СЕМНАДЦАТАЯ ХРЕСТОМАТИЯ

ПО ИСТОРИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

Составитель и переводчик О. Б. Шейнин

Берлин

2016

Содержание

От составителя

I. Д. Р. Беллхаус, Рукопись Джона Арбутнота о случае, 1989

II. Р. К. Арчибальд, К. Пирсон, Абрахам Муавр, 1926

III. С. М. Стиглер, Бошкович, Симпсон и рукописная заметка 1760 г. о пригонке линейного отношения, 1984

IV. Р. У. Фейрбрадер, Дополнительные подробности о контактах Бошковича и Симпсона в июне 1760 г., 1990

V. Дж. В. Фильд, Тихо Браге, Кеплер и понятие ошибки, 2005

VI. Д. Беллхаус, Расшифровывая книгу Кардано *Liber de Ludo Aleae*, 2005

VII. Дж. Лавленд, Бюффон, достоверность восхода Солнца и вероятностное сведение к нелепости, 2001

VIII. К. Брунс, И. Ф. Энке (выдержки), 1869

IX. Ф. В. Бессель, Рецензия на книгу Delambre (1827), 1829, с Приложением

X. Л. Райс, “Все ошибаются”. Пересечение логики и теории вероятностей у Де Моргана, 1837 – 1847 (выдержки), 2003

От составителя

Ниже мы приводим общие соображения об отдельных статьях, которые мы обозначили римскими цифрами в соответствии с Содержанием. Библиографические сведения включены в надлежащие пристатейные библиографии. Мы слишком поздно узнали, что в России наконец-то начали правильно транскрибировать имя великого астронома: не Брадлей, а Брэдли.

Вот обозначение, принятое во всём сборнике:

S, G, i: документ i на русском языке есть на нашем сайте www.sheynin.de. Сайт перепечатывает Google, см. Oscar Sheynin.

Общие комментарии к некоторым статьям

[v] Статья Фильд неполноценна по двум причинам. Во-первых, она, Фильд, не знакома с обработкой наблюдений, см. Прим. 8, 9, 12 и 13. Это утверждение, безусловно, относится ко многим астрономам и историкам астрономии. Действительно, Donahue, переводчик *Новой астрономии* Кеплера, проделал огромную и крайне полезную работу, но никак не комментировал обработку наблюдений у Кеплера.

Во-вторых, Фильд полностью пренебрегла астрономами древности и Бируни, и поэтому многие её выводы по меньшей мере сомнительны. В первую очередь ошибочно её основное положение о том, что до Тихо и Кеплера никто количественно не оценивал ошибок наблюдений. Она не сослалась ни на одну из наших соответствующих статей (мы включили их в Библиографию), в которых доказывается противное.

Уже Аристарх указывал численные пределы ошибочности своего определения диаметра Солнца (Sheynin 1993, § 2.1). То же можно сказать о Птолемее (там же, § 3.6), а Леви бен Гершон (там же, § 4.1) количественно оценил ошибки, вызванные неточным изготовлением инструментов.

И вот расширенная выдержка из нашей сводки (Шейнин 2013, § 2.2.4). Кеплер по существу указал, что среднее арифметическое уже стало универсальной оценкой (параметра сдвига кривой плотности), а при обработке наблюдений он применял элементы метода Монте Карло и метода минимакса. В соответствии с последним наибольший по абсолютной величине остаточный свободный член заданной переопределённой системы уравнений должен быть наименьшим среди всех возможных *решений* (которых в строгом смысле не существует). Кеплер, видимо, отыскивал этот минимум среди нескольких разумных *решений* и убедился, что остаточный член достигал 8′, т. е. был слишком велик.

Вот ключевые слова (см. § 3): наблюдения *Тихо указывают на ошибку в 8′ в этом вычислении по Птолемею*. Это означает: систему уравнений Кеплер составил в соответствии с системой Птолемея, а её свободными членами были функции наблюдений Тихо, которые заведомо не могли достигать 8′. Но этого мало! Кеплер был обязан проделать аналогичные вычисления для системы уравнений, составленных в соответствии с системой Коперника (и мы полагаем, что он так и сделал), и на этот раз он

должен был получить максимальный остаточный член порядка, скажем, 3′, и вот он-то и *указал на ошибку в этом вычислении* по Копернику! К сожалению, этот остаточный член, эта оценка погрешности наблюдений Тихо, остался неизвестным (осталась неизвестной). Но что мешает проделать это второе вычисление заново?

Поясним теперь, что системы уравнений в обоих случаях были не линейными, и даже не алгебраическими, но можно полагать, что до их решения Кеплер линеаризировал их, иначе его многократные (при проверке *разумных* решений) вычисления оказались бы гораздо тягостнее. И только Лаплас отыскал алгоритм решения систем уравнений (только линейных) по методу минимакса.

[vi] Беллхаус описал основное в математическом смысле сочинение Кардано, связывая его математику с понятием о справедливости по Аристотелю и отыскивая обстоятельства, при которых азартная игра справедлива. О допустимости таких игр спорили ещё очень долго, и во Франции её отстаивал, например, La Placette (1714).
Аристотелю же Кардано приписал учение о средних, которое появилось ещё в пифагорейской школе. История этого учения поучительна. Начиная с Кондорсе оно стало называться теорией средних, а метод средних (уже напрасно) упомянул в 1901 г. Гильберт (*Проблемы* 1969, Проблема 6).

В нашей дополнительной Библиографии мы добавили несколько источников о Кардано, тем более, что автор почти не ссылался на комментарии математического содержания. Именно таков, например, в основном обзор Зубова (2010), который также заметил (с. 9), что Кардано отрицал учение Аристотеля о природе.

[vii] Статья посвящена исследованию Бюффоном (*Опыт*, 1777) и Прайсом (Бейес 1764) вероятности восхода Солнца, т. е. философскому вопросу опытного накопления знания при отсутствии априорных знаний (или вероятностей). Юма Лавленд (начало § 4) косвенно называет их предшественником, хотя Юм (1739), с. 124 издания 1969 г. заявил, что *нелепо будет выглядеть тот, кто скажет, что восход Солнца лишь вероятен*.

Исследуя историю создания *Опыта*, Лавленд замечает, что в основном он был составлен много раньше, быть может в 1760-е годы, и кратко описывает его содержание, но не упоминает главного: именно Бюффон окончательно ввёл геометрическую вероятность в теорию вероятностей. О Прайсе сказано недостаточно, а о Бейесе, на котором тот основывался, вообще ничего. В то же время во многих случаях автор приводит излишние подробности.

Библиография составлена отвратительно (Прим. 10), и статью Лавленда не следовало публиковать в её существующем виде.

[viii] В Примечаниях мы указали на некоторые недостатки книги Брунса, но она безусловно ценна. Места хранения многочисленных писем он указал в начале книги весьма обобщённо, притом их дальнейшая судьба неизвестна.

В серьёзной размолвке Бесселя и Энке в основном, видимо, был виновен Бессель, хоть и непреднамеренно, и в любом случае многое можно простить Энке за инициативу в наименовании

берлинской улицы в честь Бесселя. Критика *Этюдов* Струве, которую опубликовал Энке, видимо не была исследована, в частности Новокшановой (1964). Впрочем, Batten (1988, с. 152 – 153) привёл выдержки из переписки Струве с Президентом Королевского астрономического общества Эри, из которой следует, что они оба сочли критику Энке поверхностной.

Friesleben (1971) сообщил, что в 1869 г. в Берлине была посмертно опубликована также не исследованная *История астрономии* Энке. Наконец, заметим, что в фонде Энке № 1 в Архиве Берлинско-Бранденбургской академии наук хранится письмо Эри 5 февраля 1833 г., в котором он указывает, что ему было *чрезвычайно приятно*, что Энке *так высоко оценил* его перевод своей статьи о комете, *которую весь мир, кроме Вас самих согласился называть Вашим именем*. О комете Энке см. Блажко (1947, с. 360). Morando (1995, с. 233) указывает, что Энке обратил внимание на то, что в движении многих комет большое значение имеют силы, отличные от силы тяготения.

[ix] Бессель подробно описал книгу Деламбра и воспользовался случаем, чтобы также подробно сообщить о Брадлее и Флемстиде. По поводу последнего мы добавим: его отношения с Ньютоном были непростыми (Шейнин 1973, с. 109 – 110), а Thoren (1972, с. 75) заметил, что ни у Ньютона, ни у Галлея не было такого страстного стремления к точности наблюдений, как у него.

Чтение рецензии затрудняется тем, что иногда неясно, утверждает ли что-то сам Бессель или повторяет мнение Деламбра, а многочисленные приведённые им без инициалов имена астрономов трудно уточнить, хотя нам это почти всегда удалось по книге Деламбра. Мы усилим мнение Бесселя о лже-патриотизме Деламбра: он возвысил, иногда несуразно, французских учёных и принизил Брадлея и Гаусса. Добавим: на с. xl книги Деламбра издания 2004 г. открытие метода наименьших квадратов приписано Лежандру и Лапласу, Гаусса же не существовало!

Рецензия Бесселя вряд ли стала достаточно известна; Cohen (1971), например, не упомянул её, но согласился с ним: нет у Деламбра ни синтеза, ни обобщений, а проницательность никак не проявляется. Впрочем, он указывает, что Деламбр привёл обильную информацию о менее значащих астрономах и описывает его научные заслуги (которых Бессель также не отрицает).

[x] С нашей точки зрения статья интересна тем, что описывает малоизвестные достижения Де Моргана в теории вероятностей, однако Райс недостаточно знаком с этой теорией (см. наши Примечания), да и вообще он оказался обманщиком.

В конце статьи он сообщил, что Буль опровергнул какие-то вычисления Де Моргана, заметив, что они могут привести к вероятностям, превышающим единицу. Запомним это.

Райс сообщает о статье Де Моргана (1861), фактически же опубликованной в 1864 г. В ней будто бы автор пытался заново обосновать теорию ошибок. Позднее Rice & Seneta (2005)

заявили, что в этой статье содержались какие-то вычисления, и всё! На самом деле (Sheynin 2015, с. 5) Де Морган впервые обобщил з*акон ошибок*, умножив экспоненциальную функцию отрицательного квадрата на многочлен. Кроме того, он впервые заметил, у Муавра появилось нормальное распределение. С другой стороны, Де Морган указал, что нет смысла исследовать причину появления отрицательной вероятности, и что вероятность события, равная 2,5, означает, что оно появится дважды и с равными шансами появится или нет в третий раз. Критику Буля он не воспринял.

Но это ещё цветочки! Райс сослался на книгу 1882 г. вдовы Де Моргана и вполне мог бы (а мы склонны считать, что смог) прочесть в ней письмо Де Моргана 1842 г., в котором заявил, что $\sin\infty = \cos\infty = 0$, $\sec\infty = \operatorname{cosec}\infty$ и вероятно равен нулю, а $\operatorname{tg}\infty = \operatorname{ctg}\infty = \pm\sqrt{-1}$. Как можно было нести такую ахинею? Достижения Де Моргана оказались совершенно непонятными, а о роли Райса мы предоставляем судить читателям.

I

Д. Р. Беллхаус

Рукопись Джона Арбутнота о случае

D. R. Bellhouse, A manuscript on chance written by John Arbuthnot.
Intern. Stat. Rev., vol. 57, 1989, pp. 249 – 259

1. Введение

Джон Арбутнот (1667 – 1735) был врачом, учёным и литератором, придворным врачом Королевы Анны. Он обладал глубокими познаниями и создал образ Джона Булля[1]. В 1704 г. он был избран членом Королевского общества, а в 1712 г. стал членом академического комитета по исследованию спора Ньютона и Лейбница о приоритете в открытии математического анализа, см. о нём Aitken (1892), Beattie (1935) и Словарь национальных биографий (*Dictionary of National Biography*, DNB). Основным вкладом Арбутнота в теорию вероятностей является его комментированный перевод трактата Гюйгенса (1657), см. Арбутнот (1692 и позднейшие издания) и статья о соотношении мужских и женских рождений (1712)[2]. В ней содержится один из первых критериев значимости. И об указанном переводе, и об этой статье см. Todhunter (1865). О ней см. также Pearson (1978), Bartholomew (1984) и Stigler (1986).

В собрании рукописей Эдинбурского университета находится анонимная рукопись о случае, написанная его почерком (Gregory Collection, MS Dk.1.2. Fol. B [no. 19]). Её название, написанное Дэйвидом Грегори, *Трактат о случае, написанный д-ром Арбутнотом в 1694 г*. Грегори (1661 – 1708) был профессором[3] астрономии в Оксфорде и защитником Ньютона, см. DNB. Ross (1956) усомнился в дате 1694, которая тем не менее представляется наиболее разумной, см. наше Приложение.

Арбутнот впервые встретился с Грегори при своём поступлении в оксфордский университетский колледж в 1694 г., и разумно предположить, что он написал свою рукопись вскоре после этого, в октябре 1694 г., чтобы привлечь внимание Грегори, другого выпускника Абердинского университета. Это объясняет, почему рукопись оставалась у Грегори и так и не была опубликована.

В рукописи 11 страниц; первые 10 написаны почерком Арбутнота, последняя страница – почерком Грегори. В этих первых страницах много оригинального. Некоторые результаты, относящиеся к игре в кости в сочинении 1692 г., обобщены, а выводы его статьи 1712 г. предвосхищены. Последняя [десятая] страница – перевод и сжатое изложение статьи Лейбница о случае 1690 г. Краткое изложение задачи, которую решил Лейбница, а до него – Якоб Бернулли (1690), см. Todhunter (1865, с. 47). Грегори сослался на обе эти статьи, указав название журнала, *Acta Eruditorum*, год 1690 и номера некоторых страниц. В

предварительном примечании к опубликованному им собранию заметок Грегори Hiscock (1937) утверждает, что эти заметки в рукописной форме, которые он не стал публиковать, содержали резюме прочитанных Грегори материалов, и в том числе статей из *Acta Eruditorum*. И таким образом последняя страница рукописи Арбутнота это лишь ещё одно резюме, составленное Грегори. В нашем Приложении мы замечаем, что включение этого резюме в рукопись Арбутнота может способствовать подтверждению её датировки.

2. Математическое содержание рукописи

В ней две теоремы. После первой помещены следствие, комментарий, и четыре задачи, вторая и четвёртая из которых также комментированы. Все формулы Арбутнота верны, но допущено несколько арифметических ошибок. По всей рукописи он использует в качестве модели кость с n гранями, которая подкидывается p раз (или p костей, которые подкидываются только один раз). Мы приняли современные обозначения.

В теореме 1 Арбутнот выводит ряд

$$n^p - b^p - C_p^1 b^{p-1} - C_p^2 b^{p-2} + C_p^3 b^{p-3} - \ldots, \qquad (1)$$

$b = n - 1$. Если разделить его на n^p, то первые $(i + 1)$, $i = 1, \ldots, p$, его члены выразят вероятность, что некоторая грань кости появится по крайней мере i раз в p бросках. Эквивалентную формулу см. Montmort (1708/1713, Предложение XIII, с. 40).

В своём комментарии Арбутнот показывает, что эти же множества вероятностей могут быть определены для появления двух или более граней. Так, при $b = n - 3$ и умножении b^{p-1} на 3^i, $i = 1, 2, \ldots, p$, можно получить результат для трёх определённых граней. В следствии Арбутнот также указывает, как можно вычислять вероятности для костей с различными количествами граней. И ниже, в той же рукописи, Арбутнот замечает, как это следствие можно применять для того, чтобы использовать метод Галлея 1693 г.[4] для определения нынешней стоимости совместной пожизненной ренты и страхования жизни.

В конце этого раздела Арбутнот приводит алгоритм для вывода численных значений вероятностей (1) при помощи арифметического треугольника. Результаты теоремы 1 и её следствия обобщают предложения X, XI и XII в сочинении Арбутнота (1692). В предложениях X и XI при помощи нескольких утомительных численных вычислений Арбутнот определяет вероятность выпадения шестёрки по меньшей мере один раз в p бросках, $p = 1, 2, \ldots, 5$, шестигранной кости и выпадения 12 очков по меньшей мере один раз при p бросках двух костей, $p = 1, 2, 4$. В предложении XII,– по меньшей мере двух шестёрок в p бросках. Численное значение вероятности приведено для $p = 3$ и отмечено, что при $p = 10$ вероятность превышает половину.

Задача 1, которая следовала за теоремой 1, также обобщает предложения X и XI 1692 г. Требовалось определить p, т.е. число бросков кости с n гранями, при котором вероятность выбросить определённую грань по меньшей мере один раз, равнялась определённому числу $1/r$. Учитывая первые два члена ряда (1), Арбутнот получает

$$p = \lg \frac{r}{r-1} \div \lg \frac{n}{n-1}.$$

Он приводит два примера. Во-первых, для обычной кости и $r = 2$ он показывает, что выгодно держать пари для четырёх, но не для трёх костей. Второй пример относится к лотерее Королевский Дуб, которую он (1692, с. 57 – 58) кратко описывает. Искомый результат оказывается тем же, что и при броске кости с 32 гранями. И, снова для $r = 2$, он показывает, что выгодно держать пари на $p = 22$, но не на 21. Эту проблему впоследствии решил Montmort (1708, с. 180; 1713, с. 228, предложение XXXIX) и Муавр (1711, задача 5).

В теореме 2 Арбутнот определяет вероятность появления определённых сумм очков после броска p костей с n гранями, но общего решения он не привёл. Эта теорема обобщает прежние замечания автора (1692, с. 59 – 62) о среднем значении суммы очков при выпадении любого числа обычных костей. В рукописи Арбутнот замечает, что экстремумы суммы должны быть равны p и np, что при заданном i вероятности сумм $p + i$ и $np - i$ совпадают и что высшая вероятность соответствует значению $(np + p)/2$. По соображениям симметрии распределения вероятность сумме быть по меньшей мере равной $(np + p + 1)/2$ та же, что и не превышающей $(np + p - 1)/2$. Этот результат и другие выводы для распределения сумм ранее вывел Strode (1678), см. Stigler (1988).

В отличие от Гюйгенса, Галлея и Лейбница Арбутнот не упомянул его, и можно считать, что в 1694 г. он не знал о Strode. Позже общее решение для распределения суммы получил Муавр (1711, лемма на с. 220 – 221) и Montmort (1708/1713, предложение XVI, с. 46).

Задачи 2 и 3 Арбутнота, для которых он привёл общее решение, потребовали весьма элементарных веротяностных вычислений. Задача 2 теперь называется задачей о днях рождения, Арбутнот же формулирует её как определение вероятности совпадения по меньшей мере двух граней при броске p костей с n гранями. В комментарии к этой задаче он замечает, что вероятность равна единице при $p > n$. Ранее Арбутнот (1692, с. 75 – 77) получил решение для $n = 6$.

В задаче 3 и её комментарии Арбутнот по существу показывает, что та же вероятность совместного появления ряда независимых событий[5] равна произведению вероятностей.

Наконец, в задаче 4 Арбутнот выводит формулу для ${}_nC_r$, а затем и общую формулу для вероятности выпадения равного числа обеих сторон монеты при её n бросках[6]. Он вычисляет точные значения вероятности для двух и четырёх монет и,

применяя логарифмы, пытается вычислить приближённую вероятность для миллиона монет, но допускает серьёзную арифметическую ошибку. Он получил вероятность порядка $1/10^{251,030}$ вместо верного значения, которое ближе к 8/10,000.

3. Предвосхищение результатов статьи 1712 г.

В этой статье Арбутнот предлагает два довода в пользу божественного промысла в определении соотношения полов при рождении. В обоих случаях он вначале предполагает, что пол при рождении зависит от случая (что оба исхода равновероятны). Его первый довод состоит в том, что ежегодное равенство мужских и женских рождений маловероятно. При чётном числе ежегодных рождений *n* по биномиальному распределению эта вероятность равна

$$C_n^{n/2} \div 2^n.$$

Арбутнот вычисляет её при $n = 2, 4, 6$ и 8 и замечает, что при больших *n* её можно вычислить при помощи логарифмов, и что она оказывается низкой.

Второй довод основан на критерии значимости. Применяя модель случая, приводящую к биномиальному распределению, Арбутнот устанавливает, что вероятность числу мужских рождений превзойти число женских рождений ниже половины. Далее, приняв, что эти вероятности совпадают, и заметив, что в Лондоне 82 года подряд число мужских крещений превышало число женских крещений, он вычислил вероятность этого события, равную $1/2^{82}$. Он указал, что эту вероятность можно снизить, поскольку неравенство [крещений или рождений?] было отмечено в нескольких иных местах и в другие периоды[7].

Арбутнот заключает, что отмеченное неравенство нельзя объяснить случаем и указывает, что его можно приписать божьему промыслу, направленному на благую цель.

Первый довод 1712 г. полностью предвосхищён в рукописи, а вычисления приведены в задаче 4 с добавлением неверного вычисления. В комментарии к этой задаче Арбутнот размышляет о малости неверно вычисленной вероятности:

Ясно поэтому, что равенство полов рода людского, которое подтверждается бюллетенями о смертности во всех местах[8], не может быть результатом одного лишь случая. Будь всё дело в случае, мужские и женские рождения были бы как стороны монеты. А предшествующее вычисление показывает, как маловероятно равенство большого числа полов для одного возраста, но для последовательности возрастов оно ещё намного ниже. Равенство полов, конечно же, неточное, но отличие столь незначительно, что при вычислениях мы не можем его учитывать, и равенство можно считать точным.

Довод в последнем предложении повторен в 1712 г. Арбутнот замечает, и в рукописи, и в 1712 г., что соотношение полов не в точности равно 1. В 1712 г. он указывает, что соответствующая

вероятность не выразится средним членом [разложения], она прихватит некоторые соседние члены *и будет смещена в ту или иную строну*.

В рукописи критерии значимости приведены как применения теоремы 2 и задачи 3, см. § 2. Приведено, собственно, три критерия. Первый непосредственно предвосхитил критерий 1712 г. и применялся для оценки хронологии первых семи римских царей, остальные – для оценки хронологии королей Шотландии. Второй критерий по духу схож с критерием 1712 г. Арбутнот вычеркнул его обсуждение и заменил его третьим критерием, весьма отличным по сути от первых двух, и критерия 1712 г. Вот первый критерий значимости из рукописи. Но почерк Арбутнота вообще скверный, а два или три слова нельзя было разобрать, и они заменены прочерками […].

Чтобы как-то применить эту теорию к смертности рода человеческого, предположим (пока не узнаем ничего лучшего), что она определяется бюллетенями Бреслау. Представляется, что примерно справедливо будет держать пари на то, что человек в возрасте 22 лет должен дожить до 56. Пусть семь человек сменяют друг друга в должности, и тот, кто вступает в неё в возрасте 22 лет, будет жить по крайней мере до 56 лет. По задаче 3 соотношение шансов в пользу этого предположения окажется равным 47:1. И это заставляло меня иногда сомневаться в том, что первые семь римских царей правили в течение 238 лет. При вступлении на царствование они все были намного старше 22 лет, кроме Ромула, которому, как я полагаю, было 18. Тогда оказывается, что каждый из них правил по 34 года, что […] *несколько маловероятно, если предположить, что несчастные случаи у царей происходят так же, как у других людей и что смертность была такой, как теперь.*

Здесь допущены две арифметические ошибки, одна из которых более очевидна, чем другая. Арбутнот применяет таблицу дожития Галлея (1693), чтобы вывести 1/2 либо для вероятности дожития ${}_{34}p_{22}$, либо вероятности смерти ${}_{34}q_{22}$ (в современных обозначениях актуариев). Его более очевидная ошибка состояла в том, что $1/2^7$, т. е. вероятность семи этих периодов жизни в 34 года, равна 1/128, а не 1/48. Вторая ошибка произошла при вычислении ${}_{34}p_{22}$; Арбутнот, видимо, вычислил ${}_{33}p_{22}$. По таблице Галлея ${}_{34}p_{22} = 282/586 = 0{,}482$, а ${}_{33}p_{22} = 292/586 = 0{,}498$.

Критерий значимости здесь не столь определённый как в 1712 г., поскольку было введено несколько упрощений. Каждый царь восходит на трон в 22 года и правит 34 года. Кроме того, данные были как-то немного подправлены, чтобы средняя длительность правления оказалась равной целому числу 34. По традиции, правление семи царей Рима относилось к 753 – 510 гг. до н. э., т. е. длилось в точности 243 года вместо 238, см., например, Scullard (1980, с. 420). Традиция также устанавливает длительности отдельных царствований, от 26 до 45 лет, чего Арбутнот не принял во внимание.

Со вторым критерием трудно полностью разобраться. Часть обсуждения не сохранилась ввиду наклеенной полоски бумаги с текстом третьего критерия. Та часть, которая осталась заметной, перечёркнута. И всё же можно понять, что Арбутнот ссылается на *111 шотландских королей*, которые правили в течение 2024 лет. Средняя продолжительность правления составила 18 – 19 лет, и Арбутнот предположил, что каждый король правил 19 лет, находясь в возрасте 14 – 33 лет. Соответственно, он вычислил ${}_{19}q_{14} = 1/5$ (шансы, как он говорит, находятся в отношении 1:4), снова применив таблицу дожития Галлея. Соотношение шансов 111 раз подряд править по 19 лет он вычисляет с ошибкой, получив $1:(4^{111} - 1)$. Он, видимо, решил, что смертность между правлением римских царей и шотландских королей изменилась, но не усомнился в данных по Шотландии. Наверное поэтому Арбутнот вычеркнул этот критерий и переписал шотландское исследование в соответствии с иным критерием значимости, и попытался показать, что смертность шотландских королей был выше, чем следовало бы по таблице дожития Бреслау.

Третий критерий следует непосредственно после первого, но на дополнительной полоске бумаги (см. выше). Край страницы настолько изношен, что некоторые слова или их окончания отсутствуют, и наши дополнения в таких случаях указаны в квадратных скобках[9].

В соответствии с бюллетенями Бреслау из числа всех родившихся к 33 годам остаётся половина. Но поскольку общее число родившихся, как было предположено, не возрастает и не убывает, мы должны будем принять, что для восполнения этой смертности то же число должно было родиться до 33 лет, т. е. что у каждого в возрасте до 33 лет есть ребёнок, который последует за ним. Чтобы свести последовательность в человечестве к какой-либо закономерной гипотезе, всё, видимо, окажется так, будто каждый должен дожить до 33 лет, а затем умереть, чтобы оставить место для своего ребёнка. Так пусть человек будет схож с костью с 66 гранями. Их среднее число, 33 (это не вполне точно, если только броски для человека умереть в любом возрасте до 33 лет не будут в точности те же, что и для его смерти на том же расстоянии от 33 на [другой] *стороне).*

По теореме 2 три такие кости, т. е. (np + p/2) = 101, так что последовательность от отца к сыну через три поколения будет иметь 101 средним числом от рождения деда до смерти внука. Это не следует понимать в отношении ни младших, ни старших детей, однако имеются равные шансы на то, что так произойдёт с некоторыми из них. Полагаю, что это достаточно хорошо согласуется с действительностью. И 111 поколений займут 3669 лет. Поэтому может показаться несколько странным, что 111 шотландских кролей правили только 2024 года.

Но не принимая во внимание менее существенные передачи и учитывая, что трон передаётся старшему сыну, недостаток в общем периоде правления видимо означает, что смертность

шотландских королей была выше, чем у остального человечества. Можно ввести вероятное предположение об общей численности человечества за прошедшее громадное число эпох, если считать, что смертность оставалась всё время постоянной, и что нам известно число в то время (then) живших.

Но нет (Not:), эта задача весьма отличается от предыдущей о людях, проживающих 34 года после достижения зрелого возраста.

Арбутнот пытается установить критерий смещения. Он вывел 3669 как теоретическую, основанную на таблице дожития Галлея, сумму длительностей 111 правлений королей и сравнивал её с наблюдённой суммой, 2024. У него не было метода для вероятностной оценки величины разности, но он чувствовал, что она достаточно велика и заключил, что смертность шотландских королей отличается от смертности остального человечества, по меньшей мере в соответствии с таблицей смертности Бреслау. *Но нет* в самом конце выдержки выглядит чуть непонятно, если не соотнести этой оговорки с первыми двумя критериями. В первом Арбутнот сомневался в хронологии римских царей: взятые совместно, они, видимо, прожили дольше нормального срока, и это отмечено в значении p (1/48 или, более верно, 1/128). С другой стороны, Арбутнот хотел бы считать смертность повышенной относительно шотландских королей. Что остаётся у него неясным, это понятие об односторонней альтернативной гипотезе с соответствующим вычислением вероятности больших уклонений.

Его второй критерий верен, но вероятность следует вычислять для противоположного хвоста распределения. В первом критерии применяется вероятность выживания (${}_{34}p_{22}$), во втором – вероятность смерти (${}_{19}q_{14}$) для вычисления значения p. Поскольку представлялось, что результаты обоих схожи, Арбутнот отказался от второго критерия в пользу третьего, который лучше выявляет более высокую смертность 111 шотландских королей. Его отличие от первого критерия явно, но есть между ними и схожесть. Как и в первом, приняты некоторые упрощающие и возможно спорные предположения. Так, Арбутнот заявил, что население устойчиво и что срединная продолжительность жизни поколения составляет 33 года. Затем он заменил продолжительность жизни одного поколения броском кости с 66 гранями, и, наконец, он допустил ещё одну арифметическую ошибку. Применяя результат теоремы 2, он находит, что вероятность общей продолжительности правления по меньшей мере 3669 лет равна ½, но принял, что $(np + p + 1)/2 = (66\cdot111 + 11 + 1)/2 = 3669$ вместо $(66\cdot111 + 111 + 1)/2 = 3719$.

Shoesmith (1987) намекнул, что довод Арбутнота 1712 г. о божественном промысле быть может был навеян лекциями им. Бойля, прочитанными в 1692 г. философом и богословом Ричардом Бентли и опубликованными в 1693 г. (перепечатанными в Bentley 1976). Довод Бентли в пользу существования высшего существа, т. е. довод, исходящий из промысла, частично схож по стилю с доводом Арбутнота 1712 г.

