыночные игры являются важнейшими, потому что они приводят к следствиям, основанным только на структуре Рынка без обращения к какой-либо теории об эффективности рынка или стохастического поведения цен.

1.2. Протокол вероятностной игры

Полное определение игры означает уточнение разрешённых ходов (мы называем это *протоколом* игры) и правил установления победителя. Оба эти элемента могут изменяться в игре Скептика с Миром, что приведёт ко многим различным вариантам, которые мы называем *вероятностными играми*.

Протокол определяет выборочное пространство и цены (в общем случае, верхние и нижние цены) переменных.

Правила для установления победителя можно приспосабливать к той теореме, которую мы хотим доказать или к той задаче, к которой желаем применить свою структуру. В этом параграфе мы занимаемся только протоколом. Общая теория, схематично обрисованная здесь, применима к большинству игр, изучаемых в нашей книге, включая те, в которых Вкладчик заменяет Скептика, а Рынок – Мир. (Основными исключениями являются игры, используемые в гл. 13 для оценивания Американских опционов.) Более подробно эту общую теорию мы рассматриваем в главах 7 и 8.

1.2.1. Выборочное пространство. Протокол вероятностной игры определяет возможности каждого игрока, т. е. Скептика и Мира, в каждом коне. В частности, определяются полные последовательности ходов, которые может сделать Мир, т. е. *выборочное пространство* игры. Мы обозначаем его через Ω, а его элементы называем *траекториями*. Возможные ходы Мира могут зависеть от его предшествовавших ходов, но мы предполагаем, что они не зависят от ходов, сделанных Скептиком. Пари, заключаемые Скептиком, не влияют на то, что возможно в мире, хотя Мир может учитывать их при своих последующих решениях.

Рис. 1.2. Нереалистическое выборочное пространство для изменений цены ценной бумаги. Рёбра дерева представляют возможные шаги Мира (в этом случае, рынка). Вершины (ситуации) регистрируют предшествовавшие ходы Мира. Начальное положение указано символом квадрата. Концевые вершины регистрируют полные последовательности игры Мира и поэтому могут быть отождествлены с траекториями, которые образуют выборочное пространство. Этот пример нереалистичен, потому что на реальном рынке цены бумаг каждый раз могут изменяться многими, а не только двумя или тремя способами.

Мы можем представить зависимость возможных ходов Мира от его предшествовавших ходов деревом, чьи траектории образуют выборочное пространство, как показано на Рис. 1.2. Каждая вершина в дереве представляет *ситуацию*, а рёбра, расположенные сразу же справа от не-концевой ситуации, представляют возможные в тот момент ходы Мира.

На Рис. 1.2 показано лишь конечное число траекторий, и каждая заканчивается после конечного числа ходов. Мы не всегда предполагаем конечную схему, но обращаем особое внимание на случай, при котором каждая траектория заканчивается и игра оказывается *конечной*. Если длина траекторий ограничена, то мы скажем, что *горизонт игры конечен*, в противном же случае *бесконечен*.

В общем случае мы рассматриваем ситуацию (вершину в дереве) как последовательность предшествовавших ходов Мира, что пояснено в тексте к Рис. 1.2. Поэтому в конечной игре концевую ситуацию каждой траектории можно отождествить с самой траекторией. И то, и другое представляет одну и ту же последовательность ходов Мира.
В теоретико-множественной теории вероятностей функция, принимающая в выборочном пространстве действительные значения, называется *случайной величиной*. Чтобы избежать впечатления того, что мы определили вероятностную меру на выборочном пространстве, и любых других ассоциаций, которые могут быть навеяны термином *случайная*, мы называем такую функцию *переменной*. В примере Рис. 1.2 переменными являются цены на бумаги в каждый из последующих трёх дней, средняя и высшая из этих цен и т. д. Мы также применяем укоренившуюся терминологию, называя подмножество выборочного пространства *событием*.

$$(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2) \text{ переходит}$$
$$\text{в } (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2), \text{ либо в } (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2), \text{ либо в } (\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2)$$

Рис. 1.3. Образование неотрицательной (α_1, $\alpha_2 > 0$) линейной комбинации двух пари, в которых Скептик платит соответственно m_1 и m_2, чтобы получить a_1, b_1 или c_1, либо a_2, b_2 или c_2 в зависимости от того, что произойдёт.

1.2.2. Ходы и стратегии Скептика. Чтобы закончить протокол вероятностной игры, мы должны определить возможные ходы Скептика в каждой ситуации. Каждый ход – это пари, определяемое немедленно уплачиваемой ценой и доходом, зависящим от последующего хода Мира. Возможные пари могут зависеть от ситуации, но мы всегда позволяем ему комбинировать их и заключать любую долю или любое кратное любого такого пари. Мы также позволяем Скептику свободно одалживать деньги без уплаты процентов, так что он может избрать любую неотрицательную линейную комбинацию двух любых возможных пари, как это и указано на Рис. 1.3.

Мы называем протокол *симметричным*, если Скептик может заключать любые возможные пари на любой стороне. Иначе говоря, каждый раз, когда он может купить доход x за m, он может и продать x за ту же цену. Продать x за m равнозначно покупке $-x$ за $-m$ (Рис. 1.4), и поэтому симметричный протокол таков, что пари, разрешённые Скептику в каждой ситуации, образуют линейное пространство. Он может принять любую линейную комбинацию возможных пари вне зависимости от знаков коэффициентов этих комбинаций. Если пренебречь отличием между запрашиваемой и предлагаемой ценами и затратами по сделкам, протоколы, основанные на рыночных ценах, окажутся симметричными, потому что каждый может по ним и купить, и продать ценные бумаги. Протоколы, соответствующие полным вероятностным мерам, также симметричны. Но многие протоколы, изучаемые в этой книге, асимметричны.

Стратегия Скептика это план заключения пари в каждой возможной ситуации кроме конечной. Совместно с его начальным капиталом его стратегия определит его капитал в каждой ситуации, включая конечные. Задав стратегию P, которой он придерживается, и ситуацию t, мы обозначим капитал Скептика в этой ситуации при нулевом начальном капитале через $K^P(t)$. Для конечной игры мы можем также обсуждать тот капитал, который обеспечит ему его стратегия в конце игры. Поскольку мы отождествляем каждую траекторию с её окончательной ситуацией, мы можем обозначить конечный капитал Скептика через $K^P(\xi)$, если только он следует стратегии P, а Мир выбирает траекторию ξ.

Рис. 1.4. Риск № 1 означает уплату m и получение взамен a, b или c. Риск № 2 означает получение m с уплатой a, b или c, т. е. уплаты $-m$ и получение $-a$, $-b$ или $-c$.

Табл. 1.2

Как стратегия P в вероятностной игре может симулировать покупку или продажу переменной x

1. Покупка x за α. Чистый доход $(x - \alpha)$ был удовлетворительно представлен стратегией P, если $K^P \geq x - \alpha$.
2. Продажа x за α. Чистый доход $(\alpha - x)$ был удовлетворительно представлен стратегией P, если $K^P \geq \alpha - x$.

1.2.3. Верхние и нижние цены. Придерживаясь различных стратегий в вероятностной игре, Скептик может симулировать покупку и продажу переменных. Это позволяет нам устанавливать цену переменных, а чтобы яснее пояснить эту мысль, мы предположим для упрощения, что игра конечна.