Бентли замечает, что случайное осуществление некоторых вещей маловероятно. Так, он приводит астрономическое соотношение шансов, свидетельствующее против случайного вращения всех планет в одном и том же направлении и по существу в одной и той же плоскости.

Но суть критериев значимости в рукописи Арбутнота мирская, а не религиозная, и влияние Бентли было, видимо, минимальным. Более того, позднее Арбутнот высмеял Бентли и его труды по крайней мере в двух публикациях, см. Aitken (1892, с. 121 и 124) и Beattie (1935, с. 282 – 284 и 312 – 313).

Разумнее предположить, что первые два критерия в рукописи были мотивированы интересом Ньютона в продолжительности правления династий, см. Stigler (1977), и в таком случае статья 1712 г. становится либо ответом на методы аргументирования Бентли, либо вкладом в общее обсуждение существования божественного промысла с применением ранее разработанного под влиянием иных задач методов статистического анализа.

4. Дополнение к статье 1712 г.

Арбутнот узко определил случайность в рождениях как равную вероятность обоих исходов. Всякое отклонение от половинной вероятности в ту или иную сторону приписывалось божьему промыслу, или, как мы увидим в Приложении, к какому-либо закономерному естественному закону. Тодхантер (1865, с. 130, 193, 197) описал часть обсуждения указанного узкого определения случая и вычисления вероятности $1/2^{82}$. Полный отчёт об этом обсуждении см. Shoesmith (1985, 1987). Но обычно упускают из вида метод Арбутнота, использованный для выявления божественного промысла. В 1712 г. Арбутнот указал, что

В физике, видимо, нет никакой иной вероятной причины для этого равенства рождений, чем равенство количеств обоих полов в семени наших прародителей.

Это положение оспорил Джон Chamberlayne, другой член Королевского общества, учёный и придворный писатель. Вот что Арбутнот написал ему в 1711 г., см. Ross (1956) и Shoesmith (1987):

Существует очень много других выводов, которые можно сделать из наблюдённого равновесия, но я ограничился одним доводом, доказательством того, что оно было вызвано не случаем, а являлось закономерным ходом событий. Очень трудно угадать физическую причину разделения полов. Наиболее вероятно, что оно первоначально существовало в мужском семени. Есть несколько опытов, которые до сих пор не были никогда сделаны, но которые возможно прольют некоторый свет на это обстоятельство.

Какие именно опыты, он не поясняет, но он представляется предшественником теорий соотношения полов, которые расцвели в современной генетической теории распределения полов (Karlin & Lessard 1986; Charnov 1982).

5. Арбутнот как математик

Исследование (Тодхантер 1865, с. 48 – 53) четвёртого издания сочинения Арбутнота (1738) указывает, что Арбутнот был едва компетентен в математике. Тодхантер замечает неверное решение одной задачи, некоторые скверно сформулированные задачи, и приближённое решение, которое оказалось не очень приближённым.

Это впечатление не смягчается после чтения статьи 1712 г.: вероятностные вычисления в ней вполне элементарны. Но его рукопись показывает Арбутнота в гораздо более положительном математическом свете. Несмотря на арифметические ошибки, он, видимо, оказывается способным, хоть и не блестящим математиком. Он мог заниматься общими актуальными нерешёнными вероятностными задачами и применять полученные результаты к широкому кругу вопросов вне азартных игр. Хорошим примером является решение задач на броски кости по формуле (1) и применение арифметического треугольника, которое сопровождает эту формулу. В предложенной им форме арифметический треугольник, т. е. непосредственный, хоть и тягостный метод, можно приложить к решению проблемы игры в кости, которую Пипс[10] предложил Ньютону в 1693 г., а именно, при отыскании вероятностей того, что по крайней мере i шестёрок появятся при броске $6i$ костей, $i = 1, 2, 3$. David (1962, с. 126 – 129) описала решение Ньютона и примыкающую переписку. Решение Арбутнота представляется здесь более изящным, чем у Ньютона.

Муавр разделял мнение об Арбутноте как о способном математике. В предисловии к его книге 1756 г., которое было написано в 1717 г., он фактически упомянул его как *весьма изобретательного джентльмена*. По поводу перевода (видимо имея в виду его второе издание 1714 г., по существу совпадающее с первым) Арбутнотом трактата Гюйгенса, Муавр заметил, что Арбутнот *оказался в состоянии продвинуться намного дальше*.

То, что появилось в рукописи, вероятно являлось верхней границей математических способностей Арбутнота. В теории вероятностей он смог бы продвинуться дальше, но ввиду многих официальных и настоятельных обязанностей и преданности другим литературным достижениям, то время, которое он мог посвятить математическим темам, было ограничено. Полный круг его математических способностей остаётся неизвестным. Странно, что общие результаты, полученные в рукописи, не появились в позднейших изданиях его книги (1714, 1738).

Признательность. Я благодарен профессорам S. M. Stigler и D. A. Sprott и рецензенту за полезные комментарии, доктору L. Lefkovitch за предложение исследовать водяные знаки в рукописях, и своему отцу, P. M. Белхаусу, за помощь в переписке рукописи Арбутнота.

6. Приложение. Датировка рукописи

Надпись Грегори *Трактат* […] *написан д-ром Арбутнотом в 1694 г.* появилась после 1696 г., потому что до этого времени

Арбутнот ещё не стал доктором медицины. Это немедленно вызывает сомнение в точности даты 1694 г. Впрочем, тщательное исследование рукописи, т. е. почерка автора и её содержания, свидетельствует в пользу 1694 г., но не исключает её датировки примерно 1705-м годом и даже годом смерти Грегори, 1708-м годом.

Первое отрицательное мнение о дате 1694 г. высказал Ross (1956), который переписал всю известную переписку Арбутнота. Основываясь на своём опыте, он (1969) заметил, что с 1698 по 1703 гг. почерк Арбутнота заметно изменился. С 1703 г. он оказался *свободнее и торопливее, буквы стали теснее связываться друг с другом*, а стиль пунктуации стал своеобразным. Характерной для Арбутнота в XVIII в. была редкость применения знаков препинания. Предложения не подразделялись точками, иногда они начинались со строчной буквы, но либо большего, либо меньшего размера.

Наблюдения Росса по поводу переписки Арбутнота после 1698 г. точно описывают стиль, в котором написана его рукопись. Более того, некоторые её части не были тщательно выписаны и допущено несколько ошибок в численных вычислениях. Росс (1956, с. 950) видел и переписал рукопись, но не опубликовал этого переписанного варианта. Он замечает, что рукопись *видимо* была написана позднее, чем его самые ранние письма.

Во-вторых, Арбутнот ссылается в рукописи на *111 шотландских королей*, которые правили всего 2024 года. [Автор подробно описывает, откуда именно Арбутнот мог узнать указанные два числа, но замечает, *в то время это могло быть хорошо известным шотландским фольклором*.

Далее автор исследует строение рукописи, водяные знаки, нанесённые на её бумажные страницы, и т. д. и полагает, что все полученные им сведения *также соответствуют* датировке 1694-м годом (но не противоречат выбору несколько более поздней даты!). Вот его заключительная фраза:

Мы заключаем, что свидетельство в пользу датировки рукописи 1694-м годом убедительнее, чем её более поздняя датировка.]

Примечания

1. Джон Булль – образ типичного англичанина.

2. Не один из первых, а первый критерий. Недаром Фрейденталь (1961) объявил заметку Арбутнота началом математической статистики. Белхаус, как и десятки других авторов, и даже Тодхантер (1865, с. 619), указывают другую дату, 1710. Никому из них не пришло на ум, что никто не смог бы опубликовать статью в 1710 г., содержавшую статистические данные за тот же, 1710-й год. На самом деле журнал *Phil. Trans.* за 1710-й год вышел в 1712 г.

3. Грегори был Saville Professor. В 1619 г., в Оксфорде, на деньги Сэра Henry Saville была учреждена кафедра геометрии (т. е., математики).

4. Галлей основывался на статистических данных по г. Бреслау, и Белхаус несколько раз упоминает таблицы Бреслау.

5. Независимость событий впервые определил Муавр в 1818 г., в первом издании своей книги *Учение о случае*, см. с. 6 второго издания. Арбутнот вряд ли определил это понятие.

6. Так, см. чуть выше, Белхаус, видимо, обозначил соответствующее число сочетаний.

7. Напрасно Белхаус не комментировал этого важного свидетельства.

8. Повторяем Прим. 7.

9. Samuel Pepys, Самюэль Пипс, 1633 – 1703, чиновник и литератор.

Библиография

Источники, упомянутые автором в § 6, но не использованные нами ввиду сокращения его текста, исключены из Библиографии

Aitken G. A. (1892), *The Life and Works of John Arbuthnot.* Oxford.

Arbuthnot J. (1692, 1714, 1738), *Of the Laws pf Chance*. London. Первое, второе и четвёртое издания.

--- (1712), An argument for Divine Providence taken from the constant regularity observ'd in the births of both sexes. In Kendall M. G., Plackett R. L., Editors (1977), *Studies in History of Statistics and Probability*, vol. 2. London, pp. 30 – 34.

Bartholomew D. J. (1984), *God of Chance*. London

Beattie L. M. (1935), *John Arbuthonot, Mathematician and Satirist.* New York.

Bentley R. (1976), Eight Lectures on Atheism, 1692. *British Philosophers and Theologians of the 19th and 18th Centuries*, No. 3. New York.

Bernoulli J. (1690), Questiones nonnulae de usuris, cum solutione problematis de sorte alearum. *Werke*, Bd. 3. Basel, 1975.

Charnov E. L. (1982), *The Theory of Sex Allocation*. Princeton.

David F. N. (1962), *Games, Gods and Gambling*. London.

David H. A., Edwards A. W. F. (2001), The first test of significance. В книге авторов *Annotated Readings in the History of Statistics*. New York, pp. 7 – 17. Авторы приложили текст описанной ими заметки Арбутнота 1712 г.

De Moivre A. (1711), De Mensura Sortis. *Intern. Stat. Rev*. vol. 52, 1984, pp. 236 – 262. Англ. Добавлен комментарий (A. Hald): pp. 229 – 236.

--- (1756), *Doctrine of Chances*, третье издание. London. Reprint: New York, 1967. Предыдущие издания: 1718, 1738.

Freudenthal H. (1961), 250 years of mathematical statistics. В книге *Quantitative Methods in Pharmacology*. Editor, H. De Jonge. Amsterdam, pp. xi – xx.

Halley E. (1693), Estimate of the degrees of mortality of mankind etc. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 17, pp. 596 – 610. Перепечатка тома: New York, 1963.

Hiscock E. (1937), *David Gregory, Isaac Newton and Their Circle*. Oxford.

Huygens C. (1657), De Ratiociniis in ludo aleae. В книге автора *Oeuvres Complètes*, t. 14. La Haye, 1920, pp. 49 – 91.

Karlin S., Lessard S. (1986), *Theoretical Studies on Sex Ratio Evolution.* Princeton.

Leibniz G. W. (1690), Ad ea, quae vir clarissimus J. Bernoullius … *Omnia Operia*, t. 5. Geneva, 1768, pp. 237 – 239.

Montmort P. R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris. Второе издание, 1713. Reprint: New York, 1980.

Pearson K. (1978), *The History of Statistics in the 17th and 18th Centuries* etc. London. Лекции 1921 – 1933 гг.

Ross. A. M. (1956), *Correspondence of Dr. John Arbuthnot*. Cambridge.

--- (1969), Notes on the letters of Dr. Arbuthnot. *Scriblerian*, vol. 2, pp. 1 – 2.

Scullard H. H. (1980), *History of the Roman World, 753 – 146 BC*. London. Четвёртое издание.

Shoesmith E. (1985), Nicholas Bernoulli and the argument for Divine providence. *Intern. Stat. Rev*., vol. 53, pp. 255 – 259.

--- (1987), The continental controversy over Arbuthnot's argument etc. *Hist. Math.*, vol. 14, pp. 133 – 146.

Stigler S. M. (1977), Eight centuries of sampling inspection etc. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 72, pp. 493 – 500. В книге автора *Statistics on the Table*. Cambr. (Mass.) – London, 1999, pp. 383 – 402.

--- (1986), *History of Statistics*. Cambridge (Mass.).

--- (1988), The dark ages of probability in England. *Intern. Stat. Rev*., vol. 56, pp. 75 – 88. В книге автора *Statistics on the Table*. Cambr. (Mass.) – London, 1999, pp. 239 – 251.

Strode T. (1678), *Short Treatise of the Combinations* etc. London.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Статью Арбутнота 1712 г. старательно комментировали H. A. David & Edwards (2001).

II

Р. К. Арчибальд, К. Пирсон
Абрахам Муавр

R. C. Archibald, K. Pearson, Abraham De Moivre. *Nature*, vol. 117, 1926, No. 2946, p. 551; pp. 551 – 552; No. 2956, p. 894

Р. К. Арчибальд. В интересных и ценных сообщениях К. Пирсон (1924; 1925)[1] указывает некоторые факты (не все новые), после чего Муавр несомненно займёт более важное чем раньше место в истории математики. Эти результаты получены после тщательного анализа *теоремы Якоба Бернулли* и публикации *Approximatio* Муавра 12 ноября 1733 г. По поводу *Approximatio* Пирсон формулирует определённые заявления, которые необходимо комментировать, поскольку из них легко могут быть сделаны неверные выводы. *Approximatio* было сброшюровано вместе с экземпляром книги Муавра *Аналитические этюды* (1730). К. П. отмечает:

Ко многим экземплярам этой книги присоединено Дополнение с отдельной пагинацией, которое заканчивается 14-тизначной таблицей логарифмов от 10! до 900! через каждые 10!. Но лишь к очень малому числу экземпляров присоединено Второе дополнение, также с отдельной пагинацией и датой 12 ноября 1733 г. Оно могло было быть сброшюровано только с экземплярами книги, проданными через три года после начала издания, и потому оно и редко. Тодхантер (1865), видимо, пользовался изданием 1730 г. и потому так и не узнал про это Второе дополнение.

Здесь Пирсон, видимо, сделал две ошибки. Во-первых, поскольку это *Второе дополнение* было сброшюровано в экземпляр книги Муавра, который находится в библиотеке колледжа Лондонского университета, Пирсон посчитал, что оно и являлось вторым дополнением. Во-вторых, поскольку утверждал, что Тодхантер не рассматривал его в своей книге. На самом деле, это *Второе дополнение* было опубликовано по-английски во втором и третьем изданиях *Учения о случае* Муавра (1738; 1756), и Тодхантер рассмотрел его на с. 184, 192 и 193 своей книги. Странно, что во второй части своей первой статьи Пирсон, указав на результаты *Второго дополнения*, замечает:

Тот же материал рассмотрен через 23 года в книге Муавр (1756, с. 243 – 250). Тодхантер (1865, §§ 324 и 325) пояснил эту тему самым поверхностным образом.

Так Пирсон не заметил, что перевод этого *Дополнения* Муавр пересмотрел в 1756 г., а в 1865 г., Тодхантер? Более того, Муавр начинает свой [собственный] перевод с утверждения (которое Тодхантер цитирует):

Я здесь переведу свою заметку, которую напечатал 12 ноября 1733 г. и сообщил некоторым друзьям, но которую так и не опубликовал, оставив за собой право расширить свои собственные размышления в соответствии с требованиями обстановки.

Итак, ясно, что эта заметка не являлась *Вторым дополнением* к *Аналитическим этюдам*, а была впервые опубликована, притом на английском языке, в 1738 г. Фотокопия заметки *Approximatio* [на латинском языке] вскоре появится в журнале *Isis*. Было бы интересно выяснить, сохранились ли иные её экземпляры.

К. Пирсон. Я рад, что письмо проф. Арчибальда позволяет мне вернуться к вопросу о притязании Муавра на первое открытие нормальной кривой ошибок[2], которое обычно приписывается Лапласу или Гауссу.

Судя по написанному проф. Арчибальдом, я не думаю, что он смог увидеть то, что думает, и что действительно может оказаться единственным экземпляром *Approximatio*. Внизу на странице отпечатан тот же орнамент, что и в 1730 г., пагинация такая же необычная, как и первом *Дополнении*, а вид бумаги и формат те же, что в самой книге и в первом *Дополнении.*

Около половины известных экземпляров *Этюдов не* снабжены первым *Дополнением*, и я думаю, что вполне вероятно, что *Approximatio* было присоединено только к нескольким последним экземплярам книги, проданным после ноября 1733 г. Во всяком случае, именно среди них я начал бы отыскивать их *в первую очередь*.

В своей статье я сказал, что Муавр рассмотрел тот же материал в *Учении о случае* в 1756 г., потому что именно с этим изданием я работаю. Проф. Арчибальд справедливо указывает, что Муавр уже в издании 1738 г. включил этот материал, но затем заявляет, что, кроме небольших изменений, в обоих этих случаях дело шло просто о переводе [с латинского]. Это неверно. Наиболее важные для истории статистики изменения были сделаны в обоих изданиях.

Существенный принцип *активирующего божества*, которое сохраняет устойчивые статистические отношения, в 1733 г. отсутствует. Впервые он неуверенно появляется в издании 1738 г., в котором семь строк Следствия 10 увеличились почти до 50, а в 1756 г. одно из следствий занимает примерно четыре страницы или около 160 строк. […] И Муавр справедливо замечает, что оставляет за собой *право расширить свои собственные размышления.* Это расширение развило идею Ньютона о вездесущем активизирующем божестве, которое сохраняет средние статистические значения[3], и составило фундамент статистического развития по цепочке Дерхам [религиозный философ] – Зюссмильх – Нивентит [статистик] – Прайс – Кетле – Флоренс Найтингейл.

С точки зрения математики это быть может не существенно, но это жизненно важно для истории статистики, и ссылка в предпоследнем абзаце моей статьи могла бы указать проф. Арчибальду, что мне было известно о различии между первоначальным *Approximatio* и тем текстом, который появился в *Учении о случае*. Я ошибся в том, что не осознал, что 6 1/2 страниц первоначального текста стало чуть длиннее 8 страниц в 1738 г. и 11 1/2 страниц через 18 лет.

По поводу Тодхантера я не должен ничего изменять. В § 335

он полностью упустил из вида эпохальную суть *Approximatio*, равно как и его расширение в *Учении о случае*. Он же не сказал: Вот первая форма теоремы Стирлинга, первое появление нормальной кривой, вот где Муавр предвосхитил Лапласа так же, как тот предвосхитил Гаусса. Он даже не сослался на тот метод, при помощи которого Муавр расширил теологию Ньютона и направил статистику в новое русло, в котором она проплыла почти столетие.

Почти повсюду в своей книге Тодхантер выхватывает кусочки алгебры из действительно важного мемуара и часто обсуждает его как школьное упражнение. Тем не менее, принципы, включённые в этот мемуар, быть может оказали действительно серьёзное влияние на развитие математической теории статистики, а в конечном счёте и на статистическую практику.

Тодхантеру почти никогда не удавалось ни ухватить общий смысл развития науки, ни рассмотреть это развитие относительно современной ему мысли, которая влияет на науку так же существенно, как наука влияет на общественное мнение. Причины, которые привели Муавра к его *Аппроксимированию* или Бейеса к его теореме, были скорее теологическими и социологическими, чем чисто математическими, и пока не будет признано, что после-ньютоновские английские математики находились под большим влиянием теологии Ньютона, чем под влиянием его математики, история науки XVIII в. и особенно история науки учёных − членов Королевского общества останется непонятой.

Р. К. Арчибальд. Путешествуя по странам, в общественных библиотеках которых журнал *Nature* отсутствовал, я только сегодня смог просмотреть свою опубликованную заметку и комментарий проф. Пирсона. Я не могу признать себя ответственным за утверждение, которое он приписал мне, а именно за то, что считал, что *кроме небольших изменений* в обоих этих изданиях [в 1738 и 1756 гг.] *дело шло просто о переводе*.

Фактически я написал, что в обоих изданиях перевод памфлета[1733 г.] появился с небольшими изменениями. Я всё ещё полагаю, что это утверждение абсолютно верно. Да, конечно, в 1756 г. введены Замечания и другие материалы, и проф. Пирсон считает, что они имеют громадный исторический интерес. Я рад, что моё письмо привело к дальнейшим комментариям об истории статистики.

Хотел бы добавить, что своё письмо я написал, имея перед собой фотокопию памфлета, на что и намекает моя ссылка на журнал *Isis*. Типографские доводы, вопреки предположению проф. Пирсона, вряд ли привели бы меня к его выводам. Но ввиду положительного утверждения Муавра о том, что содержание его памфлета было впервые *опубликовано* в 1738 г., я не считаю возможным считать этот памфлет, который он *сообщил некоторым друзьям*, вторым дополнением к *Этюдам*.

Моя последняя фраза была: Было бы интересно выяснить, *сохранились ли иные экземпляры* [памфлета]. Я здесь в Берлине обнаружил ещё один экземпляр в Preussische Staatsbibliothek

[ныне, Государственная Библиотека в Берлине], приплетённый к *Этюдам*. Есть ли другие экземпляры[4]?

Примечания

1. Арчибальд сослался на статьи *за* 1924 и 1925 гг. Мы подобрали единственно возможные статьи. Пирсон (1925, с. 202) справедливо заметил, что результаты Якоба Бернулли были слишком грубы (в основном потому, что формула Стирлинга не была ещё известна), но недопустимым образом сравнил закон Бернулли с неверной птолемеевой системой мира (а Муавра – с Кеплером и Ньютоном).

2. Нормальная кривая ошибок: так было принято называть нормальную кривую вообще. Никакого отношения к теории ошибок она здесь не имела.

3. Ньютон не высказывал подобных идей (хотя и полагал, что Бог регулярно избавляет систему мира от накапливающихся неправильностей, см. ниже). В 1971 г., отвечая на наш вопрос по этому поводу, Э. Пирсон указал:

Прочитав [K. Pearson (1978)], *я думаю, что понимаю, что имел в виду К. П.* [...] *Он пошёл дальше Ньютона в том смысле, что утверждал, что законы, которые свидетельствуют о предначертании, проявляются в устойчивости средних значений наблюдений* ...

С тех пор мы заметили, что К. Пирсон (там же, с. 161 и 653) приписал Муавру (De Moivre 1733/1756, с. 251 – 252) божественную *устойчивость статистических соотношений, т. е. предопределение или предначертание* и сослался на Лапласа, который, впрочем, никогда не упоминал предначертания.

4. Daw & E. S. Pearson (1972) разыскали пять экземпляров Второго дополнения, два из которых (а не три, как они указали) нашли мы для них, по одному в Москве и Петербурге. Они также, разумеется, согласились с Арчибальдом в том, что на самом деле рассматриваемый мемуар Муавра вовсе не был дополнением к *Этюдам*.

Библиография

Шейнин О. Б. (1970), К истории предельных теорем Муавра – Лапласа. *История и методология естественных наук*, вып. 9, с. 199 – 211.

--- (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. **S, G,** 11.

Archibald R. C. (1926), A rare pamphlet of Moivre and some of his discoveries. *Isis*, vol. 8, pp. 671 – 675 + 7 с. фотокопии первоначального латинского текста 1733 г.

Daw R. H., Pearson E. S. (1972), Abraham De Moivre's 1733 derivation of the normal curve: a bibliographic note. *Biometrika*, vol. 59, pp. 677 – 680. Перепечатка: Kendall M. G., Plackett R. L., редакторы (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2, pp. 63 – 66.

De Moivre A. (1730), *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*. London. Французский перевод: Париж, 2009.

--- (1733), Approximatio … Method of approximating the sum of the terms of the binomial $(a + b)^n$ etc. В книге автора (1738; 1756). В 1756 г., pp. 243 – 254. Первоначальный латинский текст: Archibald (1926).

--- (1718, 1738, 1756), *Doctrine of Chances*. London. Перепечатка третьего издания: New York, 1967.

Montmort P. R. (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris, 1713. New York, 1980.

Pearson K. (1924), Historical note on the origin of the normal curve of errors. *Biometrika*, vol. 16, pp. 402 – 404.

--- (1925), James Bernoulli's theorem. Ibidem, vol. 17, pp. 201 – 210.

--- (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries etc*. London. Лекции 1921 – 1933 гг. Редактор E. S. Pearson**.**

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

III

С. М. Стиглер

Бошкович, Симпсон и рукописная заметка 1760 г. о пригонке линейного отношения

Stephen M. Stigler, Boscovich, Simpson and a 1760 manuscript note on fitting a linear relation. *Biometrika*, vol. 71, 1984, pp. 615 – 620

1. Симпсон и Бошкович

В истории статистики Симпсон известен по одной работе. В 1755 г. он зачитал рукопись в Королевском обществе, в которой применил своего рода производящие функции, которые Муавр ранее использовал для изучения игры в кости, к определению распределения средней ошибки. Он предположил, что ошибки независимы [это – неявно], и что при осреднении они следуют дискретному равномерному или дискретному треугольному распределению[1]. В 1757 г. он снова опубликовал эту работу, несколько расширив её, и по существу перешёл к пределу, отыскав распределение суммы или среднего ошибок, распределённых по тем же самым, но непрерывным законам (Simpson 1756, 1757; Seal 1949; Plackett 1958; Sheynin 1973a).

Аналогично, Роджер Иосип Бошкович известен по одной работе: в 1757 г. он сформулировал вопрос, который мы опишем в форме пригонки прямой к данным наблюдения при условиях, что сумма остаточных уклонений равна нулю, а сумма абсолютных уклонений минимальна. В 1760 г. он опубликовал геометрическое решение этой задачи. Позднее Лаплас перевёл его в аналитическую форму, недавно описанную как предшественницу современной устойчивой регрессии (Eisenhart 1961; Sheynin 1973b, 1977; Stigler 1973).

Симпсон и Бошкович были современниками, но жили они в разных странах. Международные путешествия были в то время редкими, и вопрос о том, переписывались ли они, тем менее, − встречались ли они, видимо, и не задавался. Однако, основываясь на недавно обнаруженной отрывочной рукописи, мы можем теперь сказать, что они не только встречались, но при встрече обсуждали [ещё не существовавшую!] математическую статистику.

Симпсон родился в 1710 г. и умер в мае 1761 г. Лучший отчёт о его жизни подготовила Clarke (1929), см. также Wallis (1981). Он, видимо, путешествовал мало, а более поздние годы жизни провёл в Вулидже (ныне часть Лондона), в учебном заведении, позднее ставшим Королевской военной академией.

Мир Бошковича был обширнее. Он родился в Дубровнике, ныне в Югославии [в Хорватии], в 1711 г. Он учился в Риме, а будучи взрослым, жил большей частью в Италии или Париже. В 1760 г. его путешествия привели его в Лондон, где он оставался около шести месяцев. Опубликованные отчёты о жизни

Бошковича (Hill 1961; Markovic 1981) установили его контакты с несколькими английскими учёными, включая [американца!] Бенджамина Франклина, но из обсуждаемых тем называлась лишь астрономия, притом подробностей о пребывания Бошковича в Лондоне оказалось немного.

Впрочем, крохотная информация о нём нашлась в бумагах Симпсона. После смерти его бумаги в конце концов попали в громадную коллекцию рукописей, которая в начале нынешнего века была продана с аукциона. Бумаги Симпсона приобрёл Раймонд Кларк Арчибальд из университета Брауна [Провиденс, Род-Айленд], который отдал их историку математики Дэвиду Юджину Смиту из Колумбийского университета (Нью- Йорк). По указаниям Смита Френсис Маргарет Кларк использовала их в качестве основного источника своего исследования (1929). Её кропотливый труд описывает почти всё интересное в архиве, но один отрывок ускользнул от неё (*Задача, которую мне предложил* Boscowitze).

Симпсон неторопливо изложил её, вначале сформулировав её словесно, затем в символах. […] Есть две причины для датировки этого отрывка 1760-м годом. Во-первых, чёткое упоминание имени Бошковича. Его единственное посещение Лондона продлилось с мая до середины декабря 1760 г., Симпсон же умер совсем вскоре, и сомнительно, чтобы он узнал об этой задаче из позднейшей переписки. Вторая причина: на том же двойном листе описан, видимо, переписанный или переведённый комментарий анонимного учёного, вероятно Бошковича, о вычислении орбит комет с непосредственной ссылкой на диссертацию 1744 г., как отпечатанную 16 лет ранее.

2. Задача и решение Симпсона

Мы приводим формулировку задачи Бошковичем, её новое аналитическое описание и неполное решение Симпсоном. Всё это следует учесть и ввиду редкости оригинальных работ того времени, и потому, что это обеспечит интересный взгляд на математические подходы в XVIII в. Сам Бошкович был последователем Ньютона, и его математический стиль был поэтому существенно геометрическим. Симпсон, однако, ведущий английский аналист своего времени, и, хоть и являлся бледной тенью Эйлера, был ведущим аналистом Европы[2].

Задача, которую мне предложил Boscowitze

Пусть заданы любое число величин *a, b, c, d, e, …* и требуется отыскать их поправки под условиями

1. Их разности могут быть[3] в заданном отношении
2. Сумма положительных поправок может быть равна сумме отрицательных
3. Сумма положительных или сумма отрицательных поправок может быть минимальной

Пусть найдены поправки p, q, r, s, t. Исправленные величины будут

$a + p, b + q, c + r, d + s, e + t.$

1. $a + p – b – q, b + q – c – r, c + r – d – s, d + s – e – t$. Их разности должны быть в заданном отношении к величинам k, l, m, n.
2. $p + q + r + s + t = 0$.
3. Сумма положительных или отрицательных должна быть минимальной.

Следует решение Симпсона

Пусть поправки будут $x, x + y, x + z, x + u, x + w, \ldots$ Тогда исправленные значения будут $a + x, b + x + y, c + x + z, d + x + u, \ldots$ Вычитая первое из всех остальных, получим $\alpha + y, \beta + z, \gamma + u, \delta + w, \ldots$, которые должны быть в отношениях $p, q, r, s, \ldots$ Поэтому

$$\beta + z = \frac{p(\alpha + y)}{q},\ \gamma + u = \frac{p(\alpha + y)}{r},\ \delta + w = \frac{p(\alpha + y)}{s}, \ldots$$

откуда

$$z = \frac{p\alpha}{q} - \beta + \frac{py}{q},\ u = \frac{p\alpha}{r} - \gamma + \frac{py}{r}, \ldots$$

Поправки поэтому будут равны

$$x,\ x + \frac{p\alpha}{q} - \beta + \frac{py}{q},\ x + \frac{p\alpha}{r} - \beta + \frac{py}{r}, \ldots$$

Их сумму приравниваем нулю:

$$nx = \beta + \gamma + \delta \ldots, -\frac{p\alpha}{q} - \frac{p\alpha}{r} - \frac{p\alpha}{s}, \ldots,\ -py[\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}], \ldots.$$

Поэтому $x = k + Uy$ и поправки окажутся равными $A + A_1y$, $B + B_1y, C + C_1y, \ldots$ ($A, A_1, B, B_1, \ldots$ здесь известны). Пусть эти величины $A + A_1y, B + B_1y, \ldots$ последовательно равны нулю, т. е. пусть

$$y = A/A_1, B/B_1, \ldots$$

Тогда то значение y, которое определит минимальную сумму положительных или отрицательных поправок, окажется искомым.

Для оценки этих вычислений полезно применить современные обозначения и терминологию. Представим себе множество пар значений $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ Мы увидим, что задача Бошковича сводится к установлению пригнанного линейного отношения

$$\hat{Y}_1 = \beta_0 + \beta_1 X_i,$$

удовлетворяющего определённым условиям. Обозначения Бошковича *a, b, c, d, e, …* это наши $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, \ldots$ Исправленные значения $a + p, b + q, \ldots$ окажутся нашими $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \ldots$, а поправки *p, q, …* − уклонениями пригнанное минус наблюдённое, $R_i = \hat{Y}_i - Y_i$.

Первое условие, что разности исправленных значений должны быть в заданном отношении, являлось ранним и по существу геометрическим способом выражения того, что уравненные значения линейно относятся к известным величинам.

Продолжаем. Это условие требует, чтобы

$$\frac{\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2}{k} = \frac{\hat{Y}_2 - \hat{Y}_3}{l} = \frac{\hat{Y}_3 - \hat{Y}_4}{m} = \frac{\hat{Y}_4 - \hat{Y}_5}{n} \qquad (1)$$

с известными знаменателями. Удобно записать это в виде

$$\hat{Y}_1 = \beta_0 + \beta_1 X_i,$$

где β_1 − постоянное отношение (1) и

$$k = X_1 - X_2,\ l = X_2 - X_3,\ m = X_3 - X_4,\ n = X_4 - X_5.$$

Таким образом, вычисление *поправок* равносильно установлению β_0 и β_1. Второе условие Бошковича более известно. В наших обозначениях оно означает, что

$$\sum_i (\hat{Y}_i - Y_i) \equiv \sum_i R_i = 0,$$

т. е. что сума уклонений равна нулю. Третье условие также известно. Сумма абсолютных значений положительных или отрицательных значений уклонений в соответствии со вторым условием будет равна половине суммы $|\hat{Y}_i - Y_i|$.

Иначе, третье условие означает: следует *привести к минимуму сумму* $|R_i|$. Итак, отказываясь от устаревших обозначений и терминологии, задача Бошковича такова: даны пары (X_i, Y_i). Требуется найти такие β_0 и β_1, что, при $\hat{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$, сумма

$(\hat{Y}_i - Y_i) = 0$ и сумма $|\hat{Y}_i - Y_i|$ были минимальны.

Симпсон поменял обозначения. Он принимает, что $x = R_1$ (первое уклонение) и записывает остальные в функции первого. Например

$$x + y = R_2,\ x + z = R_3 \text{ и потому } y = R_2 - R_1 \text{ и } z = R_3 - R_1.$$

Уравненные значения оказываются такими

$\hat{Y}_1 = a + x,\ \hat{Y}_2 = b + x + y, \ldots$

Величина *p* Бошковича стала *x*, и Симпсон смог записать, что

$\alpha + y = \hat{Y}_2 - \hat{Y}_1$, так что $\alpha = Y_2 - Y_1$,

$\beta + z = \hat{Y}_3 - \hat{Y}_1$, так что $\beta = Y_3 - Y_1$, …

Затем Симпсон применяет обозначения *p, q, r, s* в смысле, отличном от Бошковича; в наших обозначениях, он принимает, что

$p = 1/(X_2 - X_1)$, $q = 1/(X_3 - X_1)$, $r = 1/(X_4 - X_1)$, $s = 1/(X_5 - X_1)$.

Его уравнения $\beta + z = p(\alpha + y)/q$, … это $\hat{Y}_i - \hat{Y}_1$, записанные как кратные $\hat{Y}_2 - \hat{Y}_1$, и он определяет из них *z, u*, … Для *z* он фактически получает $R_3 - R_1 =$

$$\frac{X_3 - X_1}{X_2 - X_1}(Y_2 - Y_1) - (Y_3 - Y_1) + \frac{X_3 - X_1}{X_2 - X_1}(R_2 - R_1).$$

Складывая эти уравнения с $x = R_1$, Симпсон получает выражения для первой, третьей и четвёртой *поправок* или уклонений, но каким-то образом исключает вторую, которая, видимо, равна $x + y$ или $R_1 + (R_2 - R_1)$.

Он суммирует *n* подобных выражений и получает сумму R_i, которую приравнивает нулю, чтобы, вместе с пропущенным по ошибке членом (в наших обозначениях) $– y = – py/p$, получить в правой части $nR_1 =$

$$\sum_{i=3}^{n}(Y_i - Y_1) - \sum_{i=3}^{n}\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X_i - X_1) - \frac{R_2 - R_1}{X_2 - X_1}\sum_{i=3}^{n}(X_i - X_1).$$

Симпсон замечает, что при делении на *n* частное принимает вид $R_1 = k + U(R_2 - R_1)$, где *k* и *U* зависят только от наблюдённых X_i и Y_i. Подставляя это вместо R_1 в предыдущие уравнения, он смог записать все *поправки* в виде линейных функций $y = R_2 - R_1$:

$R_1 = A + A_1(R_2 - R_1)$, $A = k$, $A_1 = U$,

$R_2 = B + B_1(R_2 - R_1)$, $R_3 = C + C_1(R_2 - R_1)$, …

где величины *A, B, C* зависят только от наблюдённых X_i и Y_i.

И Симпсон объявляет *решение*: он последовательно принимает $R_i = 0$, получает *n* значений для $y = R_2 - R_1$, именно – A/A_1, $– B/B_1$, $– C/C_1$; знак минус он упустил. Эти значения следует проверить: наименьшая сумма $|R_i|$ будет соответствовать решению. Если оно равно *y**, то наилучшими *поправками* будут

$R_1 = A + A_1y^*, R_2 = B + B_1y^*, \ldots$ (2)

Он, таким образом, не получил полного решения, но ограничил выбор множеством *n* значений. Последний шаг был верен, но его обоснование неясно. Итак, Симпсон включил условие сумма $R_i = 0$ в формулировку задачи. Его выражения (2) для R_i можно привести к виду

$$R_i = \bar{Y} - Y_i - (\bar{X} - X_i)\left[\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} + \frac{R_2 - R_1}{X_2 - X_1}\right] =$$

$$\bar{Y} - Y_i - (\bar{X} - X_i)\frac{\hat{Y}_2 - \hat{Y}_1}{X_2 - X_1} = \bar{Y} - Y_i - \frac{\bar{X} - X_i}{\beta_1} =$$

$$\bar{Y} - Y_i - \frac{\bar{X} - X_i}{\beta_1}.$$

При условии, что сумма R_i равна нулю, которое таким образом включено в задачу, и по существу определяет β_0, нам теперь известно, что значение β_1, приводящее к минимуму эту сумму, должно означать, что по крайней мере одно уклонение равно нулю. Поэтому проверка всех $b_i =$

$$\frac{\bar{Y} - Y_i}{\bar{X} - X_i}$$

достаточна для обеспечения минимума. Но теперь нам это известно из линейного программирования, и нельзя объяснить. установил ли это Симпсон каким-то образом для своего специального случая или просто угадал его. Во всяком случае, пошло ещё 27 лет, пока Лаплас не привёл полного аналитического решения этой задачи, показав, что взвешенная медиана значений b_i является верной выборкой из *n* возможных значений (Eisenhart 1961; Stigler 1973; Sheynin 1977).

3. Другие работы

У нас нет никаких сведений о том, что ещё обсуждали Бошкович и Симпсон. Бошкович, видимо, уже владел своим собственным геометрическим решением в 1757 г., т. е. до встречи с Симпсоном, и опубликовал его в малоизвестном комментарии к латинской поэме. Эта публикация могла произойти до путешествия Бошковича в Лондон, но в отрывочной рукописи нет предположения о том, что Бошкович сообщил Симпсону что-то ещё кроме формулировки задачи. Нет также никаких указаний на то, что Симпсон передал свой анализ Бошковичу, хоть естественно предположить, что он так и сделал, если только

ухудшение его здоровья, которое привело к его смерти в мае 1761 г., не помешало ему.

До получения новой информации основное значение этого отрывка состоит в том, что он является дополнительным свидетельством раннего международного сотрудничества по одной из основных ранних задач математической статистики.

Шейнин (1973b) обнаружил рукопись без даты в архиве Бошковича в Беркли о распределении сумм [случайных величин]. Выявленный контакт между Симпсоном и Бошковичем, видимо, повышает вероятность того, что эта рукопись была написана после 1760 г. и возможно была предположена Симпсоном в качестве ответа на задачу Бошковича[4]!

Бумаги Симпсона содержат мало интересного для статистиков, не описанного Clarke (1929); в основном это два листика с отрывочными черновыми записями, относящимися к Симпсону (1755), но есть ещё одна дразнящая задача, для которой мы можем установить границы даты от 8 октября 1754 г. до 13 апреля 1756 г., т. е в период, когда он изучал распределение средних. Вот она:

Из четырёх данных точек провести прямые в одну и ту же точку так, чтобы сумма квадратов их длин была минимальна.

Её решение оказалось бы, разумеется, специальным случаем применения метода наименьших квадратов, хотя Симпсону было бы исключительно просто решить её. Это было ему, конечно же, ясно, но нет никаких указаний на то, что решение было когда-либо опубликовано, неизвестной осталась причина появления задачи, не было и её решения.

Примечания

1. На самом деле Симпсон предположил, что этим распределениям подчинялись ошибки наблюдения (два варианта), а не их средние.

2. Аналитиком, притом гораздо более крупным, был Варинг (Уоринг), 1734 – 1798, и, конечно же, Муавр. По поводу отношений Симпсона и Муавра Pearson (1978, с. 145) назвал Симпсона *сомнительнейшей личностью*, а на с. 184 *бесстыдным лжецом* и *отъявленным подлецом*.

3. *Могут быть*: это непонятно. В дальнейшем оказалось (как и должно было случиться) *должно быть*. По поводу задачи Ферма см. Monjardet (1991).

4. Задача, которую Бошкович решил в этой рукописи, была крайне элементарна, и поэтому Симпсон никак не мог бы предложить её.

Библиография

Шейнин О. Б. (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. **S, G,** 11.

Clarke F. M. (1929), *Thomas Simpson and His Times*. New York.

Eisenhart C. (1961), Boscovich and the combination of observations. В сборнике *Roger Joseph Boscovich, 1711 – 1787* etc. Редактор L. L. Whyte. London, pp. 200 – 212. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 88 – 100).

Hill E. (1961), Roger Boscovich, a biographical essay. *Roger Joseph Boscovich, 1711 – 1787* etc. Редактор L. L. Whyte. London, pp. 17 – 101.

Kendall M. G., Plackett R. L., редакторы (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London.

Markovic Z. (1981), Boskovic. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 2, pp. 326 – 332.

Monjardet B. (1991), Eléments pour une histoire de la médiane métrique. В сборнике *Moyenne, milieu, centre. Histoires et usages*. Редакторы J. Feldman и др. Paris, pp. 45 – 62.

Pearson K. (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries* etc. Лекции 1921 – 1933 гг. Редактор E. S. Pearson. London.

Plackett R. L. (1958), The principle of the arithmetic mean. *Biometrika*, vol. 45, pp. 130 – 135. Перепечатка: Pearson E. S., Kendall M. G., редакторы (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability*. London, pp. 121 – 126.

Seal H. L. (1949), The historical development of the use of generating functions in probability theory *Bull. Assoc. Actuaires Suisses*, t. 49, pp. 209 – 228. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 67 – 86).

Sheynin O. (1973a), Finite random sums (a historical essay). *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 9, pp. 275 – 305.

--- (1973b), Boscovich's work on probability. Ibidem, pp. 306 – 324. **S, G,** 43.

--- (1977), Laplace's theory of errors. Ibidem, vol. 17, pp. 1 – 61.

Simpson T. (1756), On the advantage of taking the mean of a number of observations etc. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 49, pp. 83 – 93. **S, G,** 14.

--- (1757), То же название. В книге автора *Miscellaneous Tracts* etc. London. **S, G,** 14.

Stigler S. M. (1973), Laplace, Fisher and the discovery of the concept of sufficiency. *Biometrika*, vol. 60, pp. 439 – 445.

Wallis P. J. (1981), Simpson, Thomas. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 12, pp. 443 – 445.

IV

Р. У. Фейрбрадер

Дополнительные подробности о контактах Бошковича и Симпсона в июне 1760 г.

R. W. Farebrother, Further details of contacts between Boscovich and Simpson in June 1760. *Biometrika*, vol 77, 1990, pp. 397 – 400

1.Введение

Stigler [iii] недавно описал два рукописных отрывка из коллекции рукописей Томаса Симпсона, которая хранится в Колумбийском университете, Нью Йорк. Эти отрывки содержат формулировку двух математических задач и неполное решение Симпсоном второй из них. В современных обозначениях эти задачи таковы.

1. Определить значения a и b, которые приводят к минимуму сумму квадратов евклидовых расстояний между n заданными точками (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, и неизвестной точкой (a, b) при $n = 4$:

$$\sum_{i=1}^{n}[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] = \min. \qquad (1)$$

2. Определить значения a и b, которые приводят к минимуму сумму абсолютных *вертикальных* расстояний между n заданными точками

(x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, и прямой $y = a + bx$

$$\sum_{i=1}^{n} \text{абс. значение}\,(y_i - a - bx_i) = \min \qquad (2)$$

при ограничительном условии

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0. \qquad (3)$$

Вслед за Стиглером мы сосредоточимся на втором отрывке, который Симпсон озаглавил *Задача, которую мне задал Boscovitze* и которую Стиглер ([ ], с. 616) поэтому относит к периоду единственной поездки Бошковича в Англию, т. е. к маю – декабрю 1760 г. Этот отрывок содержит формулировку задачи Бошковича и её неполное аналитическое решение Симпсоном. Впрочем, Стиглер (с. 619) замечает, что

Нет никаких указаний на то, что Симпсон сообщил Бошковичу про своё исследование, хоть естественно предположить, что он так и сделал бы.

В феврале 1989 г. мы смогли ознакомиться с документированной биографией Бошковича (Paoli 1988), и нам было приятно обнаружить (с. 127), что 12 июня 1760 г. Бошкович написал своему брату Бартоломео (Баро), что встретил Симпсона в доме Ирка Ирвина, и снова (с. 131), 27 июня 1760 г., сообщил ему же, что получил от Симпсона прекрасное алгебраическое решение своей задачи.

Эти письма входят в коллекцию рукописей Бошковича в Калифорнийском университете в Беркли, и мы переписываем их на итальянском языке и в переводе.

2. Письмо Бошковича

Мы благодарны C. E. J. Griffiths из Манчестерского университета за переписывание части письма Бошковича 27 июня 1760 г. [Следует итальянский текст.]

Гриффитс также перевёл эту выдержку, и после согласованных изменений, перевод оказался таким. Вместо отдельных слов, разобрать которые было невозможно, мы указываем […].

В понедельник я был на трапезе у доктора Ирвина. Присутствовали Симпсон, Bevis, два брата Маскелайны и Сиссон. Симпсон принёс прекрасное алгебраическое решение моей задачи о поправке градусов [меридиана], *которое я вставил в приложения к Stay, но без применения дифференциального исчисления. Он сказал, что здесь это исчисление ни к чему, во всяком случае оно* [решение при его помощи?] *не является прямым но некоторым образом* […].

Он вносит аналитические значения всех поправок в одно из значений, что нетрудно, как я показал. Приравнивая каждое из этих значений [по очереди] *нулю, он получает значение неизвестного, которое подставляется во все остальные значения поправок. Складывая все положительные, он выбирает наименьшую сумму. Это хорошо, потому что даже при моём геометрическом решении получается так, что в случае минимума одна поправка исчезает. Но я иначе определяю, какая из них исчезает. Он* […] *вряд ли думал об этом, и конечно же он великий геометр и аналист. Все его опубликованные работы прекрасны, как мне говорят.* […]

Эта выдержка ясно описывает решение Симпсона, см. Стиглер ([iii], с. 616 – 617), но к сожалению не объясняет как Симпсон узнал или догадался, что одна из поправок исчезает при минимуме.

3. Обсуждение

В § 2 мы узнали, что Бошкович получил решение Симпсона лично от него, и. надо полагать, в письменном виде, в какой-то из понедельников между 12 и 26 июня 1760 г. Мы также узнали, что Бошкович был высокого мнение о работах Симпсона. Оно и оставалось высоким по меньшей мере четыре года, поскольку список основных сочинений, отобранных Бошковичем для своих студентов в университете Павия [Италия] в 1764 г., включал труды Аньези, Эйлера, Гюйгенса, Даламбера, Ньютона,

Маклорена, Крамера, Грегори, Майера, Симпсона, Коутса, Галлея, Бернулли, Лейбница, Декарта и Галилея (Paoli 1988, с. 182)[1].

Паоли (с. 127, 145) также отметил, что Невиль Маскелайн, будущий Королевский астроном, и другие ведущие учёные Королевского общества в двух случаях выпили за здоровье Бошковича и Стея. В свете середины XVIII в. критика Бошковича (Glaisher 1873, с. 112; Стиглер ([iii], с. 618) за публикацию некоторых оригинальных трудов *в малоизвестных комментариях к латинской поэме* Стея (1760) была вероятно необоснованной. Заметим, что *малоизвестное* (Стиглер) должно было относиться к обнаружению комментария, поскольку сам по себе он вовсе не был малоизвестен (Стиглер 1986; Farebrother 1990).

Далее, возможность того, что Бошкович опубликовал геометрическое решение собственной задачи *до своей поездки в Лондон*, см. Стиглер ([iii], с. 619), опровергается утверждением Паоли (1988, с. 127): 12 июня 1760 г. Бошкович написал своему брату, что второй том поэмы Стея почти закончен и вскоре будет отослан для публикации.

Интересно, наконец, отметить (Паоли, с. 131), что в Лондоне Бошкович встретил Джошуа Рейнольдса [живописца, члена Королевского общества] и говорил с ним по-итальянски, а также и Сэмуэла Джонсона [1709 – 1784, автора *Словаря англ. языка*, 1755 и 1883] и говорил с ним на латинском языке. Boswell (1791, с. 181, 272) подтверждает эти факты.

4. Задачи Ферма

Для Симпсона решение первой задачи действительно *было бы* тривиально, см. Стиглер ([iii], с. 619), но этого же нельзя сказать про нашу третью задачу, см. § 5. Вот два примера на неё.

В конце основного текста своего латинского очерка о максимумах и минимумах Ферма (Tannery & Henry 1891, с. 513) сформулировал задачу, которую можно привести в следующем виде: даны три точки; найти четвёртую так, чтобы сумма расстояний от неё до данных точек была минимальной.

Аналогично, в конце французского письма к придворному врачу De La Chambre (Tannery & Henry 1894, с. 358), Ферма сформулировал задачу, которую можно привести в следующем виде: даны две точки, C и A, и прямая DB[F]. Найти такую точку [B] на этой прямой, чтобы сумма расстояний CB и половины BA оказалась минимальной среди всех подобных сумм; либо такую, чтобы сумма CB и удвоенной BA оказалась минимальной.

5. Обсуждение

Заменим выражение (1) на

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2}, \qquad (4)$$

где w_1, w_2, …, w_n − известные положительные веса. Мы получим третью задачу, которую Kuhn (1967, с. 39 – 40) приписал

Симпсону (1750) при $n = 3$ и Ферма (1638/1891, с. 153), см. выше, при $n = 3$ и $w_1 = w_2 = w_3 = 1$. Поэтому последующее (в 1754 – 1756 гг.) применение Симпсоном квадратов расстояний и $n = 4$ точек вместо абсолютных расстояний и $n = 3$ в первой задаче существенно, но нет свидетельств, что он ценил практическую выгоду выбора целевой функции, которая легко приводится к минимуму при всех значениях n.

Ни Симпсон, ни Ферма не решили в явном виде эти варианты нашей третьей задачи, но Boyer (1959, с. 205 – 206) обратил внимание на переписку Ферма с De La Chambre в августе 1657 г. и с Clerselier в мае 1662 г. (Tannery & Henry 1894, с. 354 – 358 и 464 – 484), в которой приведены подробности о решении Ферма родственной задачи из оптики. В этой задаче (см. § 4), по существу b выбирается так, чтобы свести к минимуму (4) при $n = 2$, $a = 0$ и $w_1 = 2w_2$ или $w_2 = 2w_1$.
Далее, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ и $a = x_1$ выражение (4) становится суммой

$$w_i|y_i - b|.$$

Оно определяет взвешенную медиану величин y_i и весьма схоже с формулировкой Симпсона задачи Бошковича, см. Стиглер ([ ], с. 618) при $w_i = |\bar{X} - X_i|$ и $y_i = (\bar{Y} - Y_i) / (\bar{X} - X_i)$.

Заметим, наконец, что Kuhn (1967) интересным образом обсуждает раннюю литературу по двойственности в нелинейном программировании.

Признательность. Я признателен Accademia Nazionale della Scienze detta dei XL за экземпляр бесценной биографии Бошковича проф. Паоли, библиотекарю Калифорнийского университета в Беркли за копию письма Бошковича 27 июня 1760 г. и C. E. J. Griffiths из Манчестерского университета за переписку и перевод выдержки в § 2.

Примечания

1. Серьёзнейший список! Мария Гаэтана Аньези, 1718 – 1799, математик и философ. Известна *локоном Аньези*. Работы по дифференциальному исчислению. Габриэль Крамер, 1704 – 1752, один из основателей линейной алгебры. Предложил термин *моральное ожидание*, который оставался общераспространённым несколько десятилетий. Даниил Бернулли ввёл его в своём мемуаре 1738 г. со ссылкой на Крамера. По предложению Лапласа, *ожидание* поэтому заменили *математическим ожиданием*. О мемуаре Майера 1750 г. см. Шейнин (2013, § 7.3.2). Бернулли: видимо, Иоганн Бернулли, хотя и Якоба также следовало бы назвать.

Библиография

Шейнин О. Б. (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. **S, G,** 11.

Boswell J. (1791), *The Life of Samuel Johnson*. London, 1938, Chicago, 1952. 133 – 179.

Farebrother R. W. (1990), Boscovich′ method for correcting discordant observations. *Acta Enc.* (Italiana). [R. J. Boscovich. Редактор P. Bursill-Hall. Roma, 1993, pp. 255 – 261.

Glaisher J. W. L. (1873), On the form of the cells of bees. *Phil. Mag*., 4th ser., vol. 46, pp. 103 – 122.

Kuhn H. W. (1967), On a pair of dual nonlinear problems. В сборнике *Nonlinear Programming*, pp. 37 – 54. Редактор J. Abadie. Amsterdam.

Maire C., Boscovich R. J. (1755), *De litteraria expeditione per Pontificiam Ditionem*. Rome. Французский перевод: Paris, 1770.

***Paoli G.** (1988), Ruggiero Giuseppe Boscovich nella scienza e nella storia del '700. Rome.*

Simpson T. (1750), *Doctrine and Application of Fluxions*. London.

Stay B. (1760), *Philosophiae Recentioris* …, t. 2. Аннотирован Бошковичем. Rome. Французский перевод §§ 385 – 397 включён во французское издание книги Maire, Boscovich (1755).

Stigler (1986), *The History of Statistics*. Cambridge, Mass.

Tannery P., Henry C. (1891 – 1922), *Oeuvres de Fermat*. Четыре тома и Дополнение. Paris.

V

Дж. В. Фильд

Тихо Браге, Кеплер и понятие ошибки

J. V. Field, Tycho Brahe, Kepler and the concept of error. *Miscellanea Kepleriana. Festschrift Bialas*. Редакторы Boockmann и др. Augsburg, 2005, pp. 143 – 155.

Ныне мы считаем само собой разумеющимся, что наука движет технику. Действительно, для обычного читателя и прежде всего для журналистов основной интерес в научном продвижении, видимо, сосредоточен в новых технических возможностях. […] Однако, прогресс техники за счёт науки начался лишь в XIX в., и наиболее разительным ранним примером был подъём электротехники, последовавший за открытиями Фарадея. До того времени деятельность физиков и инженеров относилась к независимым традициям, намного отличным друг от друга и социально, и интеллектуально.

Существовали, конечно, какие-то контакты между учёными и ремесленниками. Впрочем, сравнительно убедительных примеров конкретного, значимого взаимодействия немного, и, вопреки нынешней его схеме, техника всегда вела физику. Иногда, конечно же, наблюдения деятельности практиков приводили учёных к новым теоретическим результатам. Так, Кеплер, во Введении к своей книге об объёмах тел (1615), которые мы ныне назвали бы телами вращения, сообщил, почему он начал обдумывать эту математическую задачу. Оказалось, что он заметил, что торговец, который поставил вино для его, Кеплера, свадебного празднества, оценивал его количество в каждой бочке при помощи стержня, вставленного в отверстие в её затычке.

Этот случай не был единственным в жизни Кеплера. Во время своего пребывания в Праге, при дворе императора Священной Римской империи Рудольфа II (род. 1552, правил в 1576 – 1612), он, видимо, вошёл в привычку обсуждать математические темы с придворным часовщиком Бюрги, который до переезда в Прагу был часовых дел мастером и приборостроителем у знаменитого астронома Вильгельма IV, ландграфа Гессен – Касселя (1532 – 1592). Более того, от случая к случаю Кеплер занимался механическим изобретательством и, быть может, вообще интересовался работой ремесленников (Prager 1973).

Я предполагаю рассмотреть другой эпизод, в котором интерес Кеплера к технике проявился, возможно, в том, что в 1600 – 1605 гг. он использовал астрономические наблюдения Тихо Браге при своих вычислениях орбиты Марса[1]. Они привели его к двум первым законам планетных движений, а потому явились критически важными для истории астрономии. Но они же были исключительно интересными для истории науки в целом, потому что ввели понятие об ошибке наблюдения[1].

Историки астрономии согласны в том, что первое явное рассмотрение ошибок наблюдения имело место в отчёте Кеплера

о своих вычислениях орбиты Марса (*Новая астрономия*, 1609)[2]. Он потребовал, чтобы орбита, предложенная им для этой планеты, согласовывалась с её наблюдёнными местами в пределах ошибок наблюдений Тихо. К этой книге мы вернёмся ниже, но вначале рассмотрим, как понятие об ошибках, столь естественное сегодня, и, видимо, молчаливо воспринятое (почти всеми) его профессиональными коллегами (Prager 1973), каким-то образом не стало до того частью математической науки астрономии.

1. Ошибки и астрономические наблюдения до Тихо

Более ранние сочинения не упоминают ошибок наблюдения в нашем понимании, но, к счастью, это умолчание не обязательно должно послужить доводом в пользу нашего утверждения. У нас много свидетельств о практической стороне астрономии. Прежде всего, имеются свидетельства либо сохранившихся инструментов или их останков (в различных степенях сохранности), либо их описаний, которые достаточны для нашей цели. Но следует быть осмотрительными и не слишком доверяться объектам в музейных коллекциях. Они, ведь, отбирались особо строго. Если объект любого вида пережил свою первоначальную цель, то это могло произойти либо при его утере (особо желательна утеря на море), либо если он сам был ценнее, чем в виде лома.

Дерево, которое, видимо, широко применялось в астрономических инструментах, в конце концов гниёт, если до того не было использовано на дрова. Металл использовался повторно; не случайно, что почти все сохранившиеся античные бронзовые скульптуры добыты морской археологией.

Но существуют и записанные, и некоторые археологические свидетельства того, что для наблюдений с возможной целью составления впечатляюще точных астрономических таблиц создавались очень большие инструменты. Так, в обсерватории в Мераге (в нынешнем Иране) в XIII в. имелась регулируемая армиллярная сфера диаметром около 3 *м*, а радиус квадранта в обсерватории Улугбека (1393 – 1449), основанной в Самарканде в раннем XV в., был около 40 *м*.

В Западной Европе не было специально построенных обсерваторий, и этим поразительным размерам подражало применение существовавших зданий в качестве инструментов для наблюдений [?]. Так, во Флоренции в 1475 г. в верхней части купола собора, выше основания световой камеры, было пробито небольшое отверстие. В период полдня, в течение нескольких дней по обе стороны от летнего солнцестояния, оно пропускало солнечный свет и таким образом позволяло измерять высоту Солнца (Field 1988).

Ясно, что хлопоты, доставленные при построении таких больших инструментов, а также при вычислениях, обеспечивали более надёжные результаты. Это указывал, например, Птолемей в своём *Альмагесте*: наблюдения больших количеств [?] надёжнее и могут быть выражены точнее, не только в градусах и минутах, но и в секундах и шестидесятых долях секунд. С современной

точки зрения существовало всегдашнее стремление приводить результаты слишком точно, и историки даже придумали термин *ложная точность*[3].

И всё же достаточно ясно, что Тосканелли, который установил своего рода гномон во флорентийском соборе, понимал, что каком-то смысле он получит лучший результат, применяя этот гномон, а не наблюдая тень шеста высотой в несколько метров. Собор обеспечивал ему столб высотой около 90 *м* (такова была высота отверстия над полом собора). У нас нет никаких подробностей о его измерениях, которые имели целью способствовать построению лучшей модели движения Солнца. Проблемы с календарём, как считалось, были вызваны ошибочным значением длины тропического года.