Стратегия удовлетворительно симулирует сделку для Скептика, если она приводит по меньшей мере к столь же высокому чистому доходу. Табл. 1.2 показывает, как это применяется к покупке и продаже переменной x. Именно, P удовлетворительно представляет покупку x за α, если $K^P \geq x - \alpha$. Это означает, что

$$K^P(\xi) \geq x(\xi) - \alpha$$

для каждой траектории ξ выборочного пространства Ω. Если Скептик отыскал стратегию P, удовлетворяющую неравенству $K^P \geq x - \alpha$, мы скажем, что он *может купить* x за α. Аналогично, если он отыскал стратегию P, удовлетворяющую неравенству $K^P \geq \alpha - x$, мы скажем, что он *может продать* x за α. Таковы две стороны одной и той же монеты: продать x за α равносильно покупке $-x$ за $-\alpha$.

Пусть дана переменная x. Мы обозначаем

$$\overline{\mathrm{E}}x := \inf\{\alpha \mid \text{существует стратегия } P\text{, такая что } K^P \geq x - \alpha\}. \quad (1.1)$$

Символ := означает *равно по определению*; правая часть уравнения является определением левой части. Мы называем

$\overline{\mathrm{E}}x$ *верхней ценой* x или *стоимостью* x. Это – наименьшая цена, по которой Скептик может купить x. Мы не ввели, и не будем вводить никаких предположений компактности о протоколе, и нижняя грань в (1.1) может и не быть достигнута. Строго говоря, мы лишь уверены в том, что Скептик может купить x за $\overline{\mathrm{E}}x + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Было бы, однако, утомительно указывать это каждый раз, и мы просим читателя позволить нам небольшое искажение, появляющееся при утверждении, что $\varepsilon = 0$.

Аналогично, мы получаем

$$\underline{\mathrm{E}}x := \sup\{\alpha \mid \text{существует стратегия } P\text{, такая что } K^P \geq \alpha - x\}. \quad (1.2)$$

$\underline{\mathrm{E}}x$ мы называем *нижней ценой* x; она же – высшая цена, по которой Скептик может продать x.

Из (1.1) и (1.2), а также и непосредственно ввиду того, что продажа x за α равносильна покупке $-x$ за $-\alpha$, для каждой переменной x следует, что

$$\underline{\mathrm{E}}x = -\overline{\mathrm{E}}[-x].$$

Идея хеджирования предоставляет возможность иного истолкования верхних и нижних цен. Если мы обязаны уплатить какую-то сумму после окончания игры, то мы сможем хеджировать, покупая и продавая таким образом, чтобы в любом случае покрыть своё обязательство. Мы скажем, что стратегия P хеджирует обязательство y, если для каждой траектории ξ выборочного пространства Ω

$$K^P(\xi) \geq y(\xi). \quad (1.3)$$

Продажа переменной x за α приводит к концу игры к обязательству $(x - \alpha)$ в чистом виде. Но P хеджирует продажу, если хеджирует это обязательство. Иначе, P хеджирует продажу x за α, если симулирует покупку x за α. Аналогично, P хеджирует покупку x за α, если симулирует продажу x за α. Итак, $\overline{\mathrm{E}}x$ есть низшая цена, при которой можно хеджировать продажу x, а $\underline{\mathrm{E}}x$ – высшая цена, при которой можно хеджировать покупку x, как указано в Табл. 1.3.

Эти определения косвенно указывают, что Скептик находится в начале игры в исходной ситуации □. Впрочем, их можно применить к любой другой ситуации, и тогда мы будем рассматривать стратегию игры Скептика, начиная с этой ситуации. Для ситуации t мы запишем верхнюю и нижнюю цены переменной x в виде $\overline{\mathrm{E}}_t x$ и $\underline{\mathrm{E}}_t x$.

Таблица 1.3

Верхняя и нижняя цены, описанные в терминах симуляции и хеджирования. Поскольку хеджирование продажи x равносильно симулированию покупки x и наоборот, эти два описания тождественны

1. $\overline{\mathrm{E}}x$. Верхняя цена x, т. е. неизменная цена, по которой Скептик может купить x (описание в терминах симулирования покупки и продажи). Она же неизменная цена продажи x, которую Скептик может хеджировать (описание в терминах хеджирования)

2. $\underline{\mathrm{E}}x$. Нижняя цена x, т. е. наибольшая цена, по которой Скептик может продать x. Она же наибольшая цена покупки x, которую Скептик может хеджировать.

Верхняя и нижняя цены интересны только в том случае, если пари, предложенные Скептику, не дают ему возможности верного дохода. Если это условие выполнено в ситуации t, мы скажем, что протокол *непротиворечив* в t, и тогда для каждого x

$$\underline{\mathrm{E}}_t x \le \overline{\mathrm{E}}_t x,\ \overline{\mathrm{E}}_t \mathrm{O} = \underline{\mathrm{E}}_t \mathrm{O} = 0.$$

Здесь O – переменная с нулевыми значениями на каждой траектории в Ω.

Если $\underline{\mathrm{E}}_t x = \overline{\mathrm{E}}_t x$, мы назовём их общее значение *точной ценой*, или проще *ценой* x в t и обозначим её через $\mathrm{E}_t x$. Такие цены обладают свойствами ожидаемых значений в теоретико-множественной теории вероятностей. Впрочем, мы избегаем термина *ожидаемое значение*, чтобы не возникло предположение о том, что мы определили вероятностную меру в нашем выборочном пространстве. Тем не менее, мы применяем слово *дисперсия*. Если $\mathrm{E}_t x$ существует, то

$$\overline{\mathrm{V}}_t x := \overline{\mathrm{E}}_t (x - \mathrm{E}_t x)^2 \text{ и } \underline{\mathrm{V}}_t x := \underline{\mathrm{E}}_t (x - \mathrm{E}_t x)^2$$

являются *верхней* и *нижней дисперсиями* x в t. Если эти величины совпадают, мы обозначим их общее значение через $\mathrm{V}_t x$ и назовём его (теоретико-игровой) *дисперсией* x в t.

Если игра не является конечной, определения (1.1), (1.2) и (1.3) не имеют смысла, потому что P может и не определять конечного капитала Скептика, коль скоро Мир выберёт бесконечную траекторию. Если на траектории ξ нет конечной ситуации, то $K^P(t)$ не будет непременно стремиться к определённому значению при движении t вдоль ξ. Из нескольких возможных способов формулировки этого предложения мы предпочитаем простейшее: мы скажем, что P хеджирует y, если на каждой траектории ξ капитал $K^P(t)$ в конце концов достигает $y(\xi)$ и остаётся равным этой величине или превосходит её, и мы аналогично видоизменяем (1.1) и (1.2).

Это определение мы изучаем в § 8.3. В целом, для бесконечных вероятностных игр мы сравнительно мало применяем верхние и нижние цены, но, как разъясняется в следующем параграфе, мы уделяем особое внимание одному специальному случаю, при котором вероятности равны в точности 0 или 1.

1.3. Основополагающая истолковывающая гипотеза

Она утверждает, что у Скептика нет такой стратегии, которая позволила бы ему наверняка избежать банкротства и в то же время получить разумный шанс обогатиться. Этот неопределённый термин *разумный шанс* означает, что наша основополагающая гипотеза не является математической; она и не аксиома, и не теорема, а скорее истолковывающее утверждение. Она придаёт общепонятную значимость ценам в вероятностной игре.

Раз у Скептика нет подобного шанса существенно умножить свой начальный капитал, мы можем указать другие правдоподобные и неправдоподобные события и составить шкалу их правдоподобности или неправдоподобности. Событие неправдоподобно, если его появление обеспечивает Скептику благоприятную возможность существенно умножить свой начальный капитал, и тем более неправдоподобно, чем существеннее оказывается это умножение. Мы воспользуемся двумя вариантами указанной гипотезы, *конечным* и *бесконечным*.

● Конечная (финитарная) гипотеза. Она была сформулирована выше. Умножение капитала понимается как умножение исходного капитала Скептика на большой множитель. Этот вариант мы обычно применяем в конечных играх.

● Бесконечная (инфинитарная) гипотеза. Умножение капитала понимается как бесконечное (инфинитарное) умножение исходного капитала Скептика. В остальном же формулировка та же. Этот вариант мы обычно применяем в играх с бесконечным горизонтом.

Наше понимание мира конечно, и поэтому финитарная гипотеза полезнее, однако инфинитарная гипотеза часто позволяет яснее и изящнее формулировать математические утверждения.

В первой части книги мы покажем, что оба варианта ведут соответственно к двум типам классических предельных теорем, а именно, первая – к слабым вариантам ЗБЧ и ЦПТ, а вторая – к их усиленным вариантам и к закону повторного логарифма.

Миру нетрудно удовлетворить основополагающую истолковывающую гипотезу в вероятностной игре с согласованным протоколом. Действительно, его ходы могут неизменно лишать Скептика какого-либо дохода. Обогащение, однако, не является единственной целью Скептика. Во многих играх он выигрывает, *либо* если обогащается, *либо* если действия Мира удовлетворят какому-либо другому условию G. Если Скептик отыскал выигрышную стратегию в подобной игре, то наша ОИ гипотеза позволяет заключить, что G действительно произойдёт, потому что действия Мира не должны допустить обогащения Скептика.

1.3.1. Нижняя и верхняя вероятности. В своей финитарной форме основополагающая гипотеза придаёт значимость малым верхним и большим нижним вероятностям. Формально определить эти вероятности мы сможем, как только сформулируем понятия о верхних и нижних ценах.

Выше было указано, что *событие* есть подмножество [подпространство] выборочного пространства. И для события G мы определяем его *индикаторную переменную* I_G равенствами

$\mathrm{I}_G(\xi) := 1$, если $\xi \in G$ и равно 0 в противном случае.

И теперь мы определим верхнюю *и нижнюю* вероятности E равенствами

$$\overline{\mathrm{P}}G := \overline{\mathrm{E}}\mathrm{I}_G,\ \underline{\mathrm{P}}G := \underline{\mathrm{E}}\mathrm{I}_G. \qquad (1.4, 1.5)$$

Если предположить, что протокол согласован, то эти вероятности будут удовлетворять неравенствам

$$0 \le \underline{\mathrm{P}}G \le \overline{\mathrm{P}}G \le 1,\ \underline{\mathrm{P}}G = 1 - \overline{\mathrm{P}}G^{\mathrm{C}}. \qquad (1.6, 1.7)$$

Рис. 1.5 [которого у меня нет]. Лишь экстремальные вероятности значимы сами по себе

Здесь G^{C} есть *дополнение* G в Ω, т. е. множество траекторий Мира, не входящее в G, или событие, заключающееся в том, что G не происходит [*непоявление*] Е. Какую значимость могут иметь $\overline{\mathrm{P}}G$ и $\underline{\mathrm{P}}G$? ОИ гипотеза отвечает на этот вопрос, если оба эти числа очень близки к нулю. Пусть $\overline{\mathrm{P}}G = 0{,}001$. Тогда $\underline{\mathrm{P}}G$ тоже близко к нулю; в соответствии с формулой (1.6) оно заключено в интервале между 0 и 0,001. Это означает, что Скептик может купить I_G за 0,001. Но $\mathrm{I}_G \ge 0$, и эта покупка не приведёт к возможности банкротства, а в то же время его вклад возрастает тысячекратно, если только G произойдёт.

Но ОИ гипотеза утверждает, что подобное умножение неправдоподобно, и, следовательно, что и G также неправдоподобно. Аналогично можно утверждать, что появление G весьма [в предыдущей фразе не было "весьма"] правдоподобно, если $\underline{\mathrm{P}}G$, а потому и $\overline{\mathrm{P}}G$ очень близко к 1. Действительно, если $\underline{\mathrm{P}}G$ близко к 1, то в соответствии с формулой (1.7) $\overline{\mathrm{P}}G^{\mathrm{C}}$ близко к 0, так что G^{C} неправдоподобно, а появление G правдоподобно.

Всё это сведено воедино на Рис. 1.5. Если ни $\overline{\mathrm{P}}G$, ни $\underline{\mathrm{P}}G$ не близки ни к 0, ни к 1, как это указано на этом рисунке справа, они, взятые по отдельности, не имеют или почти не имеют никакого значения. Но если обе они близки к 0, можно будет сказать, что G обладает *низкой вероятностью* и вряд ли произойдет. Напротив, если обе они близки к 1, можно будет сказать, что вероятность G *высока*, и что его появление правдоподобно.

Строго говоря, нам следует говорить о вероятности G только если $\underline{\mathrm{P}}G$ и $\overline{\mathrm{P}}G$ в точности совпадают, ибо тогда их общее значение можно будет назвать (теоретико-игровой) вероятностью G. Но, как показывает Рис. 1.5, гораздо более значимо, если эти величины близки к 0 или 1.

Важнейшие примеры низкой и высокой вероятности в нашей книге имеют место в слабом ЗБЧ и слабой ЦПТ, которые мы изучаем в главах 6 и 7. В простейшей форме первый из них, слабый ЗБЧ, утверждает, что если Скептику предлагается играть на равных в каждой длинной последовательности событий [ни здесь, ни ниже нет *испытаний*], то с высокой вероятностью частость появления событий окажется в узком интервале по обе стороны от 1/2, который может быть укорочен с возрастанием числа событий. ЦПТ количественно оценивает эту высокую вероятность. В соответствии с нашим определением высокой вероятности, эти теоремы что-то сообщают о возможности обогащении Скептика. ЗБЧ утверждает, что он обладает выигрышной стратегией в игре, которую он выиграет, если Мир останется вблизи 1/2 или позволит Скептику существенно умножить ставку, а ЦПТ установит шкалу различных вариантов уравновешивания отдаления Мира от 1/2 с возможными ограничениями состояния Скептика.

Средние значения вероятности, хоть и не значимы сами по себе, могут оказаться совместно значимыми ввиду предельных теорем. ЗБЧ, к примеру, указывает, что многие вероятности последовательного появления событий, все равные 1/2, приводят к очень высокой вероятности того, что частость их появления будет стремиться к 1/2.