Возможно, что величина наблюдательного устройства Тосканелли была связана с пожеланием приобрести шкалу с достаточно большим числом делений, чтобы измерения смогли бы выявить небольшие изменения[4]. Это было бы необходимо, потому что солнцестояние определялось высшей высотой Солнца в полдень, и требовалось наблюдать её изменения ото дня к дню.

Связь величины [инструмента] со шкалами инструмента подтверждается работой Игнация Данти, который, как и Тосканелли, был заинтересован в реформе календаря (Settle 2003). Когда он установил сравнительно небольшой квадрант на южном основании фасада флорентийской церкви Santa Maria Novella, то старался изо всех сил очень точно подразделить её шкалу трансверсалями[5]. Позднее Тихо решил, что изобрёл метод трансверсалей (иногда называемый его именем), вероятно восходящий к Леви бен Гершону (1288 – 1344), который, видимо, старался получить достаточно точно подразделённую шкалу на изобретённом им инструменте. […]

Метод, при помощи которого астрономы использовали свои наблюдения, помогает понять, почему ошибки отдельных измерений не стали очевидными. Обычно производили как можно меньшее число наблюдений, достаточное для вычислений. В случае измерений Тосканелли ясно, что он ежедневно производил в точности одно измерение наибольшей полуденной высоты Солнца, − в тот момент, когда изображение Солнца пересекало линию меридиана, нарисованную на полу собора. Он, быть может, просто использовал единственное наблюдение, ближайшее к солнцестоянию (то, при котором высота Солнца была наивысшей), либо что-то вычислял, чтобы учесть, что солнцестояние наступило не в точности в полдень. Но в любом случае ему нужен был один-единственный угол.

Модель движения Солнца строилась как сочетание окружностей, для определения радиусов и центров которых требовалось очень небольшое число измерений. Более сложные модели, например, движения планет и Луны, требовали большего числа наблюдений, которое всё же всегда оставалось сравнительно небольшим, почти наверняка не превышавшим дюжины. Впрочем, главным были не эти числа, а их взаимная независимость.

Модель характеризуется некоторым числом неизвестных *элементов*; наш курсив указывает, что элементы современных орбит [орбит, вычисленных в наше время] полностью отличны от прежних. Их следует определять по наблюдениям, взаимная независимость которых означает, что ошибка в каком-либо наблюдении вряд ли выявится в ином наблюдении. Положение здесь аналогично тому, которое имеет место при весьма простой задаче на построение, при построении прямой по двум точкам. Здесь нет причин тревожиться о точности положения какой-либо из них. Но вычисления Кеплера орбиты Марса оказались совершенно иными.

2. Тихо Браге

Он сегодня вспоминается главным образом как астроном-наблюдатель, но не это было его целью. Название его изящной и богато иллюстрированной книги (1598) указывает, что он желал быть известным как основатель преобразованной астрономии. В некотором смысле так оно и было ввиду использования его наблюдений Кеплером, но Тихо представлял себе установление своей собственной, а не коперниканской астрономии. В ней Солнце вращается около центральной и неподвижной Земли, а все [остальные] планеты вращаются около Солнца и движутся вместе с ним. Вот одно загадочное обстоятельство по поводу Тихо осталось несмотря на усилия его самого недавнего биографа (Thoren 1990): какова причина, по которой он решил, что преобразование астрономии требует от него длинных серий наблюдений планет?

Выше было сказано, что построение обычной орбиты планеты требует лишь довольно небольшого числа наблюдений. У Тихо, чьи интересы распространялись на астрологию и алхимию, очевидно, была основательная причина производить в этих целях повторные наблюдения, и он рассказывает нам, что понял, что современные ему модели движения планет недостаточно точны, если соединение планеты с Солнцем не наступает в день, предсказанный таблицами.

Неизвестно, написал ли Тихо что-либо по алхимии, либо для публикации, либо в письмах друзьям, и никаких подобных записей (если они вообще существовали) не найдено. Но в подвале обсерватории в Ураниборге, подробно описанной им (1598), имелись алхимические лаборатории, что существенно свидетельствует в пользу продолжительного интереса Тихо к алхимическим опытам. Есть также свидетельства о том, что он интересовался учениями Парацельса (прим. 1493 – 1541), чьи работы, большинство из которых было по существу алхимическими, становились все влиятельнее в столетие после его смерти.

Парацельса нелегко представить как пророка современной науки, но в одном отношении он предчувствовал мнение Фрэнсиса Бэкона (1561 – 1626)[6]: Парацельс рекомендовал сбор большого числа данных как средства для продвижения в понимании природы. При отсутствии других объяснений возможно, что это мнение способствовало тому, что Тихо так

много времени уделял накапливанию наблюдений планет. И он был в основном согласен с тем, чтобы другие пользовались его данными для преобразования астрономии. Но и в этом случае его поведение выглядит несколько двусмысленно, потому что к наблюдениям он относился, будто они были редкими естественными объектами в его частной *кунсткамере*. Временами не очень легко представить себе Тихо [как и Парацельса] пророком современной науки.

Сохранившихся астрономических инструментов Тихо не найдено, но описание оборудования Ураниборга (*дворца неба*) и Stjerneborg (*дворца звёзд*) в его книге (1598) настолько подробно, что мы знаем о них намного больше, чем смогли бы выяснить при их осмотре. В частности, оно говорит нам о заботе, с которой они были не только задуманы, но и в их конструкции и при проверке их работы. Ясно, что Тихо изготовлял настолько большие инструменты, насколько это было возможно или практично, и он специально упоминал высокое качество подразделения их шкал.

Так, его квадрант, изготовленный в 1582 г., с радиусом около 1,94 *м* позволял отсчитывать по шкале из литой латуни с точностью до 10″ и даже 5″, см его книгу 1598 г[7]. Эта шкала была сконструирована при помощи трансверсалей. Его наибольший инструмент, изготовленный до того, как он начал применять этот метод разбивки шкал и не входил в оборудование обсерваторий, он оставил в Аугсбурге. Тихо называл его *огромным* (ingens); его шкала была латунной (1598, E1 verso, E2 recto; в переводе с. 88 – 91).

Тихо не только снабжал свои инструменты точно подразделёнными шкалами, но и прилагал все усилия, чтобы проверять верность отсчётов[8]. Так, *огромный* деревянный квадрант имел остов, который следовало зарывать в землю, чтобы обеспечивать неизменность строгой вертикальности оси инструмента. Позднее передвижные инструменты исследовались повторением наблюдений после своего поворота (что также служило проверкой постоянства различных частей шкалы), да и направления осей вращения также проверялись. Кроме того, проверка осуществлялась наблюдением несколькими инструментами и сравнением их отсчётов. Тихо сообщает, что в результате этих проверок инструменты часто не только юстировались, но и полностью переделывались, иногда дважды и трижды (1598, A2 recto, строка 6 и след.; в переводе с. 19, строка 20 и след.).

Кеплер так и не видел ни обсерватории Тихо, ни (насколько нам известно) каких-либо его больших инструментов. В лучшем случае он видел приготовления во дворце Benatek (в то время, в одном дне пути от Праги). В нём точная линия меридиана была врезана в пол помещения на третьем этаже, на одной линии с косяком противоположного окна, откуда был ясно виден горизонт. Это свидетельствует о том, что Тихо действительно начал оборудовать там новую обсерваторию.

Кеплер не принимал всё на веру, но, поскольку он и Тихо проживали в одном и том же здании, у нас нет никаких писем

[того периода], и мы не можем сказать, какие вопросы он задавал Тихо по поводу его наблюдений. С другой стороны, он безусловно прочёл книгу Тихо и должен был составить своё собственное мнение о надёжности её отчёта об инструментах. Но книга не говорит нам, оставались ли всё-таки неопределённые пределы изменения отсчётов после всех проверок и сравнений, т. е. того, что мы теперь называем инструментальной ошибкой или ошибкой наблюдения[9].

Теперь мы можем предположить, что они должны были быть, потому что шкалы часто подразделялись на интервалы в 5′, тогда как современные исследования точности наблюдений Тихо по сравнению их с нынешними вычислениями мест небесных тел указывают на ошибки порядка нескольких минут (Thoren 1990, с. 189 – 191; Wesley 1979). Кеплер, видимо, примерно так и думал, что усматривается из того, как он использовал наблюдения Тихо при выводе орбиты Марса и по его замечаниям о том, каковым должно было быть ожидаемое соответствие теории и наблюдений.

3. Кеплер: использование наблюдений Тихо в *Новой астрономии*

Тихо собрал результаты более чем 20 лет наблюдений до того, как попросил Кеплера применить их для построения орбиты Марса. Обычным было бы применение лишь нескольких наблюдений, и Тихо, видимо, так и считал, потому что в письме 8 февраля 1601 г. из Праги Кеплер заметил своему бывшему наставнику Мёстлину, что *Тихо в некоторой степени бережёт свои наблюдения*. Он добавил:

Для меня, однако, их слишком много, и у меня нет слов. Поэтому нужен отбор. Напиши мне и скажи, какие из них представляются тебе самыми значимыми и достойными выбора[10].

Мёстлин не ответил, и Кеплер в конце концов придумал, как справиться с большим числом наблюдений, произведённым в короткое время или относящимся к одной и той же части орбиты Марса. Вероятно признавая, что его способ подхода к определению орбиты необычен, Кеплер неизменно пишет *Мои комментарии о Марсе*. Это необычное выражение вошло в длинное полное название *Новой астрономии*, однако последующие поколения, должным образом заботившиеся об исторической значимости труда Кеплера, решили ограничиваться двумя словами названия. Слово *Комментарии* возможно отражает что-то из ощущений Кеплера о том, что он честно, шаг за шагом, описывает изменения, схема которых была определена более могущественными силами. В поэтической форме, обычной для того времени, это означало: Кеплер составляет комментарий к словам Господа, выявленным в книге Природы. И при этом он доверял авторитетному тексту, предоставленному трудами Тихо.

В *Новой астрономии* 70 глав, и её структура весьма замысловата, что заметно по странице её аналитического содержания. Многие историки обсуждали астрономические и математические методы Кеплера, равно как и их различные

философские последствия. Напротив, забота Кеплера о близком числовом соответствии теории и наблюдений, хоть и признавалась критической, не была подробно исследована. Частично это, быть может, объясняется тем, что Кеплер, который обычно сообщал своё мнение, поместил поразительное заявление невдалеке от начала книги. В конце гл. 19, выстраивая модели движения Марса при помощи известного профессиональным астрономам от Птолемея математического аппарата, он выявил её несоответствие с наблюдёнными Тихо положениями этой планеты, равное 8′ по (эклиптической) долготе. Затем следовали два важных абзаца. В первом он сообщил, что этот уровень соответствия был бы достаточен для Птолемея, который сам указал, что его наблюдения никогда не достигали точности в 10′. И Кеплер замечает[11]:

Итак, неопределённость наблюдений, или (как говорят) её протяжение превышает эту погрешность в вычислениях [долготы] *Птолемея.*

Сразу после этого начинается новый абзац (с. 286):

Благость Божья соизволила дать нам в лице Тихо столь прилежного наблюдателя, наблюдения которого указывают на ошибку в 8′ в этом вычислении по Птолемею. По справедливости, в благодарном расположении духа, мы признаём добрый дар Господа и воспользуемся им.

Затем Кеплер (с. 286) высказывает пожелание продолжить исследование движения Марса и поясняет, что всё дело зависит от этого расхождения в 8′:

Если бы я полагал, что этими 8′ долготы следовало пренебречь, я должен был бы (разделив эксцентриситет пополам) ввести достаточную поправку к модели гл. 16. Но этим расхождением нельзя пренебречь, и эти 8′ сами по себе открыли путь к преобразованию всей астрономии и оказались материалом большой части этого труда.

Анализ и цель Кеплера весьма понятны. Но он не сообщает нам, почему он считает, что погрешности у Тихо менее 8′, а сказанное им о Птолемее (*Птолемей фактически заявляет, что при наблюдении он не доходи*т [до делений] *ниже* 10′) лишь указывает на его заботу о точности подразделения шкал[12]. Мы видели, что инструменты Тихо были задуманы так, чтобы шкалы оказались достаточно большими для их подразделения на минуты. С другой стороны, поскольку для преобразования астрономии Кеплер предполагал применять более точные измерения Тихо, он должен был считать их более точными, чем не только птолемеевы, но и более правильными[13]. Но он не говорит, каковы, по его мнению, границы их ошибок, кроме как, разумеется, что они менее 8′.

Модели движения Марса у Кеплера необычны, особенно потому, что движения отнесены к Солнцу. Но они были задуманы, как и обычные модели в геометрических терминах. Действительно, у Кеплера это явно геометрия Евклида. Он вычисляет существенные расстояния и места существенно специальных точек, например, узлов (точек, в которых орбита

пересекает плоскость эклиптики), применяя наблюдённые положения планеты. Таким образом, каждая модель орбиты уже включала величины, выведенные из наблюдений, но благодаря тщательности Тихо, Кеплер имел обилие дополнительных наблюдений, чтобы проверить её.

Здесь проверялась теоретическая модель движения, а не наблюдения, но, поскольку каждая модель включает наблюдение, положение не столь очевидно, как иногда представляется в истории науки. Некоторые указания на собственное понятие Кеплера о своих вычислениях и методах учёта неопределённостей в значениях всех используемых им величин, можно отыскать в его исследовании положения афелия Марса в гл. 51[14].

Он определял расстояния между Марсом и Солнцем в моменты, когда эта планета находилась в двух положениях на своей орбите, которые, как он полагал, более или менее симметричны относительно истинной точки афелия. Каждое значение зависело и от наблюдений Тихо, и от принятой Кеплером в тот момент математической модели, которую он называет эксцентричной[15]. Проверяется, как всегда, теория, но есть и прямая ссылка на точность наблюдений, − когда Кеплер определяет расстояния от Солнца, равные 154 400 и 154 387 единиц, считая их равными *с точностью до волоска* и добавляет:

13 единиц, которых не хватает во втором [значении] *несущественны. Я был бы рад, будь я в состоянии добиться повсюду неопределённости меньшей 100 единиц.*

Единицу (particula) Кеплер определял в функциях (линейного) эксцентриситета орбиты. Она изменялась: возле афелия 100 единиц соответствовали изменению углового положения на 3′,5 − 4′. Это[16] и есть протяжению (latitudo), которую Кеплер позволяет себе допускать в наблюдениях Тихо. Когда он говорит *повсюду* (ubique), нам следует понимать, что это его общая оценка, не относящаяся к данным конкретным наблюдениям. Можно также заметить, что Кеплер, видимо, применяет абсолютный стандарт: он не рассматривает относительную или процентную ошибку в полученных числах.

Большинство мест, которые указывает Кеплер, уже редуцированы и приведены в эллиптических координатах, поученных обработкой наблюдений. Эта обработка видна в том случае, в которых Кеплер (с. 513) решает представить одно из своих собственных наблюдений (*обождите смеяться, друзья!*). Примерно после страницы вычислений он получает расстояние, лишь на 128 единиц отличное от полученного из одного из наблюдений Тихо и замечает, что изменение всего лишь на 3′ привело бы их в соответствие (с. 515).

Иногда Кеплер принимает среднее из двух вычисленных расстояний *будто мы соглашаемся с тем, что при наблюдении произошли какие-то небольшие погрешности в противоположных направлениях*, или когда он переходит к рассмотрению положений Марса возле перигелия и относится к измерению как *подкреплённому* (с. 520) произведёнными в последующие дни.

В таких случаях он, видимо, допускает некоторую подгонку данных. Впрочем, Кеплер более строг в случаях, когда имеет две пары наблюдений, только одна из которых, видимо, согласуется с принятой им в тот момент орбитой. Ему пришлось бы откинуть два наблюдения, а именно те самые положения Марса в квадратурах. Но этот вид наблюдений он полагает особо надёжным и выравнивает теорию, получая разумное, по его мнению, согласие (с. 524):

И я сумел достаточно сблизить остававшиеся два положения. Ибо их недостатки привели [одну] в пределах истины, другую – вне её [т. е. в пределах и вне истинных положений], что успокаивает. Приписывание ошибки в 2′ в наблюдениях этих положений, вызванной низкой высотой зодиака и изменениями ввиду горизонта, ни в коей мере не является неразумным.

Упоминание наблюдений, произведённых низко, напоминает нам о том, что Кеплер отыскивает наблюдения Марса в определённых частях его орбиты, и поэтому не может неизменно требовать, чтобы они выполнялись при наилучших условиях. При наблюдении объектов вблизи горизонта обычно вводились поправки за атмосферную рефракцию. В таблицах Кеплера (1604) приведены поправки высот до 45°. Более того, поскольку Марс сравнительно близок, его положение определяется относительно далёких тел (звёзд), Кеплеру иногда приходилось вводить поправки за суточный параллакс. Поправки за рефракцию и параллакс обычно оказывались порядка минуты, т. е. немногим меньше ошибок, которые Кеплер был готов допустить в соответствии между теорией и наблюдениями, но он, видимо, не был склонен пренебрегать ими. Своё выражение *пренебрегаемо* (impraestabilis) он применял очень осторожно.

4. Ошибки и теория

Можно несомненно сказать намного больше о том, как Кеплер использовал наблюдения в этой главе (да и вообще в *Новой астрономии*), но я оставляю это более компетентным историкам. Для наших целей достаточно того, что одна из поразительных черт отношения к уклонениям его математических моделей от наблюдённых положений Марса, это его нежелание приписывать вину наблюдениям Тихо. Оно соответствует его поразительному заявлению в гл. 19. Теперь ясно, что он поступил мудро. Для Кеплера его решение должно было зависеть от весьма положительной оценки высокой степени согласования, которую Тихо установил как меру точности своих инструментов. Где-то в промежутке между высокомерным Тихо, его терпеливыми изготовителями инструментов и неизменно пытливым Кеплером в астрономию было введено понятие ошибки наблюдения. А вера Кеплера в точность наблюдений Тихо подтвердилась современными вычислениями, которые указали, что планетные орбиты Кеплера очень близки современным (Bialas 1971).

Для самого Кеплера идея ошибки наблюдения, поддающейся количественному выражению, имела серьёзные методические последствия: она позволила ему установить орбиту построением проверяемых моделей. Есть, конечно, рациональные

теоретические ограничения предлагаемых Кеплером моделей, например, соображения симметрии и отношение орбиты к Солнцу, но возможность проверки результатов освободила его от необходимости представления строгого теоретического обоснования возможных орбит и позволила ему применять приближённые методы при построении некоторых из них. Повторные проверки также означают, что числовые ошибки в его вычислениях будут выявлены, если только сами не уравновесят друг друга. (Это, видимо, произошло не раз, и Кеплер приобрёл незаслуженную репутацию счастливчика.)

Тем не менее, построение окончательного эллипса относилось к точной евклидовой геометрии, т. е. к применению лишь свойства прямых [?] и окружностей. Кеплер признал эллипс по его свойству, которое рассматривал Архимед (Davis 1992). Он представил свой результат в гл. 58 в абсолютных геометрических терминах в качестве логического вывода после отбрасывания иных возможностей:

Итак, орбита Марса это эллипс (с. 575). Свою долю в выводе этого результата сыграли арифметика и осознание неопределённости в наблюдениях, но сам ответ геометричен. В философских терминах, которые Кеплер наверняка признал бы приемлемым, эллипс это платоническая математическая форма, соответствующая орбите[17]. Но понятие об ошибке проникло глубоко. В письме Фабрицию 11 окт. 1605 г. Кеплер[1] сказал:

И теперь, Фабриций, вот что я получил: наиболее верная орбита Марса это эллипс […], *или же она наверняка отличается от эллипса на неощутимую величину.*

Кеплер, вероятно, успокоился, установив, что орбиты других планет также эллиптичны, что в одном из фокусов орбит находится Солнце, и что их движение соответствует и закону площадей. Этот закон Кеплер постулировал для окружности в гл. 40 и доказал в гл. 59 до того, как использовал его при выводе эллипса в гл. 60[18]. В любом случае Кеплер в конце концов убедился, что его простая геометрическая модель верна по крайней мере в достаточной степени, так что он (1619) обратился к основополагающим геометрическим истинам, чтобы объяснить её подробности, выявляемые в полной солнечной системе, чтобы объяснить, почему Господь использовал именно эти эллипсы.

Примечания

1. Это предположение ни на чём не основано и крайне сомнительно.

2. Можно повторить Прим. 1. См. также наш общий комментарий.

3. Традиции удерживать избыточные значащие цифры придерживался и Гаусс, иногда и Фишер. См. дискуссию в журнале *Science*, т. 84, 1936, с. 289 – 290.

4. Фильд неоднократно обращает внимание на точность отсчитывания по шкалам, но ведь существовали и иные источники ошибок (влияние рефракции, неточная юстировка инструмента и пр.).

5. Метод трансверсалей вышел из употребления после изобретения и внедрения верньера.

6. Точнее, Bacon (1620, кн. 1, с. 95) рекомендовал не только собирать наблюдения, но и обрабатывать их (*как пчела собирать, обрабатывать и переваривать вещества*).

7. Brahe (1598, A5r, строка 4 след.). Английский перевод: Brahe (1946, с. 29, строка 5 след.). Дж. Ф.

8. Фильд упоминает два прилагательных, precise и accurate. В теории ошибок precision иногда относят к случайным, а accuracy − к систематическим ошибкам. Фильд, кстати, ни разу не упоминает систематических ошибок, что серьёзно ухудшает её описания.

9. Кроме инструментальных ошибок существуют и иные, см. Прим. 4, и только все они вместе образуют ошибку наблюдения.

10. См. в Библиографии Полное собрание сочинений Кеплера, т. 14, с. 161, письмо 183, строки 17 – 20. Дж. Ф.

11. На английском языке эта выдержка помещена на с. 286 *Новой астрономии* издания 1992 г. Фильд предпочла самостоятельно переводить Кеплера на английский (что можно понять, хоть в двух местах мы отказались от её перевода) со ссылкой на полное собрание сочинений Кеплера. Мы полагаем, что из уважения к читателям её следовало указывать и страницы по изданию 1992 г., что мы и делаем здесь и ниже.

12. Несколько ниже Фильд добавила, что Кеплер так ничего и не сказал про границы ошибок Тихо. По поводу этих замечаний см. наш общий комментарий.

13. См. Прим. 8.

14. Мы благодарны A. E. L. Davis, который рекомендовал нам указать пример из этой главы. Дж. Ф.

15. Кеплер принял орбиту в виде эллипса, но только в гл. 58, см. ниже. Дж. Ф.

16. См. Davis (1981). На с. 35 он привёл таблицу *единиц*. Дж. Ф.

17. См. Полное собр. соч. Кеплера, т. 15, с. 249, письмо 358, строки 390 – 392. Дж. Ф.

Философское обоснование появления эллипса, которое предложила Фильд, непонятно. Во всяком случае, Кеплер (1619/1997, название гл. 5 на с. 451) заявил, что эксцентриситеты планетных орбит (т. е. отход от окружностей, от самых совершенных замкнутых кривых древней астрономии) поясняется *установлением гармонии между движениями планет*. В лучшем случае это напоминает его надуманную модель Солнечной системы в виде системы правильных многогранников. Ранее Кеплер заявлял, что эллипсы появились вместо окружностей под воздействием каких-то мифических промежуточных причин (т. е. случайности).

18. Подробности в статье A. E. L. Davis в этом сборнике. Хронологию вывода Кеплером орбит остальных планет см. Bialas (1971). Дж. Ф.

Краткие сведения об упомянутых лицах

Бюрги Йост, 1552 – 1632, математик, астроном, часовщик, приборостроитель. Изобрёл логарифмы независимо он Непера.

Данти Игнацио, 1536 – 1586, математик, астроном, космограф

Мёстлин Михаэль, 1550 – 1631, астроном, математик, наставник Кеплера

Тосканелли Паоло, 1397 – 1482, разносторонний учёный, особо – астроном и географ

Фабриций Давид, 1564 – 1617, пастор, астроном

Библиография

J. Kepler

1604, *Ad vitellionem …, pars Optica*. *Optics*. Santa Fe, New Mexico, 2000.
1609, латин. *New Astronomy*. Переводчик W. H. Donahue. Cambridge, 1992.
1615, латин. Новая стереометрия винных бочек. М. – Л., 1935.
1619, латин. *Harmony of the World*. Philadelphia, 1997.
1937 – 1969, *Gesammelte Werke*, Bde 1 – 18. München.

Другие авторы

Шейнин О. Б., Sheynin O. (1973), Mathematical treatment of astronomical observations. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 11, pp. 97 – 126.
--- (1974), On the prehistory of the theory of probability. Ibidem, vol. 12, pp. 97 – 141. **S, G,** 30.
--- (1977), Kepler as a statistician. *Bull. Intern. Statistical Inst.*, vol. 46, No. 2, pp. 341 – 354. **S, G,** 29.
--- (1978), Kepler. Kruskal W., Tanur J. M., редакторы, *Intern. Enc. of Statistics*, vols 1 – 2. New York, pp. 487 – 488. **S, G,** 61.
--- (1984), On the history of the statistical method in astronomy. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 29, pp. 151 – 199. **S, G,** 30.
--- (1993), Treatment of observations in early astronomy. Ibidem, vol. 46, pp. 153 – 192. **S, G, 30**.
--- (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. **S, G,** 11.
Bacon F. (1620), *Novum Organum and Associated texts*. Латино-англ. издание. Oxford, 2004, pp. 48 – 447. *Новый органон*. М., 1938.
Bialas V. (1971), Die quantitative Beschreibung der Planetenbewegung von Kepler in seinem handschriftlichen Nachlaß. *Kepler Festschrift 1971*. Regensburg, 1971.
Brahe Tycho (1598), *Astronomiae instaurateae mechanica*. Wandsbeck.
--- (1946), *Tycho Brahe's Description of Instruments and Scientific Work*. Перевод книги 1598 г. и редакция: Raeder H. и др. Copenhagen.
Davis A. E. L. (1981, диссертация), *Mathematical Elucidation of the Bases of Kepler's Laws*. Университет Ann Arbor, собрание микрофильмов, 1989.
--- (1992), Kepler's road to Damascus. *Centaurus*, vol. 35 (2), pp. 143 – 164.
Field J. V. (1984), Kepler's rejection of numerology. В сборнике *Occult and Scientific Mentalities in the Renaissance*. Редактор B. W. Vickers. Cambridge, с. 273 – 296, особо с. 285 – 286 и § 43.
--- (1988), What is scientific about a scientific instrument? *Nuncius*, vol. 3.2, pp. 3 – 26.
Prager F. D. (1973), Kepler als Erfinder. *Intern. Kepler-Symposium. Weil der Stadt 1971*. Редактор F. Kraft и др. Hildesheim, 1973, pp. 385 – 405. Kepler as inventor. *Vistas in Astronomy*, vol. 18, 1975, pp. 887 – 889.
Settle Th. B. (2003), Egnazio Danti as a builder of gnomons, an introduction. В сборнике *Musa Musaei. Studies on Scientific Instruments and Collections in Honor of M. Miniati*. Florence, pp. 93 – 115.
Thoren V. E. (1990), *The Lord of Uraniborg. A Biography of Tyho Brahe*. Cambridge.
Wesley W. G. (1979), Tycho Brahe's solar observations. *J. Hist. Astron.*, vol. 10, pp. 96 – 101.

VI

Дейвид Беллхаус

Расшифровывая книгу Кардано *Liber de Ludo Aleae*

David Bellhouse, Decoding Cardano′s *Liber de Ludo Aleae*.
Hist. Math., vol. 32, 2005, pp. 180 – 202

1. Введение

До публикации весьма влиятельного трактата Гюйгенса (1657) книга Кардано (1953, 1966), написанная в XVI в. (сокращённо: LLA), оставалась наиболее полным исследованием исчисления вероятностей. Среди стохастических вычислений до 1650-х годов только в ней обсуждались фактические вычисления и принятые предпосылки[1].

Кардано вычислил вероятности выпадения различных сумм очков при броске двух или трёх костей и производил несложные подсчёты, относившиеся к тогдашним карточным играм. Кроме того, он сформулировал простой вариант правила умножения вероятностей при игре в кости. В некотором смысле он вышел за пределы будущего трактата Гюйгенса, который посвятил его исключительно подсчёту шансов, хотя и применил такие новые понятия, как ожидание.

LLA содержит правила игры и советы о предохранении от обмана. Из методов обмана он упоминал поддельные кости, краплёные карты, утаивание карт, наклонные столы для игры, а также использование подглядывающих посторонних. В книге есть указания, которые означают, что её составление закончилось в 1564 г. или позже, но неясно, почему её рукопись не была опубликована в течение жизни Кардано; появилась она лишь в 1663 г. (Cardano 1966). И, поскольку она оставалась в рукописи, неясно также, каких читателей собирался достичь Кардано.

Кардано не только предвосхитил развитие исчисления вероятностей, но был предшественником того жанра публикаций, который можно описать как руководство по азартным играм. Как и исчисление вероятностей, подобная литература не появилась до второй половины XVII в. и, более полно, в XVIII в. Так, в английской литературе первым полным руководством по азартным играм был Cotton (1674), а вершиной этой литературы в Англии стал Hoyle (1743).

Поэтому считалось, что LLA относилась к текстам по вероятности, хоть и примитивным, или к руководствам по азартным играм, включавшим некоторые полезные вероятностные вычисления. Английский перевод LLA (Cardano 1953) возродил интерес историков теории вероятностей к ней. Они исследовали книгу в основном с точки зрения исчисления вероятностей и пренебрегли большей частью её остального содержания или преуменьшили её значимость.

Так, De Mora Charles (1981) перевёл отрывки книги на испанский язык и в основном математически комментировал их. Как правило, историки теории вероятностей задавали вопросы

типа *Верны ли вычисления*? *В какой степени Кардано предвосхитил позднейших авторов*? Остальной материал лишь кратко упоминается, а иногда уничижительно комментируется. Таково обсуждение подхода Кардано к удаче у Ore (1953). Но Franklin (2001), к примеру, верно охарактеризовал общее влияние LLA на современного читателя:

Книга путанная. Часто её описывают недостаточно хорошо, и цель автора остаётся неясной, а некоторые разделы книги явно противоречат другим.

Да, действительно, Кардано не очень заботился о согласованности своих трудов. Jensen (1994), к примеру, исследовал несообразности в нескольких других сочинениях Кардано, в частности в *De Subilitate* [*О тонкости вещей*, 1550] и *De Rerum Varietate* [*Об изменчивости вещей*, 1557]. С некоторых пор стало известно влияние Аристотеля на труды Кардано. Margolin (1976), например, рассмотрел истолкование Аристотеля, приведённое Кардано в таких сочинениях, как упомянутые чуть выше. Недавние попытки присоединяли LLA к общему контексту Ренессанса. Tamborini (1999) обсуждал подход Кардано в LLA к удаче или *fortuna* и соотнёс его с некоторыми понятиями Аристотеля.

Но, несмотря на подобные усилия, можно проделать много больше, чтобы представить LLA в контексте Ренессанса. Многие исследователи упустили эту возможность и поэтому не заметили основную структуру книги и не полностью оценили её источники. Вторым преимуществом вставки LLA в контекст Ренессанса состоит в открытии её возможных связей с прежними вероятностными вычислениями. Подобные вычисления, произведённые до переписки Паскаля и Ферма в 1654 г., как правило, представлялись разрозненными и почти случайными. Но имеется очень сильное свидетельство того, что первые вычисления игры в кости у Кардано были основаны на чтении *De Vetula*, средневековой поэмы, написанной примерно в 1250 г[2].

2. Джероламо Кардано (1501 – 1576) и его образование

До исследования LLA полезно представить краткую биографию Кардано и частично описать математическую среду, в которой он работал и учился. Помимо его математических трудов, современники хорошо знали его работы по медицине и астрологии. Обширный биографический материал о нём можно отыскать в Fierz (1983), Ore (1953) и Rose (1975), да и в его автобиографии Cardano (1930).

В то время сочетание трёх упомянутых ветвей знания было в некотором роде естественным. Средневековая профессура по математике фактически означала работу по математике, астрономии и астрологии. Последние считались важнее математики, которая служила подготовкой к занятиям ими. Профессура только по математике появилась в конце XVI в., когда астрология находилась в состоянии упадка, хотя её серьёзное изучение продолжалось ещё долго после начала XIX в. [?]

Астрология и медицина также были тесно связаны, причём астрология была служанкой медицины. Считалось, что расположение небесных тел влияло не только на жизнь людей вообще, но, в частности, и на течение болезней. Знание астрологии поэтому могло применяться при многих методах лечения (Grendler 2002, с. 408 – 409; Grafton 1999, с. 42).

В LLA можно усмотреть некоторые элементы математической, астрологической и медицинской карьеры Кардано. Существовало три обстоятельства, которые способствовали прогрессу математики при Ренессансе. Первым было развитие коммерческой арифметики, которая усиливала вычислительные способности населения. Вторым оказалось развитие некоторых других ветвей математики, особо геометрии и смежных дисциплин, ввиду открытия классических математических рукописей. Наконец, упомянем обучение математики в университетах. Математическая работа Кардано была связана со всеми этими тремя обстоятельствами.

В Италии, в период между XIII и XVI веками, изучение коммерческой арифметики существенно усилилось. Возросший объём торговли в Средиземноморье и с мусульманским миром обусловил нужду в ней и в сопутствующем внедрении на Западе индийско-арабской системы представления чисел (Lieber 1968; Mack 2002). Ввиду взаимоотношений мусульманских и итальянских купцов итальянские торговцы научились торговой практике мусульман, например, векселям и записи сделок.

Для обучения купцов этой практике во многих итальянских городах-государствах открылись арифметические школы или школы счёта (Grendler 1989) и, соответственно, появились арифметические или счётные книги. Van Egmond (1981) опубликовал обширный список этих книг, вышедших до 1600 г. начиная с *Liber Abaci* Леонардо Пизанского (Fibonacci 2002). Счётные книги обычно предназначались в качестве руководств для учителей и купцов, уже занимающихся торговлей, но не учебников для студентов. В этих книгах обсуждались четыре основные арифметические действия, дроби и извлечение квадратных и кубических корней. В этом смысле их можно считать лишь чисто производными арабских арифметических книг. Различие, однако, заключалось в том, что в арабских книгах вслед за арифметикой излагались более высокие разделы математики для астрономии, см., например, арабскую арифметику X в. Uqlidisi (1978).

Итальянские счётные книги часто выходили далеко за пределы основных арифметических действий, и, например, включали задачи на торговые сделки и развлекательные математические задачи. Иногда, но не всегда, эти задачи сопровождались обсуждением элементарной геометрии и алгебры, а также разнообразными материалами, как календарями и астрологией (Van Egmond 1981). Геометрия в счётных книгах обычно была арифметической, имевшая дело с длинами, площадями и объёмами, а не евклидовой в смысле отвлечённых

математических доказательств геометрических соотношений (Peterson 1997).

Расцвет Венеции в качестве торгового центра был связан с публикацией счётных книг. По данным Van Egmond (1981), в период между первой напечатанной счётной книгой 1477 г. и 1600 г., последним годом сбора данных, 55 % этих книг было издано в Венеции, затем – в Неаполе (менее 8 % общего числа). Математика преподавалась в средневековых университетах в составе квадриума[3] (арифметика, геометрия, астрономия и музыка). Ведущими в Италии были Болонский и Павийский университеты, и именно в этом порядке. Следуя вековым учебным планам церковных и кафедральных школ, основными при обучении арифметике и геометрии в средневековых университетах были произведения Боэция. Но его арифметика не была тем, чем мы сегодня ей называем. В ней не было или почти не было вычислений; она была ограничена изучением свойств чисел, включая отношения, пропорции и дроби (Kline 1972; Masi 1983; Schrader 1967). В XII и XIII веках программа обучения слегка изменилась, поскольку некоторые главные греческие математические тексты из арабских источников были переведены на латинский язык. Лучшим примером был перевод Евклида Аделардом из Бата.

Ещё более программа университетов преобразовалась в течение Ренессанса, поскольку были найдены и переведены другие математические рукописи древности. Их открытие подробно описал Rose (1975). Основными математическими трудами на их первоначальном греческом языке были написаны Евклидом, Архимедом и Аполлонием.

В период Ренессанса труды Архимеда отчётливо воздействовали на приложения математики, но не на университетские программы (Laird 1991), которые в этом периоде рассчитывались на 4 года. Типичная университетская программа в то время состояла из евклидовой геометрии и астрономии Птолемея. В течение первого года изучалась арифметика и алгебра, а также вводные темы по геометрии и астрономии. Последующие годы были посвящены более серьёзным разделам геометрии, например, более поздним книгам Евклида, и астрономии. Эта же программа включала астрологию ввиду её осознанного отношения к медицине. Grendler (2002) описал типичную математическую программу раннего Ренессанса и её изменения в течение той эпохи. После завершения квадриума студенты могли заниматься докторскими программами по юриспруденции, богословию или медицине.

Кардано был частично детищем университетской системы. Он сам (1930) описал своё обучение математике. Вначале его отец, юрист Фацио, обучал сына арифметике и первым шести книгам Евклида. Он сам был умелым математиком и, вдобавок к своим юридическим занятиям, преподавал геометрию в университетах Павии и в Милане[4]. В возрасте 18 лет (около 1520 г.) Джероламо поступил в университет Павии, в котором должен был изучать квадриум.

Через три года он начал читать общественные лекции по геометрии Евклида. Лекции и дискуссии были частью обычного процесса обучения университетских студентов того времени. Требовалось, чтобы до сдачи экзаменов на учёные степени они читали лекции и проводили общественные диспуты на различные темы и по различным проблемам (Grendler 2002). Но Кардано оставил Павию ввиду войны в том районе и около двух лет провёл дома с отцом. В 1524 г. он поступил в падуанский университет и закончил там своё обучение медицине.

Первая математическая публикация Кардано (1539) показывает, что он покрыл и счётную школу, и университет. Это сочинение включено в обширный список счётных книг и рукописей Van Egmond (1981), так что можно считать, что оно частично являлось счётной книгой. В этом жанре она оказалась и типичной, и нетипичной. Кардано никогда не преподавал в счётной школе и не научился математике в ней. Перед нами человек, не имевший коммерческого опыта и формально не обученный коммерческой арифметике, но написавший книгу, которая содержала эту арифметику. В некоторой степени это проявилось. Книга была написана на латинском, а не национальном языке, как громадное большинство итальянских счётных книг, притом на *более высоком* уровне. Smith (1970) назвал её *одной из самых претенциозных арифметик* XVI *в.*, которая, однако, *во многом повлияла на повышенное обучение этой дисциплине*. Книга включена в библиотечный каталог 1620 г. (James 1620) и, стало быть, вероятно оказалась частью новой арифметической программы некоторых университетов.

Кардано вероятно имел в виду иную цель, а не составление справочного руководства для учителей счёта и купцов. Он, видимо, хотел известить о своих математических способностях более широкий и более математически подготовленный круг читателей Европы. Действительно, Maclean (1994) заявил, что причиной составления этой книги было желание и продвинуться, и заработать деньги. 10 крон, которые Кардано получил от своего издателя, он вероятно истратил на оплату публикации некоторых своих трудов по астрологии, которые в конце концов могли бы оказаться ему более выгодными. Он мог бы истратить их и на покупку охранительной грамоты у императора Священной Римской империи на публикацию некоторых своих книг, в частности тех, которые перечислил в списке в своей книге (1539). Шестой в этом списке 34 книг, которые он был бы готов опубликовать, была книга об играх, *De Ludis*. Он начал серьёзно играть примерно в 1525 г. Ore (1953) процитировал его описание своего раннего участия в играх, а David (1962) добавила соответствующую ссылку, а именно указала *De Subtilitate* издания 1551 г. Одновременно с началом серьёзного участия в играх Кардано занялся сбором фактов об играх. Впоследствии он опубликовал расширенную коллекцию этих фактов в виде книги *De Ludis*, написанной на национальном языке, и указал её в *Practica Arithmetice*. Эта книга была разбита на четыре части, и вторую часть он посвятил азартным играм. Tamborini (1999)

перечислил несколько ссылок из сочинений Кардано на эту книгу. У нас имеется лишь издание рукописи *De Ludo Aleae* 1663 г. (Cardano 1966), и мы не можем установить точного соотношения между этими двумя книгами.

В прошлом считалось, а некоторые продолжают считать, что Кардано – суеверный шарлатан. Это мнение восходит к Gabriel Naudé, автору предисловия к первой публикации автобиографии Кардано 1643 г. (Cardano 1930). Jean Stoner (Cardano 1930, с. xiii), который перевёл эту автобиографию на английский язык, составил сводку мнения Naudé:

Gabriel Naudé отредактировал книгу и предварительно сообщил своё мнение о Кардано, которое долгое время воздействовало на все оценки и на любые портреты миланского учёного[5], возникавшие у позднейших поколений. Naudé имел в виду, что Кардано был моральным чудовищем вообще, и, в частности, что он был обуреваем суевериями и беспечен по отношению к истине.

Обвинение в суеверии вероятно возникло вследствие работ Кардано по астрологии и его истолкования снов. Ярлык шарлатана произошёл от его астрологических и математических трудов. Он составил крайне положительный гороскоп для молодого английского короля Эдуарда VI, который вскоре умер. А в математике плохо закончился для него диспут с Тарталья по поводу публикации Кардано о решении кубического уравнения. Это решение было включено в его главный математический труд (Cardano 1968). Feldmann (1961) документально описал этот диспут и выставил Кардано в гораздо более благоприятном свете, нежели представлялось ранее. В последние несколько лет общее мнение о Кардано стало положительнее, и несколько учёных изучили различные стороны его карьеры; см. Grafton (1999) по поводу астрологии и Siraisi (1997) о Кардано и медицине Ренессанса, а также сборник статей о трудах Кардано вообще (Kessler 1994).

3. *Liber de Ludo Aleae* в качестве довода

Начиная с Ore (1953), LLA подробно и тщательно исследовалось как математический труд. Менее подробно в математическом смысле эту книгу описал Todhunter (1965), который был настроен критически и счёл её малоинтересной. Но один из основных вопросов, который историки так и не рассматривали, относится к тому, что сам Кардано не считал LLA математической работой.

Cardano (1930) перечислил свои труды в области азартных игр под заголовком *Различные доводы*, а не совместно со своими математическими сочинениями. Но в чём же тогда состоял этот довод и к чему он относился? В LLA можно найти различные доводы, но нет ясного указания на суть дела. Но ведь книга посвящена азартным играм и игре, и поэтому полезно ознакомиться с тем, какие доводы про такие игры были сформулированы в период итальянского Ренессанса.

В общем, безоговорочного осуждения игр не было, отношение к ним было скорее смешанным. Ещё Фома Аквинский (1225 – 1274) упоминал игру при обсуждении раздачи милостыни (Thomas Aquinas 1975, из *Summa Theologiae* 2a2e.32,7). Он указал на различие между гражданским правом и божественным законом, и по отношению к Церкви написал:

Прежде всего, божественный закон запрещает некоторые вещи, например, выигрыши за счёт малолетних или тех, кто не способен понимать своих поступков, или тех, кто не имеет права отчуждать свою собственность. Также запрещается из одной только жадности склонять других к игре, или, наконец, выигрывать обманным путём.

Он замечает, что в некоторых случаях гражданское право также запрещает игру, но добавляет, что не каждый обязан подчиняться этому праву, и что само право может устареть и изменится. Далее, обсуждая корыстолюбие, Фома (1972; из *Summa Theologiae* 2a2e.118,8) сослался на указанную Аристотелем связь игроков в кости с этим пороком. Вот цитата из *Этики*, кн. 4, i, 43, см. Aristotle (1955):

Но игрок в кости и карманник принадлежат к типу скаредников, потому что они омерзительно ненасытны. И те, и другие занимаются своим ремеслом для выгоды и мирятся с дурной репутацией. Одни подвергаются серьёзнейшей опасности из-за своего воровства, другие выгадывают за счёт своих друзей, которым они должны были бы давать. И те и другие омерзительно ненасытны, потому что хотят выгадывать, пользуясь ошибочными путями.

Это высказывание оказалось серьёзным препятствием для его довода об азартных играх и игре. Ниже, в § 4, мы увидим, что Кардано обратился к Аристотелю, чтобы подкрепить свой довод. Приведённое высказывание было, напротив, явно отрицательным.

Незадолго до начала итальянского Ренессанса Петрарка (1991), *De Remediis* кн. I, 26 и 27; кн. II, 16) привёл несколько доводов против игры и азартных игр. Один из них был близок рассуждению Аристотеля: Петрарка утверждал, что выигрыши в игре противоправны, притом неустойчивы. Говоря от имени Разума, он заявил, что

В игре нет никакого выигрыша, а только зло и мучение, потому что проигравший страдает, а выигравший соблазняется и завлекается в ловушку.

Аретино сформулировал схожее в прямо противоположном контексте. В его порнографическом сочинении (1971, с. 222 – 223) героиня разъясняет своей дочери, как стать хорошей проституткой. Она советует ей держаться подальше от игры и просить своих клиентов поступать так же. Кто проигрывает, не сможет осыпать её деньгами.

Петрарка, хоть и признал некоторые преимущества от игры в кости, сразу же объявил их несущественными. Другие авторы подчёркивали положительную сторону азартных игр. Сакки, который публиковал свои сочинения под псевдонимом *Platina*, восхвалял азартные игры в связи с трапезами. Если играть без

обмана, то азартные игры после ужина способствуют пищеварению (Platina 1998, с. 109).

Ближе всех к вопросу, который задал Кардано, подошёл Кастильоне, итальянский придворный, солдат и дипломат. Основываясь на своём придворном опыте, он написал весьма влиятельную книгу учтивости Ренессанса, и её совершенный придворный стал образцом для образованных классов Европы. Автор заботился о сохранении видимости, которую придворный сумел приобрести, и вот соответствующий диалог об азартных играх (Castiglione 1967, с. 140). [Некто отвечает на вопрос: подобает ли придворному играть в карты и кости:]

Подобает, если только он не играет слишком усердно и не пренебрегает поэтому более серьёзными занятиями, и не играет лишь для выигрыша и обмана, а при проигрыше не настолько встревожится и рассердится, и не выказывает тем самым своё корыстолюбие.

Кардано, многие годы бывший алчным игроком, задал аналогичный вопрос по другой причине и не обращаясь только к придворному: *не представляется ли тебе, что не подобает играть в карты или кости*? Можно спросить иначе, привлекая понятие справедливости эпохи Ренессанса: *При каких условиях игры в карты или кости будут считаться справедливыми*?

Выше, Кастильоне ответил на него одной фразой, Кардано же понадобилось несколько страниц, но он обсудил всё, затронутое тем, и многое другое. Главным в дополнительных соображениях Кардано было применение математики для того, чтобы указать, когда допустимо играть в азартные игры. Вопрос, на который отвечает Кардано, относился к справедливости, что ясно следует из его подхода к азартным играм. Он (1953, начало гл. 6) сообщил свои основные предпосылки:

Самый основополагающий принцип, относящийся ко всему при игре, это просто равенство условий для противников, присутствующих наблюдателей, денег, положения, коробочки для броска костей и самой кости. И в той же степени, в какой ты уклоняешься от этого равенства, ты дурак, если это происходит в пользу твоего противника, и ты несправедлив, если в свою собственную.

Ключевое слово здесь *несправедлив*. В предыдущей главе Кардано назвал причины составления LLA. Вначале он сказал, что в игре есть положительные черты и некоторые преимущества (он употребил форму слова utilitas, т .е. полезности). В древности и в эпоху позднего Ренессанса понятие полезности было связано с понятием справедливости. Так, Цицерон, популярный автор в эпоху Ренессанса, заявил (2000, кн. II, 10 и 20), что справедливое также и полезно, а полезное почётно. Полезное справедливо, и поэтому, когда Кардано изучает полезные черты игры, он одновременно отыскивает те стороны игры, которые справедливы.

Мы не можем сказать, не отыскал ли Кардано обсуждаемый им вопрос непосредственно в *Придворном* Кастильоне (1967). Существующие свидетельства малозначащи. Во-первых, Кардано

заявил, что он как-то связан с Кастильоне семьями. В автобиографии он (1930, с. 1) указал о своём старинном и благородном происхождении и намекнул, что семья Кардано на самом деле была ветвью семьи Кастильоне. Во-вторых, между ним и Кастильоне существует связь противоположностей в подходе к придворным. Кастильоне сам был придворным, Кардано же, видимо, презирал их. В начале LLA он советовал князьям не играть в азартные игры, и в этом он был в основном согласен с Кастильоне. Обсуждение игры у Кардано показывает его отношение к придворным:

Этот недостаток особенно отвратителен у князей, и его никто не защищает кроме придворных и льстецов князя. Их поведение объясняется лишь опасениями или получением подарков от князя, если ему повезёт.

Через несколько лет Кардано (1930, с. 124) оставил другое показательное утверждение о своём отношении к придворным. Он утверждает, что никогда не стремился к почёту, потому что подобные стремления обычно заканчиваются печально […].

Первоначальная форма довода Кардано о справедливости в игре и азартных играх оказалась частичным источником путаницы по поводу его сочинения. После краткой вступительной главы LLA, которая описывает игры вообще, Кардано приводит свой довод в гл. 2, но прямо не говорит, ни каков именно этот довод, ни о чём он. Нет, он начал с поочерёдного перечисления некоторых обстоятельств за и против игры. Игры допустимы на поминках, но они осуждаются законами Тициана и Луция Корнелия Суллы древней римской республики. Игры в карты и кости полезны в период скорби, стресса и беспокойства, но, с другой стороны, полезнее заниматься более стоящими делами.

Указание обеих противоположных сторон является утверждением *in utramque partem*, которое основано на риторических методах и принципах Цицерона. Метод *in utramque partem* был весьма популярен у гуманистов Ренессанса, и Кардано вернулся к нему в краткой гл. 4, в которой доводы против игры следовали за доводами в её пользу.

Franklin (2001)[6] привлёк внимание к противоречиям в LLA, которые в некоторых случаях происходили от аргументации *in utramque partem.* К примеру, в гл. 2 Кардано указывал, что игры влекут за собой *гнев и нарушают разум*, а в гл. 4 утверждал, что игры могут ослабить беспокойство. Аналогично, в гл. 3 он советовал играть только при небольших ставках, но в следующей главе заявил, что крупные ставки предпочтительнее небольших, потому что могут помочь проникнуть в характер противника. Для нас это может оказаться путанным, но для того времени применённая Кардано форма аргументации была стандартной.

4. Понятие справедливости у Аристотеля и вероятностные вычисления Кардано

Справедливость является главной темой LLA. Она не только направляла подход ко всем его вероятностным вычислениям, но и управляла его подходом к таким темам, как обман в игре.

Фундаментальный принцип игры в LLA был основан на равенстве, а потому на справедливости. Равенство обычно понимается как равенство шансов игроков в азартной игре, однако в вероятностном смысле Кардано понимал равенство намного шире. Понятие об этом фундаментальном принципе непосредственно исходило из *Этики* (кн. V, iii, 5 – 6) Аристотеля (1955, с. 177 – 178). Аристотель определяет несправедливое как неравное, а справедливое – как равное и продолжает:

Справедливость необходимо имеет по меньшей мере четыре составляющие: два человека, для которых оно действительно справедливо, и две доли, в которых оно проявляется. И то же равенство окажется между этими долями, что и между людьми […].

Кардано полагается на Аристотеля в своём определении фундаментального принципа игры, что подтверждается его обсуждением игр, в которых шансы выигрыша у их участников неравны. Термин *выборочное пространство* или множество исходов броска костей он (1953, с. 18) при этом обозначил словом *circuit*, область:

Другие задачи следует рассматривать более тонко, потому что и математики могут быть обмануты, хоть и иным образом. Я не хотел бы оставлять это дело скрытым, потому что многие, не понимая Аристотеля, были обмануты и оказались в убытке. Так вот, существует одно общее правило, а именно, мы должны рассматривать всю область, и число тех бросков, которые указывают, сколькими путями может быть получен благоприятный результат, следует сравнивать с оставшимся числом в области. Чтобы можно было состязаться на равных, ставки должны быть в соответствии с этой пропорцией.

Таковым было непосредственное приложение правила Аристотеля о справедливых делах. В современных терминах пусть один из игроков ставит x против другого, который поставил y. Вероятность выигрыша у первого пусть будет p, а у второго – $(1 – p)$. В нашем смысле игра справедлива, если ожидания выигрыша равны, т. е. если

$$yp – x(1 – p) = x(1 – p) – yp \text{ или } y/x = (1 – p)/p.$$

Иначе: отношение ставок должно быть равно отношению шансов выигрыша, или правило Кардано. Он последовал за предписанием Аристотеля о т ом, что *то же равенство окажется между этими долями, что и между людьми*. Доли равносильны ставкам, а мерой *справедливости* каждого является вероятность выигрыша.

Отыскивая зарождение вероятностных идей, историки теории вероятностей рассматривали Аристотеля, см., например, Sambursky (1956), Sheynin (1974), Hacking (1975)[7] и Styan (1998). Как правило, они сосредотачивались на его идеях о смысле случайного события и последующих схоластических истолкованиях шанса. Они также изучали постепенное развитие

значения вероятности в её применении к вероятным или разумным доводам.

У Кардано приложение идей Аристотеля совершенно иное; оно основывалось на определении справедливости, а не шанса. Математическое обсуждение азартных игр начинается в гл. 9 LLA, в которой приводится основное определение игральных костей. Кардано описывает два типа костей: правильную шестигранную кость и *астрагалы* (упомянутые лишь мимоходом), т. е. четырёхгранные кости, как правило изготовленные из бабок задних ног овец или коз.

Основным в исходном математическом доводе Кардано является *область* (выборочное пространство) в приложении к кости. Он заключает, что область должна включать выпадение всех возможных граней после шести бросков. В гл. 15 он весьма ясно сообщает, что *величиной области является промежуток времени, в течение которого проявляются все формы.*

Это довольно странное определение, если иметь в виду, что оно строго. Кардано также знал, что оно не соответствует опыту. В начале гл. 9 он указал:

Кость имеет шесть [граней]. *После шести бросков каждый исход должен появиться один раз, но некоторые появляются повторно, и поэтому других не окажется.*

Основываясь на своём первом определении области, Кардано подсчитывает число возможных исходов для двух и трёх костей, т. е. 36 и 216. Обсудив некоторые из этих исходов, он вычисляет в главах 10, 11 и 12 вероятности исходов в играх sors и fritillus. В первой из них исходными являются суммы очков при броске двух или трёх костей, и вычисления Кардано верны. Во второй игре система очков сложнее; Ore (1953, с. 161) воспроизвёл соответствующие правила и вообще подробно исследовал вероятностные вычисления при игре в кости у Кардано. Одно из основных заключений Оре по поводу методов, которыми, видимо, пользовался Кардано, это *рассуждение о среднем*. Для одной кости оно означало, что вероятность любой определённой грани появиться при броске равнялась 1/6, поскольку величина области равнялась шести. При трёх бросках ожидание или среднее количество выпадений этой грани будет равно ½, и поэтому Кардано заключил, что шансы выпадения заданной грани по меньшей мере один раз при трёх бросках и её отсутствия равны. Вот как высказался сам Кардано (1953, гл. 9):

Половина общего числа граней всегда представляет равенство. Так, шансы какого-либо исхода появиться, или не появиться, в трёх бросках равны, потому что область заканчивается при шести бросках. Иначе, в одном броске окажется один из трёх исходов.

Это неверно. Вероятность выбросить одно, два или три очка при одном броске кости равна 1/2, но шанс [вероятность] выбросить одно очко по меньшей мере один раз в трёх бросках равен 91/216 или 0, 42. Вот мнение Оре [ссылки нет]:

Это значение довольно удовлетворительно, потому что верное число [требуемое число бросков для получения

половинной вероятности выпадения некоторой грани по меньшей мере один раз] *заключено между тремя и четырьмя. И таков вполне мог быть ответ, соответствовавший его опыту игры, на основе которого Кардано так сильно поверил в своё рассуждение о среднем. В других случаях также заметно, что он пытается обобщать на основе весьма малого опыта.*

С современной точки зрения подход Оре очень неплохо истолковывает попытки Кардано. Но суть в том, что исследование Оре основано на хорошо развитом понятии математического ожидания, т. е. понятия, которое Оре возможно примыслил сочинениям Кардано, а не вынес из них. Я бы решил, что первоначальные и неверные доводы Кардано основанные на области, и *рассуждение о среднем*, которое сформулировал Оре, связано с понятием справедливости по Аристотелю, которое Кардано истолковывал как *равновероятные исходы при равных ставках*.

Кость имеет 6 граней, из которых 3, например, первые три, интересуют нас. Отношение числа всех граней к числу интересующих нас равно 6/3 = 2, а кроме того имеется 6 возможных исходов. Чтобы сохранить для справедливости по Аристотелю то же соотношение 2, Кардано предположил, что число интересующих его исходов (например, содержавших одно очко хотя бы один раз) должно быть равно трём. Но Кардано ошибся, приняв соответствие между тремя различными гранями при одном броске и какой-либо гранью при трёх бросках. В этом месте в LLA Кардано захотел, чтобы математика заставила события быть равновероятными или справедливыми вместо того, чтобы она показала, как отыскать справедливость.

Лишь в дальнейшем изложении, уже после этих неверных исходных вычислений, Кардано понял ошибочность своего математического рассуждения и правильно вычислял шансы. Эти неверные вычисления, каково бы ни было их философское происхождение, как показал Оре, позволяет нам проникнуть в суть исследования системы исходов при некоторых играх в кости, проведённого Кардано.

Оре также заметил, что Кардано попытался согласовать верные вычисления с теми, которые были основаны на рассуждении о среднем. Если же мы истолкуем это рассуждение иначе, а именно на основе справедливости, то сможем увидеть, почему более неясные утверждения Кардано в LLA, по словам Оре окажутся

Связаны именно с согласованием обеих точек зрения [верного метода и рассуждения о среднем].

Кардано был озабочен тем, чтобы верное вычисление указывало на справедливость. Примерное согласие меду обоими подходами возможно привело его (1930, с. 195) к следующему замечанию:

Всё это схоже с вычислением шансов при игре: система сходит на нет или становится неоднозначной.

Кардано несколько продвинул вычисление шансов в карточных играх, и особенно в primero. Он рассматривал вид задачи на раздел ставки в этой игре, более простой, чем классическая

задача, которую решили Паскаль и Ферма и которая привела к формальному[?] развитию исчисления вероятностей. В primero, при определённом положении один из игроков, неудачник, мог просить [требовать], чтобы суммарная ставка была разделена между ними. Одна часть этой суммы разбивалась, обычно поровну, а игра продолжалась на оставшуюся часть, и её получал победитель.

Для сохранения справедливости Кардано заявил, что возможность указанной просьбы должна быть обсуждена до начала игры, потому что её ход обеспечивал сведения об остававшихся на руках картах, и неудачник смог бы решить, выгодно ли ему или нет выполнение этой просьбы. Применяя свой математический критерий справедливости и основывая свои вычисления на шансах того, что остававшиеся карты приведут к выигрышу, Кардано показал, что указанная просьба [если решение о ней не принято заранее] благоприятна для неудачника.

У Кардано не было никаких вычислений шансов каждого типа раздачи карт в этой игре. Их можно было получить при сравнительно несложных комбинаторных вычислениях, подобных [соответствующим вычислениям] при игре в покер. Но более чем через шесть лет после окончания LLA он разработал математическую теорию для подобных вычислений. В качестве части более обширной работы он (1570) опубликовал метод, использующий арифметический треугольник для вычисления числа комбинаций элементов, выбранных из группы неоднородных объектов. Шансы раздач могут быть вычислены при расширении и применении треугольника Кардано [?]. В качестве примера он не обратился ни к карточным играм, ни к каким-либо иным азартным играм. Boyer (1950) ошибочно заявил, что Кардано применил результаты своего арифметического треугольника к азартным играм, на самом же деле он рассмотрел выбор расположения 10 человек за столом, т. е. типичный пример, который появлялся в ранее опубликованных математических сочинениях. Так, Edwards (1987) назвал три других авторов, которые рассматривали то же расположение.