1.3.2. Вероятности, равные 0 и 1. Мы только что подчеркнули, что финитарный вариант нашей основополагающей гипотезы придаёт значимость вероятностям, весьма близким 0 или 1. Скептик вряд ли сильно обогатится, и поэтому появление события с очень низкой вероятностью маловероятно. Инфинитарный вариант гипотезы уточняет это утверждение, придавая значимость вероятностям, в точности равным 0 или 1. Скептику практически невозможно стать бесконечно богатым, и поэтому событие, которое всё-таки приводит к этому, практически наверняка не произойдёт.

Формально мы скажем, что событие *G практически невозможно*, если Скептик, начав с каким-то конечным положительным капиталом, устанавливает стратегию, которая обеспечивает ему, что

● Его капитал не окажется отрицательным (он не обанкротится)

● Если произойдёт *G*, его капитал неограниченно умножится (он станет бесконечно богат)

Мы скажем, что событие *G практически достоверно*, или что оно произойдёт *почти наверняка*, если его дополнение G^{C} практически невозможно. Из этих определений немедленно следует, что практически невозможное событие имеет нулевую верхнюю (а потому и нижнюю) вероятность и что практически достоверное событие имеет нижнюю (а потому и верхнюю) вероятность 1 (§ 8.3).

Размер начального капитала Скептика, если только он положителен, не имеет значения для определения практической достоверности и практической невозможности. Если стратегия *P* позволит добиться того, что от неё требуется при начальном капитале *a*, то стратегия $(b/a)P$ добьётся того же при его начальном капитале *b*. Требование того, чтобы капитал Скептика не стал отрицательным, равносильно тому, что ему запрещено одалживать деньги. Действительно, если он начнёт рисковать ими, Мир сможет обанкротить его. Фактически, однако, не то, чтобы Скептик не мог никогда одалживать деньги, но что его долг должен быть ограниченным. Работая с начальным капиталом a совместно с одолженными средствами, не превышающими b, равносильно работе с исходным капиталом $(a + b)$.

В главах 3, 4 и 5 показано, что эти определения позволяют сформулировать и доказать теоретико-игровые варианты классических усиленных предельных теорем, – усиленного ЗБЧ и закона повторного логарифма. В своей простейшей форме первый из них утверждает, что если Скептику предлагается держать пари на равных по поводу каждого из бесконечной последовательности событий, доля происходящих событий будет почти наверняка стремиться к 1/2. Закон повторного логарифма укажет наилучшую возможную границу скорости этого стремления.

1.3.3. За пределами [Уход от] частостей. В гл. 2 мы довольно подробно разъясним, что ЗБЧ совместно с эмпирической философией XIX и раннего XX в. привёл к широкому распространению убеждения в том, что теория вероятностей должна быть основана на понятии относительной частоты. Пусть проделывается большое число независимых испытаний над событием с вероятностью появления p. Тогда в соответствии с ЗБЧ оно произойдёт и не произойдёт в соотношении $p/(1 - p)$. Так будет либо для всех испытаний, либо для каждого второго из них, либо только для какой-либо иной заранее выбранной подпоследовательности. Так представлялось основное эмпирическое значение вероятности. Почему же тогда не обратить эту теорию, как предложил Рихард фон Мизес в 1920-е годы и не заявить, что вероятность это просто относительная частота, инвариантная относительно выбора подпоследовательности?

Оказалось, что он ошибался, подчёркивая частость за счёт иных статистических закономерностей. Предсказания теории вероятностей о последовательности событий вовсе не следуют из инвариантной сходимости относительной частоты. В конце 1970-х годов Жан Виль указал весьма примечательный и решающий пример предсказанного законом повторного логарифма по поводу скорости и колебаниях сходимости. Теорию Мизеса после этого заменила теория алгоритмической сложности, которая исследует свойства последовательностей, чья сложность затрудняет их предсказание, причём инвариантность относительных частот является лишь одним из многих таких свойств.

В теоретико-множественной теории вероятностей выдающееся положение частости также значительно снизилось. Центральным объектом изучения когда-то были независимые и одинаково распределённые случайные величины, теперь же мы изучаем случайные процессы, в которых вероятности событий сложным образом зависят от предшествовавших исходов. Соответствующие модели иногда предсказывают частости, однако не соотносят частость к единой вероятности, а могут предсказывать, что она будет стремиться к среднему из последовательных вероятностей. В общем, упор сместился с сумм независимых случайных величин к мартингалам.

Уже несколько десятилетий назад специалисты по математической вероятности ясно поняли, что основополагающими объектами для них являются мартингалы. Впрочем, таковыми они остаются лишь в теоретико-множественной теории вероятностей. Наша теоретико-игровая структура начинается с фундаментальных понятий и мартингалы появляются в самом начале наших рассуждений, потому что для Скептика они оказываются capital processes. [Это непонятно, притом противоречит предыдущему утверждению о роли мартингалов.]

ОИ гипотеза в применении к определённому неотрицательному мартингалу утверждает, что поведение Мира сохранит ограниченность мартингала, а многие последующие предсказания включают сходимость относительных частот.

1.4. Различные истолкования вероятности

При современных философских обсуждениях часто выделяются два широких класса вероятности

● *Объективная вероятность*, описывающая частости и иные закономерности мира

● *Субъективная вероятность*, описывающая действительные или предполагаемые предпочтения данного лица при рискованных действиях

Наша теоретико-игровая структура, в которой есть место для обоих этих классов, углубляет их понимание, а кроме того предоставляет и иные возможности.

1.4.1. Три основные истолкования. С нашей точки зрения имеет смысл различать три основных метода приложения понятия вероятностной игры, которые отличаются друг от друга установлением цен, равно как и ролью ОИ гипотезы, см. Табл. 1.4.

Табл. 1.4. Три класса вероятностных игр

1. Игры о статистической закономерности. Цены назначаются на основе этих закономерностей. ОИ гипотеза принимается

2. Игры об убеждениях. Цены назначаются личным выбором рискованных действий. ОИ гипотеза не принимается

3. Игры о рынке. Цены назначаются рынком ценных бумаг. ОИ гипотеза не обязательна

Игры о статистической закономерности выражают объективное понятие вероятности в соответствии с нашей структурой. Риски, предлагаемые Скептику, могут быть выведены из научной теории, из ранее наблюдённых частостей или в соответствии с каким-либо довольно скверно понятым методом предсказания. В любом случае мы принимаем ОИ гипотезу, и статистическая закономерность становится окончательным судьёй. Именно, цены и вероятности, определённые рисками, которые предлагаются Скептику, должны быть утверждены опытом. Мы полагаем, что события, которым приписаны небольшие верхние вероятности, не происходят и что цены отражаются в средних значениях [чего?]

Игры об убеждениях вносят в нашу структуру понятие неосубъективной вероятности. Они могут применять научные теории или статистические закономерности, чтобы определять предлагаемые каждый раз риски (gambles). Однако, включение этих рисков (gambles) в игру происходит ввиду какого-нибудь личного обязательства применять их для упорядочивания и выбора риска (risks). Лицо, принявшее на себя это обязательство, не признаёт ОИ гипотезы и поэтому назначенные им цены не могут быть искажены тем, что произойдёт в действительности. Верхние и нижние цены и вероятности в таких играх не являются гипотезами данного лица о будущем, они лишь указывают выбираемые им риски. Низкая вероятность не означает его убеждения в том, что соответствующее событие не произойдёт, а лишь его желание держать крупные пари против этого.

Игры о рынке выделяются по источнику принимаемых ими цен, которые определяются спросом и предложением на некотором рынке. Мы можем принять гипотезу об эффективности этого рынка, но это не обязательно. В первом случае мы сможем проверить эту гипотезу или применить её для вывода различных следствий (см., например, обсуждение рынков в § 3.3). Даже если мы не примем её хотя бы временно, игра может оказаться полезной в качестве основы для понимания хеджирования рыночных рисков.

Наше понимание объективной и субъективной вероятности в терминах вероятностных игр не соответствует их обычным объяснениям, поскольку мы подчёркиваем опыт последовательных событий. Объективная вероятность часто понимается в терминах совокупности, элементы которой не обязательно исследуются по порядку, и большинство изложений понятия субъективной вероятности подчёркивают согласованность мнения данного лица о различных событиях вне зависимости от того, как эти последние могут быть расположены во времени.

Однако, мы воспринимаем мир во времени, и поэтому теоретико-игровая структура обеспечивает ценное интуитивное понимание обоих понятий, – объективной и субъективной вероятности. Объективная вероятность может быть проверена лишь во времени, и мысль о вероятностной игре неизменно навязывается как только мы захотим понять процесс проверки. Опыт, предвосхищённый субъективными вероятностями, тоже должен быть упорядочен во времени, и вероятностные игры оказываются естественной средой, в которой можно понять, как эти вероятности изменяются по мере накопления нашего опыта.

1.4.2. Двумерные истолкования. На самом деле приложения и истолкования вероятности весьма разнообразны, – настолько различны, что, как мы полагаем, большинство читателей не будут удовлетворены ни стандартным различием между объективной и субъективной вероятностью, ни столь же ограничительными подразделениями Табл. 1.4.

Более гибко подразделить различные возможности применения математической идеи вероятностной игры можно по двум направлениям (измерениям): источник назначения цен; отношение к ОИ гипотезе, см. Рис. 1.6.

Рис. 1.6 [у меня его нет]. Указание некоторых типичных методов приложения и истолкования вероятностной игры, расположенных в двух измерениях

В качестве примера научной теории, которая достаточно подкрепляет эту гипотезу, мы выбрали квантовую механику. С теоретико-множественной точки зрения она иногда выглядит необычно, поскольку измерения, выбранные наблюдателем, влияют на её вероятностные предсказания, а также и потому, что её различные возможные предсказания, высказанные до выбора измерения [теперь единственное число], не могут быть выражены достаточно просто в терминах единой вероятностной меры.

Однако, с нашей теоретико-игровой точки зрения эти черты являются не аномальными, а исходными для теорий подобного типа. Ни одна научная теория не может подкреплять вероятностные предсказания без протокола [демаркации? Указания правил взаимодействия на границе?] общей [нужно ли "общей?"] границы между предсказываемым явлением и различными наблюдателями, инспекторами и другими внешними лицами, которые стремятся привести это явление в соответствие с теорией и удерживать его в этом состоянии.

Статистическое моделирование, статистические проверки и оценки, применяемые во всех естественных и социальных науках, показаны на Рис. 1.6 в строке *наблюдённые закономерности*. Мы обсуждаем закономерности, а не частости, потому что эмпирические данные, на которых основаны статистические модели, обычно слишком сложны и не могут быть сведены воедино частостями при тех же ? или переменных обстоятельствах.

Мы уже отметили, что ОИ гипотеза не имеет отношения к неосубъективному понятию вероятности, потому что данное лицо не обязано заботиться о том, удовлетворяют ли её выбранные им субъективные вероятности и цены. С другой стороны, это лицо может предположить, что эти вероятности и цены всё же удовлетворяют указанной гипотезе, причём это его убеждение может означать всё, от *рабочей гипотезы* до *достаточно подкрепляемого*.

Вероятности, применяемые при исследовании решений и предсказаниях погоды, могут оказаться в любой точке этого диапазона. Но мы должны принять во внимание и другое измерение, не показанное на Рис. 1.6: чьё познание послужило основой для принятия ОИ гипотезы? Отдельный человек может предложить лицам равной с ним квалификации пари на таких условиях, на которые он не хотел бы соглашаться, имея дело с более знающими людьми.

Наконец, нижняя строка Рис. 1.6 перечисляет некоторые приложения вероятностных игр в финансах. К этому вопросу мы вскоре вернёмся.

1.4.3. Обычное стохастическое мышление. Перечисляя различные пути приложения теории вероятностей, мы не упомянули изучения стохастических мезанизмов, которые порождают природные явления. Наша структура не поощряет подобных рассуждений, хоть они и весьма распространены. Что означает стохастический механизм? Как понимать предположение, что некоторое явление, например, погода в определённом месте и в определённый час порождена случаем в соответствии с некоторой вероятностной мерой? Учёные и статистики, которые применяют теорию вероятностей, часто неловко отвечают на этот вопрос нелепой метафорой: Чтобы решить, какая будет погода, полубог подбрасывает монету или вытаскивает карту из колоды, а наша задача установить, какова неправильность монеты или пропорция карт различного вида в колоде, см., например, (23, с. 5).

Поппер (250) заявил, что объективную вероятность следует понимать как *склонность* некоторых физических систем производить определённые результаты. Исследователи, которые упоминают стохастические механизмы, иногда ссылаются на философские источники о склонностях, но чаще просто принимают, что теоретико-множественная структура разрешает подобные рассуждения. Она разрешает нам применять вероятностные меры для моделирования мира, но что именно она может моделировать кроме стохастического механизма, – как бы колеса рулетки, выдающего случайные результаты?

Идея вероятностной игры поощряет несколько иное понимание. Пусть игрок, который определяет её исход, не обязательно подбрасывает монету или вытаскивает карту; можно начать, не имея полной вероятностной меры, с неправильной монеты или нестандартной колоды карт. Поэтому найдётся место для идеи о том, что моделируемое явление может обладать лишь ограниченными закономерностями, что позволяет установить цены только для некоторых из его неопределённостей.

Метафора, в соответствии с которой поток событий определяется случаем, заставляет статистиков предполагать полные вероятностные меры изучаемого явления и расширить и усложнить их, как только эмпирические данные станут противоречить их деталям. Но наша метафора с произвольным определением исходов в пределах ограничений, наложенных некоторыми ценами, поощряет минималистскую философию. Мы можем установить только те цены, которые полагаем достаточно обоснованными и отказаться от некоторых из них вместо установления новых, если они будут эмпирически опровергнуты.

Впрочем, мы применяем некоторые термины обычного стохастического мышления, хоть в других случаях избегаем их. К примеру, мы иногда говорим, что явление управляется вероятностной мерой или каким-либо более умеренным набором цен. Это приемлемо в нашей структуре, потому что правительство устанавливает только пределы или общие направления, но не определяет все детали. В наших играх Реальность в этом смысле управляется ценами, объявленными Предсказателем. Они устанавливают пределы, которые Реальность обязана соблюдать, чтобы Скептик не обогатился. В гл. 14 мы объясним смысл подобного управления Реальности стохастическими дифференциальными уравнениями.