Как Кардано связал определение справедливости по Аристотелю с вычислением шансов? Возможное объяснение можно найти у Цицерона (2000), который решил то, что сейчас в философии и юриспруденции называется задачей о спасательной шлюпке. В современном виде её можно сформулировать следующим образом. В шлюпке находится несколько человек; она потонет, если одного из них не выбросят за борт, так кого именно? Broome (1984) описал первоначальный исторический эпизод, в котором помощник капитана решил выбросить нескольких мужчин, но спасти женщин и детей, равно как и экипаж. Цицерон описал иное положение, но вопрос был по существу тот же. [Решение: если жизнь двух человек одинакова важна и сама по себе и для государства, то] *следует решить так, как в лотереях или азартных играх*.

Иначе говоря, в этом случае решение остаётся чисто случайным. В 1841 г. первоначальный вариант задачи о

спасательной шлюпке привёл к судебному делу, и судья также решил, что выбор следует делать по жребию.

5. Scientia и её отношение к справедливости

Чтобы подкрепить свои доводы в пользу игры, Кардано основывался на понятии справедливости по Аристотелю (1955, кн. V), и ему пришлось обратиться к отрицательному отношению Аристотеля к игре (§ 3). Как Кардано указал в гл. 10, суть состояла в природе выигрыша. Он подразделил выигрыши в игре и заявил, что некоторые из них приемлемы. Гоулд, переводчик LLA, определил его лучший вид выигрыша словами *от тех, кто желает* [играть] *и представляет себе риск* [проигрыша] (Lucrum enim a volentibus, atque scientibus optimum est). Некоторым этот перевод окажется немного неясным. Кроме того, Гоулд перевёл суть *volentia* словом *желает*, но оно может означать и *склонность*, а *scientia* обычно переводится как *знающий* или *способный*. Поэтому указанную латинскую фразу можно понять так: *Неприемлемый вид выигрыша при игре происходит за счёт тех, кто не желает или не склонен играть, и не знает, как надо играть.*

В своём подразделении выигрышей Кардано рассматривает различные возражения против игры, в том числе высказанные Петраркой. Чтобы продолжить своё описание, он дал определение выигрыша и вернулся к методу *in utramque partem.* Сославшись на Аристотеля, Кардано заявил, что выигрыш в игре низок, а потому омерзителен и неприемлем. Затем, однако, он перешёл на противоположную точку зрения, представив довод в пользу игры. Он заявил, что церковь не осуждает её саму по себе, потому что в основном обеспокоена возможным при ней богохульством. Ранняя церковь в основном осуждала игру и азартные игры, но положение изменилось с развитием в средневековье церковного права. Кроме ограничений, отмеченных Фомой Аквинским (§ 3), единственным общим запретом игры во времена Кардано было решение Четвёртого Латеранского Собора 1215 г. Оно запретило духовенству играть в азартные игры и даже присутствовать при них. См., например, статью Gambling в *Catholic Enc*. (Herbermann 1907).

Ключом к ответу на возражения против игры у Аристотеля является *scientia* (знание, способность). Это – вторая тема LLA. Кардано ознакомил читателя с играми, так чтобы они смогли играть с volentia, обладая scientia игры, способностью к ней. Выиграет ли читатель в справедливой игре или его противник, выигрыш всё равно можно будет отнести к лучшему виду.

Поощрение scientia и её отношения к справедливости явно заметно у Кардано в первом исследовании методов обмана. Первое упоминание обмана относилось в основном к карточным играм в гл. 6, *Фундаментальный принцип игры*. Обсуждение он там начал так, как мы сообщили в § 3. Затем он описал посторонних наблюдателей и других зрителей. Они могут сообщать сведения противнику или отвлекать от игры, чтобы игрок переставал сосредотачиваться на ней. Кардано задал тон

своей точки зрения на обман в своём первом высказывании о посторонних наблюдателях:

Играя в многолюдной толпе, ты вряд ли избежишь глупости, если окружающие настроены против тебя, или несправедливости, если они за тебя.

Связь со справедливостью здесь очевидна. В дальнейших описаниях обмана в карточных играх и играх в кости, в главах 17 и 7 соответственно, эта связь не очевидна, но Кардано сообщил, как происходит обман, чтобы игрок мог представить себе эти методы (или получить scientia о них), предохраниться и избежать глупостей. В то же время игрок не должен пользоваться своими знаниями для несправедливости. Вот пример. Честная кость это совершенный кубик, и Кардано описал три способа получения несимметричных костей. […] Чтобы противостоять этим видам обмана Кардано советует рассматривать кость с трёх сторон [со стороны оснований и боковых граней]. Странно, что он не упомянул налитых свинцом костей.

Обман в азартных играх не ограничивался кругом лиц, известных Кардано, или Италией вообще. Кроме костей с закруглёнными рёбрами все методы обмана при игре в кости, включая кости, налитые свинцом, упоминаются в английской литературе XVI в. о жульничестве. Её описание и возможное отношение к истории теории вероятностей см. в нашей статье (1993). В этой литературе упоминаются и методы обмана в карточных играх, включающие подтасовку колод и различные ловкие движения для извлечения из них нужных карт.

Кардано упомянул другие методы обмана с помощью колец с зеркальцами, краплёных карт и их намыливания (после чего они легче скользят одна на другой). В соответствии с поощрением scientia он советовал, как исследовать колоды карт, чтобы предохраниться от типичных методов обмана.

Применение ловких движений в карточных играх связано у Кардано с его астрологическими работами. В гл. 17 LLA он описал эти движения, и более подробно рассмотрел этот вид мошенничества в карточных играх в *De Subtilitate*, кн. 18. Перевод соответствующего места см. в Maxwell-Stuart (1998). Интересно здесь его описание тщательного наблюдения за движениями мошенника, чтобы понять его уловки. Кардано не достиг цели, однако решил, что обман совершался ловкими движениями, но не был вызван духами или магией. Ясно, что он не верил ни в волшебство, ни в предсказания при помощи случайных механизмов. Он скорее весьма тщательно различал истинные (астрологические) предсказания и обман и случайные совпадения. О его работе в астрологии и среде астрологов см. Grafton (1999).

По Кардано, наилучший вид выигрыша в азартной игре наступает от тех, кто желает и умеет играть. Он поощрял законную способность и не относил весьма способных игроков к мошенникам. К подобным способностям он относил использование памяти. В гл. 23 он признал значимость

запоминания использованных карт колоды, а в гл. 17 ясно заявил, что

Тех, однако, кто внимательно наблюдает и узнаёт, какие карты можно ожидать, обычно не называют обманщиками, а считают благоразумными.

Но Кардано осуждал некоторые уже упомянутые явные способности обмана, хотя не все обязательно считали их незаконными. Так, в кн. IV своего *Придворного* Кастильоне (1967) указал:

Невозможно хорошо управлять собой или другими без Божьей помощи. Иногда Бог дарует добрым людям удачу как своего посланника, чтобы уберечь их от серьёзной опасности, а иногда неудачу, чтобы они не успокаивались процветанием и не забывали бы ни Его, ни человеческого благоразумия. Оно часто так же противостоит неудачам, как хороший игрок исправляет плохие броски костей расположением игральной доски.

В гл. 7 Кардано осудил подобное управление игральной доски как метода обмана.

6. *Liber de Ludo Aleae* как документ гуманизма

В период Ренессанса гуманизм был мощным интеллектуальным движением. Он был основан на вере в то, что изучение классических древних текстов, особенно греческих и римских, может привести к духовному возрождению (Nauert 1995). Гуманисты Ренессанса активно изыскивали, аннотировали и публиковали эти древние тексты, равно как и переводили их, главным образом с греческого на латинский. Аристотель был у них излюбленным классическим автором, и его *Этику* усердно читали, так что Celenza (1999, с. 48) заявил:

Если ты гуманист, то одним из способов овладеть аудиторией было бы применение терминологии из Этики Никомаха, которая была бы знакома, как было принято, читающей публике.

Неудивительно, что при обосновании своих вероятностных вычислений Кардано доверялся *Этике* и что он принял мнение Аристотеля об игроках в карты, чтобы привести свои собственные доводы. Мы уже заметили это влияние и влияние других гуманистов на LLA. За исключением мимоходной ссылки на гуманизм у David (1962), никто не рассматривал LLA в контексте гуманизма Ренессанса.

Гуманизм Кардано ясно виден уже в начале книги, в которой приведено несколько ссылок на классические источники и описаны древние кости, называемые *астрагалами*. Но пока Кардано не упоминает фактических древних азартных игр; в какой-то степени подробно они рассматриваются в самом конце книги, в главах 30 и 31, и в некоторой мере обсуждаются в заключительной гл. 32. Сведения об этих играх он перенял у Calcagnini (1544, с. 286 − 300), *De talorum ac tesserarum et calculorum*. Астрагалы, как мы упоминали, это […], tessera – правильная шестигранная кость, а calculus это камушек. Кардано обсуждал только астрагалы и правильную кость и не обратил внимания на игру с камушками. Обсуждение старинных костей не

только подчёркивает его гуманитарное образование, но выявляет попытку соотнести игру в кости с *Этикой* Аристотеля посредством его же, Аристотеля, учения о среднем.

В гл. 30 LLA Кардано описывает правильную кость и ссылается на многие древние источники, которые упомянул Calcagnini. В контексте древних авторов Кардано также рассмотрел ius (юстицию) и scientia. Он заметил, что сумма очков на противоположных гранях кости всегда равна семи, что верно и сейчас. Поэтому легче выявить обман, достигаемый фальшивыми костями, у которых отсутствуют некоторые из чисел шести различных очков, а некоторые другие повторены. И далее Кардано описывает три других метода обмана при помощи ловких движений и умения подбрасывать кость так, чтобы выпадало нужное число очков.

Гл. 31 посвящена астрагалам, чьи противоположные грани оцифрованы числами 1 и 6 и 3 и 4, снова составляющие 7. В обычной игре применялись четыре астрагала, и после краткого описания астрагалов Кардано подсчитывает число случаев, при которых может происходить каждый из возможных исходов. Так, исходы бросков всех астрагалов будут теми же самыми, как, например, (3, 3, 3, 3), в четырёх случаях, а в 24 случаях они окажутся все различными, как, например, (1, 3, 4,6)[8].

И Кардано перечислил число случаев всех возможных бросков четырёх астрагалов, из которых нельзя непосредственно вывести соответствующие вероятности, но Кардано не осознаёт этого. Дело здесь в том, что появление различных граней не равновероятно. Плоские грани появляются примерно в четырёх случаях из десяти, а узкие – примерно один раз. Hagstroem (1932), дочери которого подбросили астрагал несколько сотен раз, вывели именно эти соотношения. Кардано заканчивает главу, называя и стараясь описывать различные исходы бросков. Венерой, которая считалась удачной, назывался бросок с появлением всех различных граней, и Кардано заметил, что он происходит в наибольшем числе случаев (в 24 из 256). Несчастливым считался бросок *собака*, хотя что именно он означал, осталось неясным. Во всяком случае, по меньшей мере на одной грани должно было появиться число 1.

В гл. 32 Кардано пытался разъяснить суть этого броска, вероятно применив учение Аристотеля о среднем, описанное в кн. II *Этики* (Аристотель 1955). Аристотель определил среднее как нечто, равноотстоявшее от крайностей, как ни излишнее, ни недостаточное[9]. Эти два средних не обязательно совпадают, и Аристотель привёл пример. Количества пищи с определённым средним, которым располагает спортсмен при своей тренировке, и средним, которое соответствует его потребностям, могут быть различными[10].

Следует стремиться к среднему, и для человека добродетель состоит в этом стремлении. Кардано вначале определил своё среднее для множества из шести костей, в каждой из которых число оттиснуто лишь на одной грани, а на всех вместе – все числа от одного до шести[11]. Он обычным путём получил среднее

арифметическое 3½, а его название среднего было mediocris, т. е. буквально *в среднем состоянии между слишком многим и слишком малым*. В указанном примере Кардано, видимо, был озабочен тем, что [при броске этих костей] имеется склонность к числам ниже среднего. Принимая пустые грани за нули, я вычислил вероятность того, что сумма очков меньше среднего равна 0,548 и равна 0,342 для суммы, равной нулю. С современной точки зрения озабоченность Кардано следовало ожидать: распределение, которое он вывел, имеет длинный хвост справа, и среднее распределения превышает медиану.

После этого первоначального определения Кардано вернулся к броску четырёх астрагалов. Вычисление среднего в этом случае следовало указанию Аристотеля, т. е. вычислению среднего из крайних значений. Кардано мог иметь это в виду, когда заключил, что бросок собака должен иметь более одной грани, оцифрованной единицей. Наименьшее число очков при броске четырёх астрагалов равно 4, а наибольшее – 24, так что по Аристотелю среднее равно 14. При двух единицах и двух шестёрках сумма также окажется равной 14, так что превысить среднее число не удастся.

Хоть Кардано не упоминает этого, *Этика* могла бы объяснить ему, почему Венера считалась удачным броском: она не только выпадает в наибольшем числе случаев, но сумма очков равна 14, т. е. среднему по Аристотелю. Кардано возможно пытался применить учение Аристотеля о среднем, чтобы обосновать [различные решения при игре в primero].

Другая отличительная черта в сочинениях гуманиста это использование классических примеров, и LLA обильно пестрит ими. Так, можно сослаться на подробное исследование трёх причин, которые Кардано привёл в пользу игры (§ 4). Первым мы обсудим ту, которая в гл. 4 являлась третьей. Это отклонение прежнего осуждения игры и единственное, которое сопровождается непосредственной ссылкой на классику. Он заявил, что игра

Это также средство для завязывания знакомства, и многие выбились в люди из неизвестности ввиду знакомства с князьями во время игры.

Он цитирует Цицерона […]. Вторая причина в пользу игры это достигаемое ей ослабление напряжённости. […] Вероятным источником этого чувства является *De Oratore* Цицерона (2001, с. 240). Конкретная ссылка на него и выдержка из его комментария об игре в кости с целью провести время при дурной погоде приведены в заключительной главе LLA, а не в гл. 4. […]

Второй пример из того же сочинения непосредственно относился к ослаблению напряжённости, а не к дурной погоде.

Противоположную точку зрения высказал Петрарка за двести лет до Цицерона в своей *De Remediis*, кн. I, 26 (Petrarca 1991, т. 1, с 79). Он осуждал игры в кости, начав с классических примеров о тех, кто наслаждается игрой в кости и board games, чтобы снять напряжение […].

Это высказывание видимо подкрепляет точку зрения Кардано и вполне могло служить источником его аналогичного мнения. Но оно вырвано из контекста: Петрарка затем заявил, что не всегда следует подражать *необычным предпочтениям образованных и известных лиц*, потому что это может привести к беде. […]

Наконец, в гл. 4 LLA довод в пользу игры противоречит теме притворства в *Придворном* Кастильоне (1967). Кардано указал:

Знание характера наших сограждан это дыба, на которой выясняется гнев, жадность и честность или бесчестность. Ибо, если ставки высоки, игра предоставляет существенные свидетельства и является палачом.

[Petrarca (1991, т. 1, с. 83) советует дамам воздерживаться от игры, чтобы скрывать грехи, а также и мужчинам, которые к тому же не должны оскорблять Бога.]

В LLA можно найти [большое число иных влияний гуманизма.]

7. Соотношение с *De Vetula*

Описание броска трёх костей у Кардано весьма схоже, хоть и более сжато чем в поэме *De Vetula*, которая приписывалась Овидию. Написанная примерно в 1250 г[12]. на латинском языке и будто бы являющаяся автобиографической работой Овидия, она подразделена на три книги. […] Robathan (1968) и Klopsch (1967) переписали поэму на основе различных рукописных списков и привели некоторые комментарии.

Вычисление шансов появления различных сумм при броске трёх костей находится в первой книге. Мы (2000) описали эти вычисления, равно как и некоторые записи на полях одной из рукописей поэмы, и привели выдержку об игре в кости на английском языке.

И Кардано, и автор *De Vetula* подходят к своему исследованию бросков костей, утверждая, что имеется 6 случаев, при которых все исходы равны (триплет), 30 случаев, когда равны два исхода (дублет), например, (1, 1, 2), и 20 случаев, когда они все различны. Оба они утверждают, что 30 получено как произведение 6·5, поскольку в шести случаях равны два исхода, и в пяти случаях третий исход отличен от совпавших. Но только автор *De Vetula* описал (несколько неясно), как он отыскал 20 случаев различных исходов. Впрочем, по крайней мере в одном рукописном списке это поясняется в записи на полях.

Приведя более современные комбинаторные доводы, укажем, что 20 это число сочетаний из трёх элементов (трёх различных граней) из шести возможных, и Кардано мог бы легко вывести это число, воспользовавшись арифметическим треугольником, например, приведённым Tartaglia (1556). Edwards (1987) подробно описал арифметические треугольники, производные от них и их применение до треугольника Паскаля.

И Кардано, и автор *De Vetula* утверждали, что существует три способа получить дублет совместно с другим исходом (например, 1, 1, 2; 1, 2, 1 и 2, 1, 1) и шесть способов , чтобы получить один и тот же результат при трёх различных исходах [6 = 3!]. Основное различие их исследований состоит в том, что только автор этой

поэмы привёл таблицу, чтобы показать, как получаются различные суммы очков. Другое отличие заключается в терминологии. Описывая число случаев при броске костей, Кардано пишет sortes, т. е. слово, относящееся к числу шансов, а автор *De Vetula* использует слово cadentia, которое относится к соответствующему числу случаев.

Сравнительную близость их подходов можно противопоставить тому, который выбрал Галилей (David 1962). Ответ у него тот же, но получил он его другим путём. Он потратил много усилий, чтобы показать, что существует только один способ получить равное число очков на всех костях, три способа получить дублет с каким-либо другим исходом, и шесть способов получить отличные друг от друга исходы. Как и в *De Vetula*, Галилей составил таблицу для подсчёта шансов различных сумм, но она выглядит совсем иначе, и ясно, что он не основывался на *De Vetula*.

Я бы скорее считал, что Кардано перенял свои вычисления для трёх костей у автора *De Vetula* и рассматривал случаи двух костей и одной кости тем же способом. Krischer (1994) держится противоположного взгляда и считает, что Кардано не основывался на этой поэме. Так, он заметил, к примеру, что Кардано не цитировал её саму. Kendall (1956) неявно принял подобную точку зрения и утверждает, что вероятностные результаты *De Vetula* Кардано *открыл заново*. Тем не менее, оба подхода очень близки, и мнение о зависимости нельзя отбросить. Вполне возможно, что Кардано, будучи гуманистом, прочёл *De Vetula*, весьма вероятно в напечатанном виде, а не в рукописи. Таких публикаций было две (Anonymous 1475?; 1479). Основное различие между решением поставленной задачи у Кардано и автора *De Vetula* представляли численные таблицы, которых нет в первой из этих публикаций. Более того (further), таблицы появляются [??] в той части книги, в которой встречается слово cadentia.

Указанные публикации *De Vetula* несомненно появились как часть возврата древности, который характеризовал Ренессанс, вероятно по желанию издателей опубликовать *старинное* сочинение. Овидий был популярным автором. В каталоге *Short-Title Catalogue of Books Printed in Italy* в British Library упоминается более 40 изданий его различных работ до 1500 г. Кроме того, указанные издания *De Vetula* типичны для издателей тех времён. В первом много ошибок, а во втором указано, что они были тщательно выправлены (Robathan 1968).

8. Обсуждение и выводы

Многие комментаторы LLA заявили, что эта книга является неудачным сочетанием нескольких, иногда противоречащих друг другу результатов и утверждений. Я бы утверждал, что, как бы плохо она ни была составлена, её текст внутренне согласован и вся она логически последовательна. Согласованность вытекает из попытки Кардано показать положения, при которых игру можно считать справедливым занятием (ius). Более того, он обучает

(обеспечивает scientia) различным сторонам игры, чтобы предохранить читателя от несправедливости и указать положения, при которых выигрыши можно считать относящимися к наилучшему виду.

В методе построения LLA видна попытка убедить, вне зависимости от мнения классиков об игре и азартных играх, что в подобных занятиях всегда можно отыскать справедливость. Вначале на классических и современных ему примерах он показал при помощи метода *in utramque partem*, как подойти к вопросу о справедливости в игре. И в ходе обсуждения Кардано математически доказал справедливость в играх того времени. Частично справедливость сохраняется при помощи scientia, и Кардано сообщает необходимые для этого сведения, а в конце книги он возвращается к классическим текстам. Математической, хоть в современном смысле вероятностно ошибочной, обработкой старинных задач, Кардано убеждает нас в том, что в азартных играх всегда возможна справедливость.

Вначале он предполагает равенство ставок и равенство шансов. Такова, возможно, была преобладающая предпосылка в период между составлением *De Vetula* и его собственным временем, притом что существовал пример её появления в древности. Мы упоминали его решение варианта задачи о спасательной шлюпке, в котором равная значимость жизни её пассажиров подразумевала равные шансы выбора [жертвы]. С другой стороны, равной значимости отдельных предметов [и индивидов] можно достичь, а затем сделать выбор с равными вероятностями.

Примером из древности может послужить распределение наследства. В древней Греции наследуемое имущество распределялось на равноценные доли, которые затем передавались наследникам по жребию, см., например, Thalmann (1978). К XVI в. этот метод распределения собственности был даже перенят в английских законах для решений об оспариваемых состояниях, и Gataker **(**1619) приводит соответствующую ссылку. Возможное желание составить равновероятные события может прояснить выдержку из рассказа сборщика пожертвований на религиозные цели в *Кентерберийских рассказах* Чосера (Chaucer 1977, с. 227):

Клянусь кровью Христа безгрешного,
мой шанс семь, а твой – пять и три.

Шанс можно истолковать как выигрышный исход броска кости. Чосер не сослался на вероятность, но шансы в указанной выдержке равновероятны: при броске двух костей 7 имеет вероятность 1/6, и такова же она и для сумм 5 и 3.

В какое-то время произошёл мыслительный переход от жеребьёвки с равными шансами к равным шансам групп жребиев или исходов [?], но в LLA Кардано попытался продвинуться ещё дальше. Применяя понятие справедливости по Аристотелю, он решил обобщить задачи на азартные игры за пределы равных ставок, хоть и ограничился вычислением числа исходов события.

Это видно в гл. 32, где Кардано сосчитал число шансов [случаев] в броске астрагалов, но не вычислил вероятности

бросков. В пределах понятия шанса не обязательно принимать в расчёт позднейшие вероятностные понятия, как, например, плотности, рассчитанные на длительное время (long-time frequencies), степени доверия или даже ожидание, к которому он близко подошёл. До LLA было необходимо лишь доверяться справедливости для установления равноценных начальных условий, в частности равных ставок и равных жребиев для всех игроков. В том же самом контексте Кардано основывался на справедливости, чтобы рассматривать положения при неравноценных условиях[13].

Признательность. Я благодарен профессору Б. Акрес из колледжа университета Зап. Онтарио (г. Лондон, Канада) за комментарии и поощрение, равно как и студентам […] этого университета за многие проницательные вопросы и комментарии, а также редактору [журнала] К. Фрейзера и референтам за многие полезные комментарии.

Примечания

1. О Галилее автор вспомнил только в § 7.

2. Кендалл (1956), которого автор упоминает в § 7, назвал не 1250 г., а период 1220 – 1250 гг.

3. Студенты университетов сдавали тривиум и квадриум (сессии по трём и четырём дисциплинам или наукам). От тривиума произошло прилагательное *тривиальный*.

4. В связи с миланским университетом автор упоминает Piatti foundation (фонд Piatti), который мы не смогли установить.

5. Кардано был профессором математики в Миланском университете (ср. Прим. 4) и членом коллегии миланских врачей. Впрочем, Зубов (2010, с. 6) заметил, что попытка Кардано вступить в эту коллегию оказалась неудачной.

6. Без указания номера страницы эта ссылка почти бесполезна. Этот же недостаток встречается у автора повторно.

7. Хакинг не описывал идей Аристотеля.

8. 24 = 4!.

9. С современной точки зрения определение должно быть положительным, а не отрицательным. Древнегреческое определение точки как объекта, не имеющего ни длины, ни ширины, не высоты, не признаётся (и определения точки не существует).

10. Этот пример следовало уточнить.

11. В третьей части своего *Искусства предположений* (задачи 23 и 24) Якоб Бернулли рассматривал подобные кости и называл их *слепыми*.

12. См. Прим. 2.

13. Неудачная формулировка.

Краткие сведения об упомянутых лицах

Аретино Пьетро, 1492 – 1556, писатель, драматург, сатирик

Боэций Аниций Манлий Торкват Северин, ок. 480 – 524, римский государственный деятель, философ, богослов, теоретик музыки

Кастильоне Бальдассаре, 1478 – 1529, писатель

Леонардо Пизанский (Фибоначчи), ок. 1170 – после 1228, математик

Петрарка Франческо, 1304 – 1374, поэт, один из величайших деятелей периода, предшествовавшего Ренессансу

Библиография автора

Cardano G.

1539, *Practica Arithmetice* etc. Milan. Перепечатка: Cardano (1966, vol. 4).

1570, *Opus novum de proportionibus numerorum*. Перепечатка: Cardano (1966, vol. 4).

1930, *The Book of My Life*. New York. *О моей жизни*. М., 1938.

1953, *The Book on Games of Chance*. New York.

1966, *Opera omnia* (1663). Stuttgart/Bad Cannstadt.

1968, *The Great Art; Or, the Rules of Algebra. Cambridge, Mass.*

Другие авторы

A**nonymous** (1475?, 1479), *Publii Ovidii Nasionis liber de vetula*. Perugia; Cologne (с несколько иным названием).

Aretino P. (1971), *Aretino's Dialogues.* New York.

Aristotle (1955), *Ethics. Nicomachean Ethics*. London. *Никомахова этика. Большая этика. Соч.*, т. 4. М., 1983. *Эвдемова этика. Соч.*, т. 1. М., 1975.

Bellhouse D. R. (1993), The role of roguery in the history of probability. *Statistical Sci*., vol. 8, pp. 410 – 420.

….— (2000), *De Vetula*: a medieval manuscript etc. *Intern. Stat. Rev*., vol. 68, pp. 123 – 136.

Boyer C. B. (1950), Cardan and the Pascal triangle. *Amer. Math. Monthly*, vol. 57, pp. 387 – 390.

Broome J. (1984), Selecting people randomly. *Ethics*, vol. 95, pp. 38 – 55.

Calcagnini C. (1544), *Opera Aliquot*. Basel.

Castiglione B. (1967), *The Book of the Courtier*. London.

Celenza C. S. (1999), *Renaissance Humanism and the Papal Curia* etc. Ann Arbor,

Chaucer G. (1977), *The Complete Poetry and Prose of Geoffrey Chaucer.* New York. *Кентерберийские рассказы*. М., 1973.

Cicero M. T. (2000), *On Obligations*. Oxford. Цицерон М. Т. (1975), *О старости, О дружбе, Об обязанностях*. М.

---(2001), Cicero: *On the Ideal Orator*. Oxford. Цицерон М. Т. (1972), *Три трактата об ораторском искусстве*. М.

Cotton C. (1674), *The Compleat Gamester* etc. London.

David F. N. (1962), *Gods, Games and Gambling.* London.

De Mora Charles (1981), La teoria de la probabilidad etc. *Llull*, t. 4, pp. 123 − 141.

Edwards W. F. (1987), *Pascal's Arithmetic Triangle*. London. Bloomington – London, 2002.

Feldmann R. W. (1961), The Cardano – Tartaglia dispute. *Math. Teacher*, vol. 54, pp. 160 – 163. Перепечатка в сборнике Swetz (1994).

Fibonacci L. (2002), *Fibonacci's Liber Abaci*. Перевод книги Pisano L., *Book of Calculation*. New York.

Fierz M. (1983), *Girolamo Cardano*. Boston. Перевод (с какого языка?).

Franklin J. (2001), *The Science of Conjecture.* Baltimore.

Gataker T. (1619), *Of the Nature and Use of Lots*. London. Academic, 2008.

Grafton A. (1999), *Cardano's Cosmos*. Cambridge, Mass.

Grendler P. F. (1989), *Schooling in the Renaissance Italy*. Baltimore.

---*(2002), The Universities of the Italian Renaissance. Baltimore.*

Hacking I. (1975), *The Emergence of Probability*. Cambridge. Cambridge, 2006.

Hagstroem K.-G. (1932), *Les préludes antiques de la théorie des probabilités.* Stockholm.

Herbermann C. G., редактор (1907), *The Catholic Encclopedia*. New York.

Hoyle E. (1743), *A Short Treatise on the Games of Whist.* London.

Huygens C. (1657), *De Ratiociniis in Ludo Aleae*. Перепечатано Якобом Бернулли со своими примечаниями. **S, G,** 24.

James T. (1620), *Catalogus universalis librorum Bibliothecae quam T. Bodleius.* Oxford.

Jensen K. (1994), Cardano and his readers in the sixteenth century. В сборнике Kessler (1994, pp. 265 – 308).

Kendall M. G. (1956), The beginnings of a probability calculus. *Biometrika*, vol. 43, pp. 1 – 14. Перепечатка Pearson E. S., Kendall M. G., редакторы, *Studies in the History of Statistics and Probability*. London, 1970, pp. 19 – 34.

Kessler E., редактор (1994), *Girolamo Kardano*. Wiesbaden.

Kline M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York.

Klopsch P. (1967), *Pseudo-Ovidius De Vetula* etc. Leiden/Köln.

Krischner T. (1994), Interpretationen zu *Liber de ludo aleae*. В сборнике Kessler (1994, pp. 207 – 217).

Laird W. R. (1991), Archimedes among the humanists. *Isis*, vol. 82, pp. 628 – 638.

Lieber A. E. (1968), Eastern business practices and medieval European commerce. *Econ. Hist. Rev.*, New ser., vol. 21, pp. 230 – 243.

Mack R. E. (2002), *Bazaar to Piazza: Islamic Trade and Italian Art, 1300 – 1600*. Berkeley.

Maclean I. (1994), Cardano and his publishers 1534 – 1663. В сборнике Kessler (1994, pp. 309 – 338).