1.5. Теоретико-игровая вероятность в финансах

В нашем подробном исследовании теории финансов в части 2 книги мы рассматриваем минималистскую философию вероятностного моделирования. Финансы являются для этого особо обещающей сферой, потому что они начинаются с обильного потока цен, – рыночных цен различных ценных бумаг, – который мы можем как-то использовать не предполагая ничего о других ценах, основанных на наблюдённых закономерностях или теории.

Мы исследуем два различных пути. Тот, на котором мы проводим основное время, приводит нас к оцениванию опционов. На другом пути мы исследуем гипотезу о том, что рыночные цены эффективны, т. е., что вкладчик не может сильно обогатиться по отношению к рынку [?], не рискуя обанкротиться. Эта гипотеза широко применяется в литературе, но неизменно в сочетании со стохастическими предположениями. Мы показываем, что они нужны не всегда, – к примеру, что эффективность рынка сама по себе может обосновать совет удерживать рыночный портфель.

Эту вводную главу мы заканчиваем кратким предварительным описанием нашего подхода к оцениванию опционов и некоторыми комментариями к тому, как наша структура обращается с непрерывным временем. Более подробное введение ко второй части книги приведено в гл. 9.

1.5.1. Трудность оценивания опционов. В последние несколько лет мировой рынок производных ценных бумаг (будущих платежей, зависящих, к примеру, от будущей стоимости ценных бумаг или бон, или будущей процентной ставки, или будущего валютного курса) взрывчато расширился. Общая номинальная стоимость сделок на нём превысила полную стоимость товаров и услуг всего мира. Многие из этих сделок являются обусловленными обменами, и стоимость нормированных производных бумаг определяется в них спросом и предложением. Однако, более значительным оказался объём не зарегистрированных заранее сделок [покупок?] производных бумаг, непосредственно осуществляемых отдельными лицами и корпорациями у инвестиционных банков и других финансовых посредников.

В таких случаях обе стороны как правило хеджируют свои сделки. Отдельное лицо или корпорация покупает производные бумаги, чтобы хеджировать риск, возникающий в процессе своей текущей деловой активности. Эмитент производных ценных бумаг (например, инвестиционный банкир), покупает и продаёт другие финансовые инструменты, чтобы хеджировать риск от продажи производных бумаг. Стоимость этого хеджирования определяет стоимость последних.

Основная часть сделок по производным бумагам состоит из фьючерсов, сделок на установленный срок [в чём различие ?] и свопов (обменов активами или обязательствами), платежи по которым линейно зависят от будущих рыночных цен существующих на тот момент ценных бумаг или валют. Эти производные бумаги обычно хеджируются без учёта вероятностей (Hull 154). Есть, впрочем, и широкий рынок опционов, платежи по которым нелинейно зависят от будущих цен.

Опцион должен хеджироваться динамически вплоть до срока его оплаты. В соответствии с установившейся теорией успех здесь зависит от стохастических предпосылок. Некоторые недавние статистические данные о суммарных продажах различных видов производных бумаг см. в (Francis et al, 2000, с. xii). Для читателей, ещё не знакомых с опционами, могут быть полезны искусственные примеры Рис. 1.7. В обоих примерах мы рассматриваем бумаги, которые сегодня продаются по 8 долл. за акцию, но завтрашняя цена которых либо опустится до 5, либо поднимется до 10 долл., либо, в примере 2, останется той же.

Допустим, что вы желаете приобрести опцию на завтрашнюю покупку 50 акций по сегодняшней цене. Если после покупки цена акции поднимется, вы заработаете 2 доллара на каждой акции, а всего 100 долл. Сколько же следует заплатить сегодня за акцию? Какова сегодняшняя цена платежа x, который будет стоить либо 100 долл., либо вообще ничего? В пояснении к Рис. 1.7 сказано, что в примере 1 x стоит 60 долл, ибо это цена может быть в точности хеджирована. Там сказано не так или во всяком случае недостаточно ясно Однако, в примере 2 никакая цена x не может быть в точности хеджирована.

В примере 1 хеджирование опциона возможно потому, что платёж по нему фактически является линейной функцией цены бумаг. Если эта цена может принять лишь два значения, любая её функция линейна [непонятно] и поэтому может быть хеджирована [это просто повтор предыдущего]. В примере 2 таких значений 3 и платёж за опцион нелинеен. [Опять непонятно.] На реальном рынке цена бумаг в какой-то будущий момент находится в некотором диапазоне, так что имеется множество нелинейных производных бумаг [?], которые нельзя оценивать хеджированием самими акциями без дополнительных предположений.

Рис. 1.7. На нём схематично показано два примера. В первом из них сегодняшняя цена акции 8 долл. завтра оказалась равной либо 5, либо 10 долл. и, соответственно, $x = 0$ или 100 долл. Во втором примере при той же сегодняшней цене завтрашняя оказалась равной 5, 8 или 10 долл. и соответственно $x = 0$, 0 и 100 долл.

В пояснении к рисунку указано, что в обоих примерах нам интересно узнать сегодняшнюю цену производных ценных бумаг x. В примере 1 x имеет определённое значение $\mathrm{E}x = 60$. [Нигде не было обозначения Ex. А как получено 60?] Эта цена может быть в точности хеджирована покупкой 20 акций. Тогда потеря 3 долл. на каждой ничего не оставит от 60, но если цена поднимется до 10 долл., выигрыша в 2 долл. на акцию как раз хватит, чтобы добавить недостающие 40 долл. и получить платёж 100 долл.

В примере 2 никакая цена x не может быть точно хеджирована. Вместо этого мы имеем $\overline{\mathrm{E}}x = 60$ и $\underline{\mathrm{E}}x = 0$. Мы снова подчеркнём, что оба примера нереальны. Всамделишный финансовый рынок предоставляет целый диапазон возможностей, а не только две или три, изменения цены ценных бумаг в течение одного лишь периода торговли.

Диапазон возможных значений может быть получен последовательностью бинарных ответвлений. Этот факт можно сочетать с идеей динамического хеджирования, см. Рис. 1.8, что приведёт нас к обманчиво простому решению. Решение настолько просто, что мы можем невольно вообразить себе какой-то теневой рынок, более быстрый и более ликвидный, чем настоящий, в котором изменения цен бумаг действительно бинарны, но приводят к менее ограниченным изменениям как и в медленнее работающем настоящем рынке. Эта идея, однако, к сожалению неосуществима, потому что хеджировать можно лишь на всамделишном рынке. На нём, пока мы удерживаем свои акции, многие цены могут измениться, и поэтому мы никогда не сможем точно хеджировать. В лучшем случае нам удастся хеджировать так, чтобы оказаться успешными в среднем и полагаться на уравновешивание ошибок. Вот почему требуются вероятностные предположения.

Для удобства математических рассуждений вероятностные модели, наиболее употребительные для оценивания опционов, обычно формулируются в непрерывном времени. Эти модели включают знаменитую модель Black – Scholes, а также и те, которые допускают скачки. Оказалось, что биномиальные деревья, хоть и нереалистичные в качестве моделей рынка, могут служить полезным вычислительным приближением к широко применяемым (но, увы! возможно столь же нереалистичным) моделям с непрерывным временем.

Это обстоятельство было впервые доказано в поздние 1970-е годы (66, 67, 256) и привело к тому, что биномиальные деревья стали стандартной темой в учебниках по оцениванию опционов.

Рис. 1.8. Схематично показана сегодняшняя цена 8 долл., завтрашняя цена в полдень 7 или 9 долл., завтрашняя цена при закрытии торгов 5 или 8 вместо 7 долл. либо 8 или 10 вместо 9 долл. Соответственно, $x = 0$, 0 и 100.

В этом примере $\mathrm{E}x = 25$. Для хеджирования этой цены следует вначале купить сегодня 25 акций и завтра в полдень уравновесить покупку либо продав акции (если цена опустилась до 7 долл.), либо купив ещё столько же (если цена поднялась до 8 долл.) [она и была 8 долл.]

1.5.2. Более полное использование рынка. Наиболее распространённая вероятностная модель оценивания опционов в непрерывном времени, а именно модель Black – Scholes, предполагает, что принятая цена ценных бумаг изменяется в соответствии с геометрическим [непрерывным. Также и ниже.]

броуновским движением. В этом случае опционы можно оценивать по формуле Black – Scholes с параметром, который характеризует изменчивость цен ценных бумаг. Значение этого параметра обычно оценивается по предшествовавшим флюктуациям. Предположение о геометрическом броуновском движении можно истолковать с нашей теоретико-игровой точки зрения (гл. 14). Но если мы пожелаем полнее использовать рынок, мы сможем, напротив, исключить [что именно?], см. главы 10 – 13.

Простейшие опционы на некоторые ценные бумаги сейчас обращаются на рынках в достаточном объёме, так что их цены определяются спросом и предложением, а не формулой Black – Scholes. Мы предлагаем основываться на указанной тенденции, так чтобы сам рынок оценивал некоторый тип опционов на протяжении какого-то диапазона сроков оплаты. Если к этому сроку указанные опционы оплачиваются гладкой и вполне выпуклой функцией стоимости акций, другие производные бумаги можно будет оценивать по указанной формуле, если только мы теперь будем истолковывать её параметр и определять его значение по цене опциона. Не предполагая, что цены бумаг и купленного опциона определяются некоторой стохастической моделью, мы лишь установим какие-то границы флюктуации этих цен. Наш *рыночный* подход распространяется и на модель Пуассона для скачков (§ 12.3).

1.5.3. Вероятностные игры в непрерывном времени. Рассматривая оценивание опционов во второй части книги, мы обсуждаем вопрос, существенный при рассмотрении и теории вероятностей, и финансов: как может теоретико-игровая структура найти место [включить и т. д.] для непрерывного времени? Притязания теории множеств на то, чтобы считаться основанием теории вероятностей частично покоится на её возможности иметь дело с непрерывным временем. Чтобы состязаться с ней как с математической теорией, наша теоретико-игровая структура должна ответить и на этот вызов.

На первый взгляд неясно, как понять идею игры, в которой оба игрока ходят по очереди непрерывно. У действительного числа нет ни немедленно предшествующего, ни немедленно последующего, и мы не сможем разделить континуум времени на точки выделить точки, в которых в игру вступает Скептик и немедленно после этого действует Мир. К счастью, теперь у нас есть строгий подход к непрерывной математике, – нестандартный анализ. Он действительно позволяет нам представить непрерывное время, состоящее из бесконечно малых дискретных шагов, каждый из которых обладает и немедленно предшествующим, и немедленно последующим.

Впервые этот анализ ввёл в 1960-е годы Абрахам Робинсон, намного позже установления теоретико-множественной структуры теории вероятностей. Он, этот анализ, до сих пор ещё плохо известен и даже отпугивает многих прикладных математиков. Он, однако, обеспечивает готовую основу для перевода наших вероятностных игр в непрерывное время и притом обладает существенным преимуществом, поскольку прекрасно поясняет, как бесконечное зависит от конечного. [Но как же великая философская идея: конечное (разум) не может постигнуть бесконечного (Бога) – философы прошлых веков, а может быть и нынешние.]

В гл. 10 мы вводим наш рыночный подход к оцениванию опционов в дискретном времени, т. е. именно так, как осуществляется хеджирование. Вместо точной цены опциона мы получаем её верхние и нижние значения, оба аппроксимированные выражением, аналогичным известной формуле Black – Scholes. Точность аппроксимирования возможно окажется ограниченной ввиду *острых* изменений рыночных цен ценных бумаг, в том числе и покупаемых производных.

Всё это достаточно реалистично, но также непривлекательно и с трудом поддаётся исследованию, потому что аппроксимации грубы, беспорядочны и часто произвольны. В гл. 11 мы описываем ту же теорию в терминах нестандартного анализа, и она оказывается простой и прозрачной. Более того, этот вариант теории конечно же не указывает ничего, кроме того, что содержится в дискретном. Так происходит потому, что он следует из последнего по *принципу переноса*, общему принципу нестандартного анализа, который иногда позволяет рассуждать как бы между нестандартными и стандартными утверждениями (136).

Некоторые читатели [возможно] решат, что необходимость в обращении к нестандартному анализу является недостатком нашей структуры. Имеются, однако, неожиданные преимущества в ясности, с которой принцип переноса позволяет исследовать соотношение между результатами, полученными в дискретном и непрерывном времени. Хотя дискретная теория [раньше был вариант, а не теория] в гл. 10 очень груба, её возможность практически [?] градуировать точность нашего нового и чисто теоретически-игрового метода Black – Scholes намного превосходит достигнутое анализом при помощи стохастического метода Black – Scholes в дискретном времени.

Разъяснив наш подход к непрерывному времени в гл. 11, мы применяем его, чтобы разработать и обобщить наши методы оценивания опционов (главы 12 – 13) и представить теоретико-игровое изложение процессов диффузии (гл. 14) без обращения к соответствующей дискретной теории. Этот путь соответствует делу, потому что дискретная теория зависела бы от подробностей конкретных задач, в которых применялись бы идеи [??]. Впрочем, дискретная теория должна быть разработана в связи с любыми попытками практически применять эти идеи.

По нашему мнению, дискретная теория должна разрабатываться каждый раз, когда применяется модель непрерывного времени, чтобы точность результатов, достигнутых в непрерывном времени, могла быть количественно исследована.

Оглавление

Включение непонятных символов в заглавия (§§ 10.5 и 10.6) крайне нежелательно.

Библиография

23. Billingsley P. (1965), *Ergodic Theory and Information*. Wiley, New York.

66. Cox J. C., Ross S. A. (1976), The valuation of options for alternative stochastic processes. *J. of Financial Econ.*, vol. 3, pp. 145 – 166.

67. Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M. (1979), Option pricing: a simplified approach. *J. of Financial Econ.*, vol. 7, pp. 229 – 263.

82. Dawid A. Ph. (1984), Statistical theory: The prequential approach (with discussion). *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. A147, pp. 278 – 292.

86. Dawid A. Ph., Vovk V. G. (1999), Prequential probability: principles and properties. *Bernoulli*, vol. 5, pp. 125 – 162. Здесь впервые формально введен теоретико-игровой закон повторного логарифма.

128. Francis J. C., Toy W. W., Whittaker J. G., Editors (2000), *The Handbook of Equity Derivatives*. Пересмотренное издание. Wiley, New York.

136. Goldblatt R. (1998), *Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis.* Springer, New York. Прекрасное изложение, основанное на ультрафильтрах.