Margolin J.-C. (1976),Cardan, interprète d'Aristote. В сборнике *Platon et Aristote à la Renaissance*. *XVIe Colloque Intern. de Tours*. Paris, pp. 307 – 334.

Masi M. (1983), *Boethian number theory*. A translation of the *De Institutione Arithmetica*. Amsterdam.

Maxwell-Stuart P. G. (1998), *The Occult in Early Modern Europe*. New York.

Nauert C. G. (1995), *Humanism and the Culture of Renaissance Europe.* Cambridge.

Ore O. (1953), *Cardano: The Gambling Scholar*. Princeton.

Peterson M. A. (1997), The geometry of Piero della Francesca. *Math. Intelligencer*, vol. 19, pp. 33 – 40.

Petrarca F. (1991), *Petrarch's Remedies for Fortune Fair and Foul*. Перевод книги автора *De Remediis* …, vols 1 – 5. Bloomington.

Platina (1998), *On Right Pleasure and Good Health*. Перевод книги автора *De Honesta … Medieval & Renaissance Texts & Studies.* Tempe, Arizona.

Robathan D. M. (1968), *The Pseudo-Ovidian De Vetula*. Amsterdam.

Rose R. L. (1975), *The Italian Renaissance of Mathematics*. Geneva.

Sambursky S. (1956), On the possible and probable in Ancient Greece. *Osiris*, vol. 12, pp. 35 – 48. Перепечатка: Kendall M. G., Plackett R. L., редакторы (1977), *Studies in History of Statistics and Probability*, vol. 2. London, pp. 1 – 14.

Schrader D. V. (1967), The arithmetic of medieval universities. *Math. Teacher*, vol. 60, pp. 264 – 275. Перепечатка в сборнике Swetz (1994).

Sheynin O. (1974), On the prehistory of the theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 12, pp. 97 – 141. **S, G,** 30.

Siraisi N. G. (1997), *The Clock and the Mirror: Girolamo Cardano and Renaissance Medicine*. Princeton.

Smith D. E. (1970), *Rara arithmetica: A Catalogue of the Arithmetics Written before 1601*. New York.

Styan E. M. (1998), Chance in Aristotle *Physics*. *Chance*, vol. 11 (4), pp. 11 – 16.

Swetz F. J., редактор (1994), *From Five Fingers to Infinity*. Chicago.

Tamborini M. (1999), Matematica, tempo e previsione ne *Liber de Ludo Aleae.* В сборнике Baldi M. и др., редакторы, *Girolamo Cardano. Le opere*. Milan, pp. 227 – 271.

Tartaglia N. (1556), *General trattato di numeri e misure*. Venice.

Thalmann W. G. (1978), *Dramatic Art in Aeschylus's Seven against Thebes.* New Haven.

Thomas Aquinas (1972), *St. Thomas Aquinas Summa Theologiae*, vol. 41. London. *Opera omnia*, tt. 1 – 25. New York, 1948.

--(1975), Тот же источник, vol. 34. London.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. Cambridge. New York, 1965.

Uqlidisi Ahmad ibn Ibrahim (1978), *The Arithmetic of Al-Uqlidisi*. Boston.

Van Egmond W. (1981), *Practical Mathematics in the Italian Renaissance. A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600*. Florence.

Библиография переводчика

Cardano G. (1663), *Oeuvres Complètes*, tt. 1 – 10. Lugdini.

Зубов В. П. (2010), Заметки о Джироламо Кардано. *Вопросы истории естествознания и техники*, № 3, с. 3 – 40.

Проблемы (1969). *Проблемы Гильберта*. М.

Eckman J. (1946), *Cardan.* Baltimore.

Hald A. (1990), *History of Probability and Statistics* […] *before 1750*. New York.

Gini C. (1958), Gerolamo Cardano e fondamenti del calculo delle probabilita. *Metron*, t. 19 (No. 1 – 2), pp. 78 – 96.

La Placette J. (1714), *Traité des jeux de hasard.* La Haye.

Morley H. (1854), *Jerome Cardan*, vols 1 – 2. London.

VII

Джеф Лавленд

Бюффон, достоверность восхода Солнца и вероятностное *сведение к абсурду*

Jeff Loveland, Buffon, the certainty of sunrise
and the probabilistic reductio ad absurdum.
Arch. Hist. Ex. Sci., vol. 55, 2001, pp. 465 – 477

В 1777г. натуралист Бюффон опубликовал свой *Опыт* в четвёртом *Дополнении* к своему многотомному шедевру, *Естественной истории*. В одном из разделов *Опыта* он попытался вычислить вероятность того, что Солнце будет продолжать всходить после того, как его восход наблюдался *n* дней подряд. Предложив мысленный эксперимент, в котором созданный взрослый человек несколько дней наблюдал Солнце, он вычислил соотношение шансов в пользу последующего восхода, равное 2^n или 2^{n-1}:1.

В XIX и XX веках Кейнс и другие осмеяли этот особый случай действительно существовавшей задачи измерения индуктивной достоверности[1], однако в XVIII в. Бюффон был не единственным, который всерьёз исследовал её вероятностными методами. Применяя теорему Бейеса и мысленный эксперимент, в примечательной степени предварявший Бюффона, Прайс (Bayes 1764)[2] определил, что указанное соотношение равно 2^{n+1} или 2^n:1. Через несколько лет Лаплас (1774; 1814/1994, с. 11) применил своё собственное правило последовательности событий[3] и вывел для того же соотношения шансов значение $(n + 1)/1$.

В отличие от Прайса и Лапласа, Бюффон, можно сказать, не пояснил полученного им результата, который соответственно, назвали *совершенно произвольным* (Todhunter 1865, с. 344) и непостижимо ошибочным (Pearson 1978, с. 193 – 194 и 660)[4]. Zabell (1988, с. 175 – 177) даже заинтересовалась, не произошла ли ошибка при копировании текста Прайса. Впрочем, она (1997, с. 368), видимо, затем отказалась от этого предположения и предвосхитила элементы моего собственного довода.

Я здесь утверждаю, что результат Бюффона, пусть и ошибочен, понятен и по всей вероятности не был скопирован у Прайса. Возможные источники исследования Бюффона, опубликованные до 1764 г.. столь многочисленны, что трудно установить, как в точности оно развивалось. Впрочем, новое у Бюффона было явно скромным по сравнению с философскими и математическими традициями, которые к 1750-м годам уже прочно закрепились.

Вот довод Бюффона (1777, § 6), после которого для сравнения указаны соображения Прайса (Бейес 1764/1970, с. 150 – 151):

Представим себе человека, который никогда ничего не видел и не слышал, и выясним, как в его разуме наступают вера и сомнение. Пусть он поразился, впервые увидев Солнце, его блеск высоко в небесах, его снижение и, наконец, исчезновение. Что он

может заключить? Да ничего, кроме того, что видел Солнце, что оно следует по определённому пути и что затем он больше его не видел. Но если это светило появится и исчезнет и завтра, то это второе событие окажется первым опытом, который должен вызвать у этого человека надежду на возвращение Солнца, и он начнёт верить, что Солнце может вернуться, хотя и сильно в этом сомневается. И вот Солнце снова вернулось, и это третье событие оказывается вторым опытом, который ослабляет сомнение настолько, насколько повышает вероятность третьего возвращения. Третий опыт повышает вероятность настолько, что этот человек больше нисколько не сомневается, что Солнце вернётся в четвёртый раз. И, наконец, когда он заметит, что это светило однообразно появляется и исчезает 10, 20, 100 раз подряд, то начнёт считать достоверным, что всегда будет видеть появление и исчезновение Солнца и его движение одним и тем же образом. Чем более схожих наблюдений у него окажется, тем сильнее будет достоверность увидеть завтра восход Солнца. Каждое наблюдение, т. е. каждый день, обеспечит некоторую вероятность, и как только сумма этих вероятностей окажется очень высокой, она обеспечит физическую достоверность[5]*. Поэтому можно всегда выразить её числами, считая началом первый момент нашего опыта.*

То же происходит со всеми другими действиями природы. Например, если мы захотим сократить (réduire) здесь возраст мира и нашего опыта до шести тысяч лет, то для нас Солнце восходило бы только 2 млн 190 тыс. раз, а поскольку мы начинаем счёт со второго восхода, вероятность завтрашнего восхода возрастает как ряд 1, 2, 4, […] *или как* 2^{n-1}. *И поскольку в ряду натуральных чисел* $n = 2\,190\,000$, *мы имеем* $2^{n-1} = 2^{2\,189\,999}$ *и это уже настолько громадное число, которое мы не можем себе представить.*

Представим себе человека, только что появившегося на свет и предоставленного самому себе, чтобы, исходя из своих наблюдений порядка и хода событий, заключить об имеющих место в мире силах и причинах. Первым объектом, который привлёк бы его внимание, будет, вероятно, Солнце. Но после его исчезновения в первую ночь он совершенно не будет знать, увидит ли он Солнце когда-нибудь ещё. Он, стало быть, окажется в условиях человека, производящего первый опыт о совершенно не известном для него событии. Но пусть только он увидит второе появление или одно возвращение Солнца и у него появится ожидание второго возвращения и он сможет узнать, что соотношение шансов в пользу некоторой вероятности этого равно 3:1. Это соотношение будет возрастать, как было представлено раннее, с числом увиденных им возвращений Солнца. Но никакое конечное число возвращений не будет достаточным для достижения совершенной или физической уверенности. Ибо пусть он наблюдал возвращение Солнца миллион раз через правильные и установленные промежутки времени. Это оправдает следующие заключения. Соотношение

шансов в пользу того, что Солнце весьма вероятно снова возвратится в конце обычного промежутка времени, окажется равным миллионной степени двух к единице.

Бюффон имел в виду установить стандарт физической уверенности, которая по его мнению отличалась и от математической (при отсутствии сомнений) и моральной достоверности (с сомнением, приемлемым до вероятностей 1/10 000, как он сам принял в § 8). В эпоху Просвещения было много иных попыток, иногда количественных, отличать физическую и моральную достоверность от математической.

Как и в весьма схожем описании Прайса, Бюффон характерно рассматривает три элемента, которые не появлялись совместно в предшествовавших обсуждениях уровня достоверности. Во-первых, применяется мысленный эксперимент, относящийся к только что созданному или *проснувшемуся* взрослому человеку, совершенно лишённому опыта, но способному на обдуманные знания[6].

Во-вторых, зависимость от наших ожиданий про восход. Наконец, заключение: отношение шансов в пользу продолжения восходов равно 2^n:1 с точностью до коэффициента 2. Хоть обсуждения нематематической достоверности до Бюффона или Прайса не объединяли эти три элемента, нетрудно заметить, что Бюффон мог обыскать каждый из них в отдельности в философской литературе XVIII в. до 1750-х годов.

1. Взрослые люди, лишённые опыта

История мысленных экспериментов над подобными взрослыми людьми переплетена в эпоху Просвещения с историей сенсуализма. Действительно, эти эксперименты имели целью показать, как знание добывается из опыта. Для философов, отрицательно относящихся к надуманным гипотезам, действительно или мысленно существующие младенцы представляли иную возможность для иллюстрации сенсуализма, хоть воссоздание мыслей младенцев и можно было считать неправдоподобным.

Локк (1690, т. 1, с. 184), главный сенсуалист эпохи просвещения, недоверчиво относился *к предположениям, которые трудно исследовать*. Он поэтому удовлетворялся менее тщательно разработанными и менее идеализированными мысленными экспериментами, чем французские сенсуалисты на полвека позже. Помимо воображений о мыслях младенцев, *дикарей* и других людей, обладающих малыми знаниями, Локк в том же сочинении популяризировал мысленный, а впоследствии ставший реальным эксперимент William Molyneux, относящийся ко вдруг прозревшему слепому.

Его спросили, не отличит ли он по виду шар от куба, которые он может отличить наощупь (Локк там же, с. 186 – 188). Локк также предвосхитил причудливый образ *первого* человека из райского сада, которого так часто упоминали позднейшие сенсуалисты:

Если бы Адам и Ева (когда они ещё были единственными людьми) заснули на 24 часа, а не на обычный период, эти сутки оказались для них безвозвратно утерянными[7].

Опыт Локка изобилует воображаемыми людьми, у которых частично отсутствовали знание и опыт, но он не имел дела с людьми с отсутствием опыта, подобных упомянутым Юмом (1748, с. 42):

Предположим человека, наделённого наилучшими способностями разума и размышления, который неожиданно очутился в нашем мире. Он сразу же подметит неизменную последовательность объектов и следование одного события за другим, но ничего больше он не смог бы установить.

Несмотря на Юма, взрослые люди, лишённые опыта, были главным образом французским новшеством. Во Франции мысленные эксперименты изобиловали по крайней мере со времён Декарта, и, по стандартам Локка, многие из них были сумасбродными.

В 1740-е и 1750-е годы их привлекали для поддержки сенсуализма философов, и они создали хорошо известную лучшую пору для взрослых, лишённых опыта (Gay 1969, с. 174 – 176; O'Neal 1996, с. 1 – 3; Geissler 1967, с. 78 – 95; Maupertuis 1748, с. 33, 35).

Бюффон сам дважды возвращался к этому причудливому образу в начальных томах своей *Естественной истории* (1749c, с. 31 – 32; 1749a, с. 364 – 370), в первый раз, чтобы доказать, что некоторые подразделения [таксоны?] в природе были навязаны опытом, а вторично, чтобы показать, как знание возникает из опыта органов чувств. Этот второй мысленный эксперимент относился к его исследованию восхода Солнца, поскольку действующее лицо, взрослый человек, лишённый опыта, вначале поражается Солнцу и опасается, что оно больше никогда не взойдёт. Его *Опыт* (1777) лишь продлил этот прежний *эксперимент* и численно исследовал его.

В период между 1751 и 1766 гг. Дидро, Кондильяк и Шарль Бонне опубликовали свои собственные мысленные эксперименты, относящиеся к взрослым людям, лишённым опыта. Все они хотели иллюстрировать преобладающую роль чувств в образовании мысли (Zabell 1997, с. 368).

Дидро и Кондильяка следует специально упомянуть, потому что они пролили свет на проблему оригинальности подобных экспериментов. Diderot (1749) представил ряд мысленных экспериментов о слепых и людях с необычными в ином смысле органами чувств, а затем (1751, с. 188) предложил исследовать каждое чувство отдельно.

Condillac (1754) опубликовал мысленный эксперимент, занявший целую книгу, о статуе, устроенной как человек. Она подвергается стимулам органов чувств, чтобы проверить их влияние на знание и мысли. Вскоре после этого Кондильяка обвинили в плагиате: статуя появлялась ранее в мысленных экспериментах Бюффона и Дидро. Bongie (1978, с. 85 – 87) доказал, что эти обвинения были несправедливыми, потому что

Кондильяк упоминал лишённых опыта и отделение чувств друг от друга до Бюффона и Дидро. Однако, этот эпизод возможно указывает на то, что тот же мысленный эксперимент возникал у сенсуалистов независимо друг от друга и в период 1740-х – 1750-х годов лишь становился более подробным.

2. Достоверность восхода Солнца

Задолго до *Опыта* (1777) Бюффона упоминалось и исследовалось познание наблюдённых закономерностей подобных движениям Солнца. На антропологическом уровне ясно, что закономерности суточного движения Солнца указывались человеческим опытом, притом настолько, что чудесная остановка Солнца или нарушение его движения широко описываются в мифологии по всему миру. С другой стороны, постоянство движения Солнца как указание на замысел в природе отмечалось даже до образования христианства, см., например Cicero (45 – 44 до н. э., кн. 2, №№ 15 – 17, с. 52 − 53).

На восходе Солнца как на особой характеристике его закономерного движения сосредоточились в Средневековье. В средневековых обсуждениях случайности будущих событий пример нашего очевидного априорного знания солнечного восхода был широко распространён, хотя и в меньшей степени, чем примеры, подобные утверждениям *завтра завяжется морской бой* у Аристотеля или предсказанного отречения апостола Павла от Христа. Holcot (1331 – 1334, с. 151) и Rivo (Fernand de Cordova 1470, с. 101, 125), см. также Rivo (1465, с. 39; 1470, с. 420), − причём последний (?) возможно находился под влиянием Aureolus (1312 – 1320, ч. 1, с. 673), − были среди тех, которые исследовали суть утверждения *солнце завтра взойдёт*.

Априорное знание восхода, как и затмений, вероятно частично интересовало их ввиду его обоснованности опытом, хотя никто из них не подчёркивал этого обстоятельства и не подошёл к формулированию современной проблемы индукции. И именно ввиду опыта для всех из них восход был скорее будущим, а не предсказанным событием.

Наиболее вероятно, что пример восхода продолжал появляться в схоластических комментариях, возможно и в эпоху Просвещения, и тогда уже его значение изменилось[8]. Наверняка, как показала статья D′Alembert (1757, с. 404 – 405) о будущих случайных событиях, прежние доводы были ещё знакомы вплоть до середины XIX в.

К середине XVII в. *неопределённая достоверность* опытных истин стала основной темой богословов и философов. С одной стороны, считалось, что наблюдённые закономерности не могут привести к *свидетельству* или наглядному знанию о будущем. С другой стороны, они создавали неформальные ожидания, в которых было почти невозможно сомневаться. Lubières (1765, с. 395) который в основном повторил содержание рукописи друга Бюффона Габриеля Крамера (1744 – 1745, № 478, с. 278 – 279), заявил, что

Таким образом доказано, что прошлый опыт является источником вероятности о будущем, что у нас появляется основание ожидать появления событий, схожих с наблюдёнными. И чем чаще мы видели их, тем сильнее нам следует ожидать их появления вновь.
См. также Candaux (1993).

Сам Крамер (1744 – 1745, № 460, с. 265), для которого вероятность была уместной, лишь если не было более определённых свидетельств[9], быть может сомневался в возможности приложения своего принципа к восходу Солнца, поскольку астрономы могли доказать, что он неизбежен. См. также Lubières (1765, с. 394) и Крамер (там же, № 540, с. 320).

Но ввиду интереса к повторяющимся событиям как к основе познания, пример восхода оказался естественным объектом анализа для менее практичных авторов по теории вероятностей в XVII – XVIII веках, притом вне зависимости от их знакомства с ним по схоластическому воспитанию. Ссылки на *достоверность* восхода стали обычными.

В руководствах, которые рассматривали теорию познания, условия, свойственные человеку (human conditions) и существующее положение знания, ссылки на *достоверность* восхода Солнца стали обычными. Паскаль (1670, с. 400 − 401, № 91, Brunschvicg)[10] использовал пример нашего знания о восходе, чтобы указать на возможность ошибочности познания в целом. Leibniz (1714, с. 707**)** цитировал это обстоятельство, чтобы показать различие между массовым *иррациональным* ожиданием и *рациональным* ожиданием астрономов. В более положительном смысле ′sGravesande (1724, с. xl, liii), Buffier (1724, с. 307) и Hume (1739, с. 124) указали на *парадокс* восхода, чтобы предположить, что возможен надёжный промежуток между доказательством и невежеством.

Сочинение ′sGravesande (1724) было установившимся описанием экспериментальной философии Ньютона и даже ярко выявляло возможность неопределённости восхода, напоминавшее в некотором смысле позднейшие сочинения Бюффона, Кондильяка и Прайса. В указанном месте (с. liii) он заявил:

Несчастные смертные! Какой прискорбной была бы ваша судьба […] *если, увидев закат, вам пришлось бы опасаться вечной тьмы.*

Для наших целей наиболее интересное обсуждение достоверности восхода появилось у Кондильяка (1754, с. 292 – 293), в том месте, в котором его статуя в течение нескольких дней реагирует на Солнце. Как и человек, лишённый опыта у Бюффона, эта статуя сосредоточила своё внимание на Солнце и беспокоится, что после захода оно исчезло навсегда. Но постепенно, по мере его наблюдения в последующие дни, она уверяется в его возврате […][11].

В основном это же описание появляется у Бюффона и Прайса примерно через десять и двадцать лет. Математика это единственная существенная общность текстов Прайса и Бюффона, отсутствовавшая у Кондильяка. Как и другие авторы

до 1764 г., упоминавшие вероятность восхода, Кондильяк не пытался представить её в численном виде. В XVIII в. он был мало известен в Англии, и его сочинение было переведено на английский лишь в 1930 г. Поэтому маловероятно, чтобы Прайс перенял у него своё рассуждение. Их общий подход почти наверняка случаен, что неудивительно для эпохи, заботящейся о достоверности и опыте и переполненной мысленными экспериментами и взрослыми людьми, находящимися в умственной пустоте.

Бюффон, с другой стороны, вполне мог ознакомиться с указанным текстом Кондильяка, хоть никаких доказательств этого не существует. Но пример Прайса показывает, что ему и не нужен был этот текст, чтобы внушить ему идею о мысленном эксперименте. Во всяком случае, его описание человека, лишённого опыта и увидевшего восход (1749a), предвещает многое из указанного им позднее.

3. Придание достоверности численной меры

Как было сказано выше, до Прайса и Бюффона никто, видимо, не пытался выразить вероятность восхода количественно, и всё же они оба вычислили соотношение шансов в пользу восхода, схожее с $(2^{n+1} - 1)/1$, чтобы установить уверенность своих воображаемых субъектов в последующем восходе после n повторных возвращений Солнца. Точно определить вычисленные ими соотношения трудно, потому что оба они представили свои результаты неоднозначно. Прайс колебался между $2^{n+1} - 1)/1$ и $(2^n - 1)/1$, Бюффон (1777) колебался между $2^n/1$ и $2^{n-1}/1$. Многие авторы ранних сочинений по теории вероятностей округляли шансы $(x^y - 1)/1$ до значения $x^y/1$, и потому *пропущенное* вычитаемое у Бюффона не должно беспокоить нас. Единственным основным отличием между их результатами является коэффициент 2.

Рассуждения Прайса ясны. Несколькими страницами ранее он применил *Первое правило* Бейеса к тому случаю, при котором некий исход наблюдался\ n раз подряд и получил соотношение $(2^{n+1} - 1)/1$ для шансов того, что неизвестная вероятность x восхода превышает половину. В современной терминологии (а Бейес и Прайс применяли геометрический язык Ньютона)

$$P(x > \frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} x^n dx \div \int_{0}^{1} x^n dx = 1 - (1/2)^{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Но, применив этот результат к задаче о восходе, Прайс решил пренебречь первым днём наблюдений, видимо потому, что по его представлениям о мысленном эксперименте в первый день своего существования субъект наблюдал Солнце, а не его восход. Иначе говоря, первый восход наступил для него во второй день. Прайс был заинтересован в вычислении вероятности восхода, − *возвращения* Солнца, − а не в вероятности того, что Солнце будет видно где-то на небе. Поэтому его воображаемый человек указал соотношение шансов $(2^n - 1)/1$ в пользу того, что Солнце взойдёт

после дня *n*. Zabell (1988, с. 176 – 177) утверждала, что Бюффон вывел меньшее соотношение шансов $2^{n-1}/1$ выравниванием соотношения Прайса $(2^n - 1)/1$, потому что ошибочно предположил, что Прайс ещё не убрал коэффициент 2, который соответствовал не относящемуся к делу первому дню мысленного эксперимента. Это возможно, но Бюффон мог вывести своё соотношение проще.

В отличие от Прайса, Бюффон (1777) почти не пояснил своего рассуждения. Он просто заявил[12]:

Считая со второго дня восхода Солнца вероятности его восхода в последующие дни возрастает как члены последовательности 1, 2, 4, …, 64, … или как 2^{n-1}.

В другом месте этого сочинения он, видимо, предположил, что шансы появления исхода, наблюдённого *n* раз подряд, относятся как $2^n/1$, а не как $2^{n-1}/1$. Это расхождение наводит на мысль о том, что у него также не было единого мнения по поводу значимости первого дня мысленного эксперимента. Но в то же время он нигде не защищал свои результаты так тщательно, как в указанном выше случае[13], и поэтому его часто обвиняли в том, что они неясны и произвольны. Он может быть просто скопировал свою формулу у Прайса, но если он представлял себе утончённое рассуждение Бейеса, то почему действовал так, будто его результаты были основаны на здравом смысле?

В крайнем случае, не указывая источника своих рассуждений, он мог бы сослаться на слишком громоздкое доказательство, которое было бы трудно воспроизвести. Но он, очевидно, считал, что его вычисления достаточно ясны и не нуждаются ни в обосновании, ни в формальном доказательстве, ни во впечатляющих ссылках на авторитеты, ни в доказательствах запугиванием [неспособностью понять его].

Мог ли он владеть интуитивным кратким способом вывода соотношений $2^n/1$ или $2^{n-1}/1$? Его работы 1740-х годов о вероятностных рассуждениях в астрономии позволяют полагать, что владел. В труде (1749b), написанным в ранние 1740-е годы, Бюффон предложил пресловутую *гипотезу*, в соответствии с которой Земля и другие планеты были вырваны из Солнца пролетавшей мимо кометой. Чтобы эта идея показалась правдоподобной, Бюффон приял старинный довод, показывающий, что Солнечная система сложилась под действием преобладающей силы, а не возникла случайно. Тот же довод качественно сформулировал Ньютон [Шейнин 2013, § 3.2.3], однако Бюффон был скорее воодушевлён приложением теории вероятностей к этому вопросу у Даниила Бернулли (1734), см. также Lignac (1751, ч. 1, ltr. 2, с. 40) в его недавно получившим приз мемуаре.

Несколько схожим образом Бюффон вычислил соотношение шансов в пользу того, что шесть известных в то время планет случайно обращаются около Солнца в одном и том же направлении. Оно оказалось равным $(1/2)^6 = 1/64$. В отличие от Бернулли Бюффон забыл уточнить, что его решение оказывалось

верным, только если исходить из направления вращения Солнца, однако эта характерная небрежность не должна нас беспокоить.

Интереснее логика его довода и заключения из него. С первого взгляда он не имеет ничего общего с правилом последовательности событий, которое Бюффон позднее исследовал при вычислении вероятности восхода Солнца. Как и Бернулли, Бюффон часто обращался к *приведению к абсурду* предположения, что направления движения планет были равновероятны и определялись случайно. Приложения этого типа доводов сомнительны, но их легко понять.

Предполагают, что данный исход имеет вероятность $1/p$ быть случайным и замечают, что он наблюдался во всех n случаях или испытаниях, что происходило бы с вероятностью $1/p^n$. Эту исчезающе малую величину полагают свидетельством того, что принятое предположение ошибочно (Bru 1988b, с. 75 – 76). В своей качественной форме этот довод можно проследить по крайней мере до классической древности. Cicero (45 – 44 до н/э, кн. 2, №№ 15 – 17, с. 52 – 53) сослался на *упорядоченную схему* вселенной как на доказательство того, что она не могла произойти случайно. Преобразованный богословами в доказательство Божьего промысла, этот довод устоялся в средневековой христианской церкви. В позднем XVII в. он приобрёл количественную точность благодаря развитию количественной теории вероятностей. Но лишь в XVIII в. это новое количественное *сведение к абсурду* стало применяться к наблюдённым закономерностям, а не просто к возможным случаям.

Arbuthnot (1712) основал свой *Довод* на том, что в соответствии со статистическими данными 82 года подряд в Лондоне рождалось [крестилось] больше мальчиков, чем девочек. При равной вероятности их рождений вероятность этого события оказалась равной $1/2^{82}$, т. е. столь низкой, что Арбутнот заключил. что его причиной был Божественный замысел, а не случай (Stigler 1986, с. 225 – 226)**[14]**. Вскоре после этого s'Gravesande (1774) усовершенствовал и подтвердил вывод Арбутнота, применив сложное *сведение к абсурду*. В неформальном количественном виде астрономы, измерявшие в начале XVIII в. форму Земли, применили то же логическое построение, чтобы доказать, что никакие ошибки в отдельных измерениях вряд ли могут сдвигать окончательный результат в одном и том же направлении (Bru 1988a, с. 223 – 225)**[15]**.

Ворвавшись в долголетнее обсуждение происхождения *уродов*, т. е. неправильно образованных при рождении существ, Mairan (1746, с. 60 – 63), применил вероятностное *сведение к абсурду*, чтобы доказать, что четыре излишних пальца ноги недавно описанного человека не могли возникнуть случайно. […] Соотношение шансов против этого он оценил величиной $10^{80}/1$.

Maupertuis (1752, с. 307 – 310) также применил вероятностное рассуждение к многопалости, и, будучи членом Королевской академии наук и его близким другом, Бюффон наверняка знал об этих двух доводах.

В принципе вероятностное *сведение к абсурду* служило лишь для отбрасывания гипотезы слепого случая, но авторы часто применяли его, чтобы утверждать существование преобладающего влияния благоприятных причин, либо Божественного замысла (Arbuthnot, s′Gravesande), либо генетической наследственности (Мопертюи). Более существенное чрезмерное заключение можно найти в работе Бюффона. Соотношение шансов [вероятность] $1/p^n$, полученное вероятностным *сведения к абсурду* в качестве милосердного смертельного удара, ничего не доказывало кроме вероятной ошибочности предположения. Но бюффоново исследование направления планетных орбит указывает, что он не желал ограничить значимости этого соотношения подобным образом. Подсчитав соотношение шансов 64/1 в пользу того, что одна лишь случайность не могла привести к закономерности обращения планет, Бюффон (1749b, с. 134) заключил:

Уже есть соотношение шансов 64/1 за то, что одна лишь случайность не могла послужить причиной закономерности в обращении планет.

Другими словами, не удовлетворившись обычным сомнительным скачком от гипотезы слепого случая к предположению совершенной причинности, Бюффон применил количественный побочный результат своего *сведения к абсурду*, чтобы назначить вероятность гипотезе единой причины! Судя по этому рассуждению, он видимо считал, что если закономерность с *априорной* вероятностью $1/p$ наблюдалась в n испытаниях подряд, то соотношение шансов в пользу того, что закономерность вызвана определённой причиной окажется равным $(p^n - 1)/1$.

Но отсюда следует, что то же самое соотношение шансов будет существовать и в будущем. В частности, в задаче о восходах Солнца подобный анализ приведёт к округлённому соотношению шансов $2^n/1$ в пользу того, что Солнце будет всходить и после n дней, или к соотношению $2^{n-1}/1$, если исключить первый день. И именно эти значения Бюффон приводит в своём *Опыте* (1777).