154. Hull J. C. (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*. Четвёртое издание. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey. Популярное введение в производные ценные бумаги на уровне магистра по управлению бизнесом. Обсуждается теория и практика производных торговли [производными?] ценных бумаг, включает численные методы составления наиболее распространённых алгоритмов оценивания.

250. Popper K. R. (1982), *The Open Universe*. Hutchinson, London.

256. Rendleman R. J., Bartter B. J. (1979), Two-state option pricing. *J. of Finance*, vol. 34, pp. 1093 – 1110.

274. Shafer G. (1982), Bayes's two arguments for the rule of conditioning. *Annals of Statistics*, vol. 10, pp. 1075 – 1089. Исследуется роль времени в теории вероятностей Томаса Бейеса. [Не было у Т. Б. теории вероятностей.]

275. --- (1985), Conditional probability. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 53, pp. 261 – 277. Автор утверждает, что условная вероятность имеет смысл только в контексте протокола (или дерева событий), который указывает возможность дальнейших наблюдений.

276. --- (1990a), The unity and diversity of probability. *Statistical Sci.*, vol. 5, pp. 435 – 462. Автор утверждает, что для расцвета статистики как сферы деятельности специалистов требуется расширенное понятие об основах и приложениях теории вероятностей. Приложены комментарии некоторых заслуженных статистиков.

277. --- (1990b), The unity of probability. In Furstenberg G. von, Editor, *Acting under Uncertainty: Multidisciplinary Conceptions*, pp. 95 – 126. Kluwer, Boston. Автор утверждает, что в представлениях о математической вероятности знание конечных результатов, value? и обоснованное убеждение перепутаны настолько, что ничто из упомянутого само по себе недостаточно для обоснования этого представления.

278. --- (1992), What is probability? In Hoaglin D. C., Moore D. S., Editors, *Perspectives on Contemporary Statistics*. Math. Assoc. of America Notes 21, pp. 93 – 105. Философское и историческое введение в конкурирующие истолкования вероятности.

279. --- (1993), Can the various meanings of probability be reconciled? In Keren G. & Lewis Ch., Editors, *A Handbook for Data Analysis in the Behavioral Sciences: Methodological Issues*, pp. 165 – 196. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New Jersey. Автор разработал элементарную теорию вероятностей и цен в терминах деревьев и показывает, как эту теорию можно применить для примирения конкурирующих философских систем вероятности.

281. --- (1994), The subjective aspect of probability. In Wright G. & Ayton P., Editors, *Subjective Probability*, pp. 53 – 73. Wiley, New York. Философское исследование применения вероятностных моделей в качестве эталонов или стандартов, относительно которых можно сравнивать притязания на эффективность предсказаний. Автор заключает, что вероятности в подобных моделях не удовлетворяют ни бейесовским, ни частотным притязаниям на объяснение общего смысла вероятности.

283. --- (1996), The significance of Jacob Bernoulli's *Ars Conjectandi* for the philosophy of probability today. *J. of Econometrics*, vol. 75, pp. 15 – 32.

284. --- (1998), Mathematical foundations for probability and causality. In Hoffman F., Editor, *Mathematical Aspects of Artificial Intelligence*, this being vol. 55 of *Symposia in Applied Mathematics*, pp. 207 – 270. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island. Автор аксиоматически разрабатывает понятия пространства событий, объединяющие понятия булевой алгебры и дерева событий. В пространстве событий одна ситуация может следовать во времени за другой (как в дереве событий), либо быть только более подробной, нежели другая (как в булевой алгебре).

285. Shafer G., Gillett P. R., Scherl R. B. (2000), Probabilistic logic. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*. Авторы предлагают более сжатую аксиоматику деревьев событий, которые были впервые введены аксиоматически в Shafer (1998).

296. Ville J. (1939), *Etude critique de la notion de collectif.* Gauthier-Villars, Paris. Книга отличается от диссертации автора, защищённой в марте 1939 г., лишь заменой введения, занимавшего всего одну страницу, вводной главой объёмом 17 страниц.

319. Vovk V. G., Вовк В. Г. (1986), О понятии свойства Бернулли. Англ. перевод статьи: *Russ. Math. Surveys*, vol. 41, pp. 247 – 248. Автор изучает связи между финитарным вариантом мизесовского понятия о коллективе (Колмогоров) и более традиционным теоретико-множественным вариантом [чего?]

320. --- (1987), Автор предлагает алгоритмическое доказательство закона повторного логарифма, который был ранее приведен к теоретико-игровой структуре (Dawid & Vovk 1999).

321. --- (1988), Kolmogorov – Stout law of the iterated logarithm. *Math. Notes*, vol. 44, pp. 502 – 507. Более общий вариант доказательства, указанного в Вовк (1987).

323. --- (1993a), Forecasting point and continuous processes. Prequential analysis. *Test*, vol. 2, pp. 189 – 217. Приведены варианты Теоремы (11.1), см. с. 278, и Предложения 12.1, с. 304.

324. --- (1993b), A logic of probability with applications to the foundations of statistics (with discussion). *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. B55, pp. 317 – 351. Автор предлагает основывать теорию вероятностей и её приложения на принципе невозможности системы игры и доказывает вариант финитарной теоремы Виля (с. 195) и предсказательную и секвенциальную (по существу теоретико-игровую) ЦПТ.

325. --- Central limit theorem without probability. Рукопись, июнь 1995. ЦПТ Башелье (предложение 10.1 на с. 242). *Статьи 325 – 328 не опубликованы.*

326. --- Game-theoretic versions of Kolmogorov's strong law of large numbers. Рукопись, июнь 1995. Предложения 4.1 на с. 78 и 15.1 на с. 356.

327. --- Pricing European option without probability. Рукопись, июнь 1995. Вариант теоретико-игровой формулы Black – Scholes (Теорема 11.2 на с. 280).

328. --- A purely martingale version of Lindeberg's central limit theorem. Рукопись, июнь 1995. Вариант Теоремы 7.1 на с. 153.

329. --- (1996), Вариант Предложения 4.4, с. 92.

Некоторые выдержки (переводчик)

Будто бы прошлое может что-то решать для будущего. Монмор, 1708, перевод с французского: F. N. David, *Games, Gods and Gambling*. London, 1962, p. 143. *У рулетки нет ни памяти, ни воли.* J. Bertrand, *Calcul des probabilités*. Paris, 1888, 1907. New York, 1970, 1972. See edition of 1970, p. XXII.

В теории игр систематически и по существу употребляются понятия теории вероятностей. На её языке можно сформулировать большинство задач математической статистики. БСЭ, 3-е изд,, т. 10, 1972, игр теория. Это издание переведено на англ. том в том.

Стратегическая игра это математическая модель, описывающая задачи математической статистики и основанная на использования понятия игры двух лиц. А. А. Боровков, Статистическая игра. В книге *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. Ред. Ю. В. Прохоров. М., 1999, с. 649 – 650.

Возможность рассматривать основные проблемы статистики как игру против природы привела к современной теории статистических решений. O. Morgenstern, Game theory; theoretical aspects. W. H. Kruskal, Judith M. Tanur, Editors, *Intern. Enc. Stat*. New York – London, 1978, pp. 364 – 372 (p. 370).