Бюффон был возможно введён в заблуждение схожестью этой задачи с другими, более известными в теории вероятностей. К примеру, в хорошо устоявшейся теории свидетельских показаний было принято оценивать вероятность прошедшего события в зависимости от числа и качества подтверждающих его свидетелей. Jean Filleau de la Chaise **(**Anonymous 1672, с. 148) писал по поводу великого лондонского пожара 1666 г.:

Всё же, сколько таких, кто не слышал об этом пожаре 20 раз! Вначале они могли даже держать пари на равных, что он произошёл; быть может, могли бы поставить два против одного после того, как узнали о пожаре вторично, но затем […] *поставили бы 100, затем 1000 против одного, а в десятый раз готовы были бы поставить свою жизнь*[16].

Неясно, как он получил последовательность 1, 2, 100, 1000, ∞, хотя её первые члены могли быть выведены каким-то интуитивным приближением к рассуждению Бюффона. Другие

теоретики юридической значимости свидетельских показаний установили свои собственные последовательности соотношения шансов. Все их результаты примыкают к правилам последовательности событий, потому что не только выводят вероятности прошедших событий, но предполагают, что новые свидетели будут и впредь подтверждать эти события.

Авторы вероятностных рассуждений, назначившие свидетелям априорную количественную надёжность, выводили результаты ещё более схожие с теми, которые получил Бюффон. Как правило, они предполагали, что ненадёжность свидетеля равна $1/x$ и затем устанавливали вероятность факта, которые подтверждали n свидетелей, равную $1 - 1/x^n$. Заманчиво было бы логически объяснить достоверность восхода Солнца, о котором нам ничего не известно и априорная вероятность которого может поэтому быть принята равной ½, исходя из ряда n следующих день за днём свидетелей[17]. Но подобная логика ошибочна, потому что восход, т. е. изучаемое явление, на самом деле не единично. И описание у Бюффона не указывает, что он размышлял схожим образом. его знакомство со аналогичными решениями может быть убедило Его принять подобный побочный результат своего *сведения к абсурду* за оценку действительной вероятности.

Бюффон не был первым, кто придумал правило следования событий, которое соединяло прошедшее с ожиданием. Кроме косвенных предсказательных примеров, приведённых выше, вычисление *апостериорных* вероятностей Якобом Бернулли, Муавром и другими[18] часто было в ограниченном смысле равносильно правилу следования событий.

Но правило Бюффона, как и правило Прайса, опубликованное примерно в то же время, выделяется от тех, которые были предложены его предшественниками, своей простотой и общностью. Его математика могла быть ошибочной, но он полностью использовал вытекавшие из неё возможности и в конце концов вывел разностороннее точное правило для предсказания вероятности появления будущих событий в зависимости от закономерности их появления в прошлом. Это правило стоит запомнить не только ввиду тонкости его математической ошибки, − которая может послужить уроком для каждого, применяющего *сведение к абсурду*, − но и как интересное дополнение [counterpoint, противопоставление?] аналогичного правила Бейеса и как свидетельство его конструктивной, хоть иногда небрежной научной напористости (Roger 1989, с. 560 – 561).Эта напористость была возможно усилена здесь возможностью обгона своего долголетнего противника, Даламбера, которую предоставляли вероятностные рассуждения.

4. Заключение

Возможно всё-таки, что Бюффон воспользовался рассуждениями Прайса о вероятности восхода Солнца, но возможно, что и Прайс основывался на мнении Кондильяка. Выше, однако, было показано, что можно обойтись без подобных

предположений, приняв во внимание схожесть исследований этих философов. В любом случае *Опыт* Бейеса был, видимо, так же неизвестен во Франции до 1778 г., как и сочинение Кондильяка (1754) в Англии в течение всего этого столетия (Stigler 1986, с. 103 прим.; Bru 1988b, с. 77).

Маловероятно также, чтобы Бюффон, Прайс, Кондильяк или Юм решили исследовать восход Солнца глазами не имеющего опыта взрослого человека на основании общего утерянного источника. С французской стороны показательно, что никто не упоминал никакого мысленного эксперимента, описанного до 1749 г., который был бы схож с введёнными в 1750-е годы при спорах о приоритете между Дидро, Бюффоном и Кондильяком. Ссылка на общего предшественника, например, на Юма, была бы прекрасна, чтобы поставить под сомнение притязание соперника на оригинальность, но никто из спорщиков этим способом не воспользовался. Возможно, что они не знали ни одного чёткого предыдущего случая.

В более общем смысле постепенное обсуждение задачи о восходе Солнца от мимолётных ссылок в XVII в. [на что именно?] и более подробными упоминаниями до количественных мысленных экспериментов в середине XVIII в. не соответствует одновременному (wholesale) внедрению задачи многими авторами и последующему копированию.

Интеллектуальное заимствование наверняка имело место, особенно в пределах языковых и географических сообществ. Вычисления Прайса были его ответом на размышления Юма (Zabell 1997, с. 368). В своих сочинениях середины XVIII в. многие друзья Бюффона, особенно Дидро, Крамер, Мопертюи и Гельвеций (Bru 1988b, с. 73), предчувствовали элементы его исследования 1777 г. вероятности восхода Солнца, и это возможно указывает на влияния и обратную связь. Впрочем, в то время, в середине XVIII в., мысленные эксперименты с участием беспамятных взрослых людей настолько преобладали, и настолько естественным был восход Солнца как объект для изучения насущной темы нематематической достоверности, что вряд ли нужно объяснять упомянутую выше схожесть текстов различными влияниями.

Хотя *Опыт* Бюфона был опубликован лишь в 1777 г., раздел о восходе Солнца был возможно написан до появления в 1764 г. аналогичного рассуждения Прайса. Многое в *Опыте* состоит из едва отредактированных перепечаток материалов, которые Бюффон написал в 1730-е и 1740-е годы (Milliken 1965, с. 180 – 181 прим.). Некоторые авторы предположили, что примерно в 1760 г. он отредактировал и добавил новое к этим прежним материалам, чтобы связно объединить свои взгляды на математику, вероятность, методологию и психологию (Gouraud 1848, с. 54 прим.; Hanks 1966, с. 42 прим.).

Это мнение в общем правдоподобно, притом же оно обосновано примечанием в *Опыте* (§ 8), в котором Бюффон цитирует письмо 1762 г. от Даниила Бернулли и отвечает на него. Кроме того, указатель тома, в котором был опубликован *Опыт*,

соотнёс его с текстом Charles Panckoucke 1765 г. (Watts 1969, с. 103 – 104). Наконец, в *Опыте* предложена вероятность человеку 56 лет умереть в течение ближайших 24 часов в качестве стандарта моральной достоверности [невозможности]. Показательно быть может, что в позднем 1763 г. Бюффону исполнилось как раз 56 лет. С другой стороны, представляется, что его описание Адама, реагирующего на восход Солнца, неразрывно связано с его интересами 1740-х годов.

Вычисления вероятности восхода Солнца у Бюффона отражают его собственные рассуждения о закономерности направлений планетных орбит и выводы Даниила Бернулли. Единственной целью этих вычислений было количественное различение математической, физической и моральной достоверности, которое Бюффон (1749c) сильнее всего подчёркивал ранее, см. также первые тома *Естественной истории*.

Это обстоятельство побудило по крайней мере одного эксперта (Sloan 1987, с. 132 – 133) задаться вопросом, не был ли *Опыт* подготовлен уже в 1740-е и 1750-е годы. Безусловно поражает и то, что многое в *Опыте* связано с заботами Бюффона времён 1730-х и 1740-х годов, и то, что это сочинение видимо так мало напоминает тексты, которые он составлял в 1760-е и 1770-е годы. Упомянутые выше ссылки на сочинения 1760-х годов в указателе и в примечаниях следует возможно истолковывать как признак того, что *Опыт* был по существу составлен *до того*, как родственные документы стали известны его автору.

В любом случае, к 1749 г. Бюффон ознакомился со стандартным в известной мере опровержением некоторых гипотез о равновероятности. До того, как теорема Бейеса стала кому-либо известна, он же придумал своё собственное косвенно выраженное правило порядка следования событий, ошибочно придавая положительную значимость количественному побочному результату вероятностного *сведения к абсурду*. При единственном раннем обсуждении своего *правила следования событий* он не применил его к будущим испытаниям вероятно потому, что не было планет, направление орбитальных движений которых оставалось неизвестным.

Но трудно представить себе, что он не совершил скачка от своего закона причинности к истинному закону порядка следования событий в более подходящем случае. К счастью, такой случай представился в его исследовании методологии, которое он предпринял самым заметным образом в 1740-е годы. Заинтересованный в достоверности, подразумеваемой повторяющимися событиями, и убеждённый, что в этом вопросе требуется вероятностный анализ, он по крайней мере в 1749 г. (Buffon 1749c, с. 62; Sloan 1992, с. 213 – 216) естественным образом был втянут к известному философам *парадоксу* восхода Солнца. Уже до 1749 г. он придумал два кратких мысленных эксперимента со взрослыми беспамятными людьми, и тот же вид анализа вероятно представился ему подходящим для обсуждения человеческого познания о восходах Солнца. Применяя вероятностные рассуждения *по здравому смыслу*, он (1749b) мог

бы вывести соотношение шансов продолжения восходов, которое он указал в *Опыте*. Таково по всей вероятности было происхождение его *произвольных* вычислений этих шансов.

Признательность. Мы хотели бы поблагодарить Бернара Брю [который представил рукопись автора к публикации] за его подробные и великодушные замечания и предложения. Я также признателен Jean-Daniel Candaux, которая помогла мне достать экземпляр сочинения Cramer (1744 – 1745) и фонду Тафта за финансовую поддержку.

Примечания

1. Феллер (1950/1964, с. 130), сославшись, правда, только на Лапласа, крайне отрицательно отозвался о решении указанной задачи.

2. Это укоренившееся название ошибочно: Бейес рассматривал лишь её частный случай, общий же появился только у Лапласа. Прайс представил рукопись своего скончавшегося друга к публикации, комментировал её и дополнил своим собственным Приложением. В нём-то он и описал свой мысленный эксперимент.

3. Правило Лапласа относилось к событию, которое появилось не во всех проведённых испытаниях.

4. Пирсон назвал указанное соотношение *совершенно ошибочным*.

5. Сумма вероятностей могла превысить единицу, так что пояснение Бюффона неудачно. Физическую достоверность (см. ниже замечание Лавленда) мы понимаем как достоверность по оценке здравого смысла.

6. Иначе: эксперимент относился к крайне неприятному случаю отсутствия априорной вероятности.

7. Этот вывод представляется бесполезным.

8. Лавленд не пояснил, где и как изменилось значение указанного примера.

9. Крамер предвосхитил мнение Гаусса (см. его *Труды*, т. 12, с. 201 – 204). В 1841 г. Гаусс заявил, что вероятностные выводы, не учитывающие сути рассматриваемого явления, могут быть весьма ошибочными.

10. Эта ссылка непонятна и притом не соответствует библиографии. Кроме того, Лавленд почему-то упомянул философа Леона Бронсвика. Вообще же Лавленд составил свою Библиографию, совершенно не заботясь о читателях: он указывал только первые, труднодоступные издания своих источников.

11. Здесь и в нескольких других местах мы выпустили излишние сведения (которых всё-таки осталось немало).

12. Снова, как в Прим. 5, скажем, что вероятности могли превысить единицу.

13. Это противоречит только что сказанному.

14. Лучшие комментарии к заметке Арбутнота составили Shoesmith (1985; 1987) и David & Edwards (2001, с. 9 – 11), а Freudenthal (1961, с. xi) назвал его автором первой работы по математической статистике.

15. Эта непонятная фраза могла означать, что *обычно* появление ошибок каждого знака равновероятно, что несомненно было известно Кеплеру, а возможно и до него.

16. Этот пример безусловно интересен, потому что он относится к 1672 г., но назвать теорию свидетельских показаний хорошо устоявшейся совершенно неверно: к тому времени никто ещё и не подступался к указанной теме.

17. Замечание Лавленда полностью соответствует понятию теории информации (неизвестному статистикам).

18. Никаких других за исключением Бейеса не было, но его вывод настолько важен, что мы полагаем, что он завершил первый вариант теории вероятностей (Шейнин 2013, § 6.2).

Краткие сведения об упомянутых лицах

Бонне Шарль, 1720 – 1793, натуралист, философ

Кондильяк Этьен Бонно де, 1715 – 1780, философ, просветитель

Крамер Габриэль, 1704 – 1752, математик. Один из создателей линейной алгебры

Локк Джон, 1632 – 1704, педагог, философ, один из виднейших деятелей эпохи Просвещения

Прайс Ричард, 1723 – 1791, философ, проповедник, памфлетист, математик. См. Kruskal (1978).

Библиография автора

Anonymous [J. Fillieu de la Chaise] (1672), *Discours sur les Pensées de Pascal*. Paris, 1922.

Aureolus P. (1312 – 1320), *Comentariorum in primum librum sententiarum.* Rom, 1596.

Bayes T. (1764), An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Biometrika*, vol. 45, 1958, pp. 293 – 315; E. S. Pearson, M. G. Kendall, реакторы (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability*. London, pp. 131 – 153. **S, G,** 14.

Bernoulli Daniel (1734), Quelle est la cause physique de l'inclinaison des plans des orbites des planètes etc. *Werke*, Bd. 3. Basel, 1987, p. 303 – 326.

Bongie L. L. (1978), A new Condillac letter and the genesis of the *Traité des sensations*. *J. Hist. Phil*., vol. 16, pp. 83 – 94.

Bru B. (1988a), Laplace et la critique probabiliste des mesures géodésiques. В сборнике *La figure de la terre* etc. Редакторы H. Lacombe и др. Paris, pp. 223 – 244.

--- (1988b), Statistique et bonheur des hommes. *Revue de synthèse*, t. 109, pp. 69 – 95.

Buffier Cl. (1724), *Eléments de méthaphysique. Oeuvr. Phil*. Paris, 1843.

Buffon G.-L. Leclerc de (1749a), Des sens en général. В сочинении автора *Histoire naturelle* etc., t. 3. Paris, pp. 352 – 370.

--- (1749b), Histoire et théorie de la terre. В сочинении автора *Histoire naturelle* etc., t. 1. Paris, pp. 65 – 612. *Всеобщая и частная история естественная*, части 1 – 10. СПБ, 1789 – 1808.

--- (1749c), Premier discours. Там же, pp. 3 – 62.

--- (1777), Essai d′arithmétique morale. *Oeuvr. Phil*., Paris, 1954, pp. 456 – 488. Редакторы J. Piveteau и др. **S, G,** 16.

Candaux J.-D. (1993), Un auteur […] pour Idée, Induction, Probabilité: Lubières encyclopédiste. В издании *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, t. 15, pp. 71 – 96.

Cicero (45 – 44 BC), *The Nature of Gods*. Oxford, 1997. *Избр. Соч*. М., 1975.

Condillac E. B. de (1754), *Traité des sensations*. *Oeuvr. Phil.*, t. 1. Paris, 1947, pp. 219 – 319. Кондильяк Э. Б. (1805), *Логика или умственная наука*. М., 1805.

Cramer G. (1744 – 1745), La logique.Рукопись. Trembley 34. Bibl. Publ. et Univ. Geneva.

D'Alembert J. Le Rond (1757), Futur contingent. *Enc. ou Dict. Raisonné* etc., t. 7. Paris, pp. 404 – 405; *Enc*. (1968 – 1995).

Diderot D. (1749), *Lettre sur les aveugles.*

--- (1751), Lettre sur les sourds et muets. *Oeuvr. Compl*., t. 4. Paris, pp. 109 – 233.

Fernard de Cordova (прим. 1470), *Treatise*. В сборнике *Quarrel* (1989, pp. 99 – 134).

Gay P. (1969), *The Enlightenment. An Interpretation: The Science of Freedom.* New York, 1996.

Geissler R. (1967), *Boureau-Deslandes: Ein Materialist der Frühaufklärung*. Berlin.

Gouraud Ch. (1848), *Histoire du calcul des probabilités* etc. Paris.

'sGravesande W. J. (1724), Discours sur l'évidence. *Eléments de physique démontrés mathématiqement* etc., t. 1. Leiden, 1746, pp. xl – lviii.

--- (1774), Démonstration mathématique de la providence divine. *Oeuvr. phil. et math*., t. 2. Amsterdam, pp. 220 – 248.

Hanks L. (1966), *Buffon avant l'Histoire naturelle*. Paris.

Holcot R. (1331 – 1334), *Seeing the Future Clearly* etc. Редактор P. A. Streveler и др. Toronto, 1995.

Hume D. (1739), *Treatise of Human Nature*. Oxford, 1978. *Соч*., тт. 1 – 4. М., 2000 – 2006.

--- (1748), *Enquiries concerning Human Understanding* etc. Oxford, 1975.

Laplace P. S. (1774), Sur la probabilité des causes par les événements. *Oeuvr. Compl.*, t. 8. Paris, 1891, pp. 27 – 65.

--- (1814, франц.), *Philosophical Essay on Probabilities*. Перевод A. Dale. New York, 1994. П. С. Лаплас, *Опыт философии теории вероятностей*. В книге Ю. В. Прохоров, редактор (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энц*. М., с. 834 – 863.

Leibniz G. W. (1714), La monadologie. *Opera phil.* etc. Редактор Renate Vollbrecht. Aalen, 1959, pp. 705 – 712.

Lignac J.-A. Lelarge de (1751), *Lettres à un américain sur l'histoire naturelle* […] *de Buffon*. Hamburg.

Locke J. (1690), *Essay concerning Human Understanding*, vols 1 – 2. New York, 1959. *Избр. философск. произв*., тт. 1 – 2. М., 1960.

Lubières Ch.-B. de (1765), Probabilité. *Enc. ou Dict. Raisonné* etc. Neuchâtel, pp. 393 – 400.

Mairan J.-J. Dortous de (1746), Sur les monstres. *Hist. Acad. Roy. Sci.*, année 1643 [1743], pp. 53 – 68.

Maupertuis P.-L. Moreau de (1748), Réflexions philosophiques etc. В сборнике *Varia linguisica* etc. Bordeaux, 1970, pp. 13 – 67.

--- (1752), Lettres. *Oeuvr*., t. 2. Lyon, 1768, pp. 217 – 372.

Milliken S. F. (1965), *Buffon and the British*. Диссертация. Columbia Univ.

O'Neal J. C. (1996), *The Authority of Experience* etc. Pennsylvania State University.

Pascal B. (1670), *Pensées*. Paris, 1991. *Oeuvr. Compl.*, t. 2. Paris, 2000, pp. 543 – 1046. *Мысли*. М., 1994.

Pearson K. (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries* etc. Редактор E. S. Pearson. London.

Quarrel (1989), *Quarrel over Future Contingents*. Louvain 1465 – 1475. Dordrecht, 1989, pp. 99 – 134. Редактор L. Baudry.

Rivo Peter de (1465), A quodlibetal question disputed […] in 1465. В сборнике *Quarrel* (1989, pp. 36 – 45).

--- (прим. 1470), Explanations of certain objections abut future contingents. Там же, с. 416 – 425.

Roger J. (1989), *Buffon: Un philosophe* etc. Paris.

Sloan Ph. R. (1987), From logical universals to historical individuals etc. В сборнике *Histoire du concept d'éspèce* etc. Paris, pp. 101 – 140.

--- (1992), L'hypothésisme de Buffon etc. *Actes du Colloque intern. pour le bicentenaire de la mort de Buffon.* Paris, 1988. Paris, pp. 207 – 222.

Stigler S. M. (1986), *History of Statistics*. Cambridge, Mass.

Todhunter I. (1865), *History of Mathematical Theory of Probability*. New York, 1965.

Watts G. B. (1969), Charles Joseph Panckoucke, *l'Atlas de la librairie française*. *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, vol. 68, pp. 67 – 205.

Zabell S. L. (1988), Buffon, Price and Laplace etc. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 39, pp. 173 – 181.

--(1997), The continuum of inductive methods revisited. В сборнике *The Cosmos of Science* etc. Редактор J. Erman и др. Pittsburgh, pp. 351 – 385.

Библиография переводчика

Феллер В. (1950, англ.), *Введение в теорию вероятностей*. М., 1964.

Шейнин О. Б. (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. **S, G,** 11.

Arbuthnot J. (1712), Argument for Divine Providence etc. M. G. Kendall, R. L. Plackett, редакторы (1977), *Studies in the History of Probability and Statistics*, vol. 2. London, pp. 30 – 34.

David H. A., Edwards A. W. F. (2001), *Annotated Readings in the History of Statistics*. New York.

Encyclopédie (1968 – 1995), *Enc. ou Dict. Raisonné*, tt. 1 – 35. Stuttgart – Bad Cannstadt. Перепечатка.

Freudenthal H. (1961), 250 years of mathematical statistics. В сборнике *Quantitative Methods in Pharmacology*. Редактор H. De Jonge. Amsterdam, pp. xi – xx.

Kruskal W. (1978), Price. Kruskal W., Tanur J. M., редакторы, *Intern. Enc. of Statistics*, vols 1 – 2. New York, pp. 487 – 488.

Shoesmith E. (1985), N. Bernoulli and the argument for Divine Providence. *Intern. Stat. Rev*., vol. 53, pp. 255 – 259.

--- (1987), The Continental controversy over Arbuthnot's argument etc. *Hist. Math.*, vol. 14, pp. 133 – 146.

VIII

К. Брунс

И. Ф. Энке (выдержки)

Bruhns C., *Johann Franz Encke*. Leipzig, 1869

С. 109 – 110. 21 июня [1825 г.] король утвердил прошедшие выборы в Берлинскую академию наук, и Энке стал ординарным академиком (с 1824 г., по представлению Боде, он был членом-корреспондентом) и секретарём её физико-математического класса, а 27 сентября его назначили директором Берлинской обсерватории.

Линденау был очень доволен этим назначением, и в качестве председателя (Vorsteher) правительства [Саксен-Альтенбургского] герцогства 12 августа разрешил ему покинуть свою должность [профессора и директора] на обсерватории Зееберг [возле Готы], но добавил, что правительство с сожалением отпускает такого прекрасного учёного, чтобы только не препятствовать его будущему.

В письме 13 июля 1825 г. Герлингу Энке очень нерешительно сообщил о своём переезде на новое место:

Ты наверняка слышал, что по рекомендации Бесселя меня пригласили в Берлин на место [умирающего] *Боде. Согласиться было исключительно трудно ввиду того, как по крайней мере я сам полагаю, что примешиваются новые обязанности, да и существуют сильнейшие соображения против этого. Я убеждён, что при отсутствии внутреннего смысла блеск и уважение окружающих теряют всякое значение и никак не влияют на меня.* […] *По поводу этого выбора я между тем съездил в Гамбург* [?] *Поездка была неприятной, как я и должен был предполагать, потому что мне пришлось нарушить благоприятнейшую идею, которую Бессель до этого лелеял*. […]

Но Энке мужался всё сильнее и 14 июля и 21 августа написал Бесселю благодарственные письма, сообщив, что

Перспектива более тесной связи с Вами ввиду изменения моего жительства имеет для меня громадное значение, и, поскольку это будет как-то возможно, я эту связь, которая так часто влияла самым благотворным образом, не нарушу. […] *Я сердечно благодарен за многие доказательства дружбы, которые открыли мне такие приятные виды. По своей собственной вине я слишком много времени провёл в Зееберге, что имело для меня только отрицательные последствия*.

С. 236 – 239. В 1831 г. Энке решил, что читателям (Besitzern) *Berliner astronomisches Jahrbuch* [редактором которого он был в 1830 – 1866 гг.] было бы приятно получить краткий и элементарный обзор предложений, на которых основан метод наименьших квадратов, совместно с предписаниями, знакомящими читателей с его самым удобным способом приложения.

И он действительно опубликовал подобный обзор в указанном издании за 1834 – 1836 гг. При его составлении он воспользовался мемуарами Гаусса и многочисленными замечаниями Бесселя и Ганзена[1]. Он сам указал, что в обзоре нет ни одной значительной теоремы, не заимствованной у Гаусса, Бесселя или Ганзена, он сам лишь местами изменял форму доказательств так, как ему казалось подходящим. Работы Лапласа и Пуассона также были приняты во внимание, он лишь изменил их форму изложения и выводов.

Энке исходил из опытных положений и аксиом (например, из того, что малые погрешности происходят чаще, чем крупные, причём ошибки обоих знаков встречаются одинаково часто) и подходил к основным положениям, установленным Гауссом и к интегралу вероятности[2]. Так, вместо предпосылки Гаусса о вероятнейшем значении среднего арифметического из многих наблюдений одной и той же величины он рассматривал среднее арифметическое из двух наблюдений и переходил к трём, четырём, … наблюдениям по принципу симметричных функций. Этот метод он предварительно сообщил Гауссу, который ответил ему 23 августа 1831 г. [см. *Труды* Гаусса, т. 8, с. 145 – 146]:

Не без интереса я увидел в Вашем письме тот путь, который Вы пробили для обоснования метода арифметической средины. Этот путь весьма достоин одобрения, поскольку он должен ответить на вопрос о том, как следует поступить, чтобы оказаться вполне независимым от любых теоретико-вероятностных соображений[3]*. Но я, пожалуй* (wohl) *не могу допустить, чтобы полученное таким образом значение называлось вероятнейшим.*

Вообще-то определение вероятнейшего значения является вполне определённой математической задачей, но по существу[4] *она приводит к среднему арифметическому лишь если известен закон ошибок и только в единственном случае, когда этот закон выражается формулой* e^{-kxx}.

Вероятность вероятнейшего значения лишь бесконечно мала. Именно, если a есть вероятнейшее значение, полученное из непрерывного множества, то это по существу означает только, что вероятность истинному значению находиться в интервале a – w, a + w выше, чем в любом ином интервале той же длины,

если только w бесконечно мало. При ближайшем рассмотрении подобное вероятнейшее значение практически мало, намного менее интересно, чем то значение, чья погрешность, которой следует опасаться, менее всего вредна. Поэтому я (*не считая других, разумеется, столь же важных или намного более важных оснований*) *предпочёл второй принцип* [1823 г.], *который не следует путать с первым* [1809 г.][5].

Далее Энке в своём астрономическом ежегоднике рассматривал известный интеграл вероятности и пришёл к определению вероятной ошибки, [исследовал погрешности для ряда из 470 наблюдений] и показал, что уклонения опыта от теории не существенно[6].

Вычислив интеграл [?], он вывел соотношение между вероятнейшей и средней ошибками, ввёл определение и применил повсюду меру точности и показал, [что при оценке точности по знаменитой формуле Гаусса в знаменателе следует указывать избыточное число наблюдений].

Энке разъяснил на примерах значение вероятной ошибки, рассмотрел её точность и показал, что надёжнее вычислять её в функции квадратов, а не любых иных степеней ошибок. Наконец, он указал, как определять вероятнейшие значения функций отдельных наблюдений, равно как и вероятные ошибки и веса [наблюдений]. Эту статью он закончил таблицей интеграла вероятности.

В следующем году он рассматривал отдельные задачи, систематически определял веса [изучаемых величин] и особенно шести независимых друг от друга неизвестных, которые появляются при определении орбит небесных тел. Метод определения этих весов он указал не только по Гауссу, но и по Ганзену.

В ежегоднике за 1836 г. Энке полностью привёл схему [решения систем нормальных уравнений] с контрольными уравнениями для шести неизвестных и численный пример системы с тремя неизвестными, определив их вероятнейшие значения, погрешности и веса.

Затем он рассмотрел приложение метода наименьших квадратов к периодическим функциям [?] и весьма кратко описал определение вероятных ошибок неизвестных [методом косвенных измерений с условиями] по Ганзену (*Astron.Nachr.*, № 202) и уравнивание [по методу условных измерений]. Его весьма подробно описал Гаусс и разработал Гаусс и Бессель. Энке закончил описанием элегантного метода Гаусса (1828).

С. 262 − 263. Следует также упомянуть, что Энке составил четырёхзначную таблицу логарифмов и анонимно опубликовал её в 1828 г. Для тригонометрических функций первых 10 градусов

он вычислил логарифмы через 4′, и следующих градусов – через 10′. Он также привёл логарифмы Гаусса[7].

Для календаря Энке написал популярную статью о комете Галлея и шутливо [?] заметил, что она оказалась единственной публикацией, за которую получил гонорар. Временами он сообщал о важных событиях в газетах, к примеру, о полном солнечном затмении 1851 г. В результаты магнитных наблюдений Гаусса и Вебера 1837 – 1843 гг. Магнитный союз[8] включил берлинские наблюдения (Terminbeobachtungen) 1837 – 1841 гг., выполненные Энке и его студентами.

В качестве члена, а затем, с 20 октября 1846 г., председателя календарного комитета Энке ежегодно составлял пять календарей для различных меридианов Пруссии[9]. Работа была нетрудной, но занимала много времени и доставляла немало хлопот.

С 16 марта 1838 г. Энке был членом учебного отдела общевойскового училища и активно участвовал в наблюдении за подготовкой курсантов, а именно в проверке математических работ выпускников училища.

Длительное время Энке на общественных началах управлял вдовьей кассой Берлинского университета и всерьёз занимался этим делом, весьма далёким от его научных интересов. В процессе работы он приходил к новым выводам, а в качестве вознаграждения радовался достигнутым увеличением пенсий. По всему видно, что Энке был много занят как академик, учитель, директор обсерватории, и редактор ежегодника.

С. 266 – 272. [Брунс перечисляет многочисленные ордена, которыми наградили Энке другие европейские страны, и продолжает:] Проявленным уважением можно считать и [берлинскую] Площадь Энке, названную в его честь, которая выходит на Бессельштрассе, так названную по его предложению[10].

[…] В Берлине Энке по-прежнему оживлённо переписывался со своими астрономическими друзьями, и много писем он отправил Бесселю, Гауссу, Герлингу, Линденау, Струве и другим, и много писем получил от них. Со Струве он переписывался до конца его жизни, хотя и с частыми перерывами, и почти в одном и том же тоне, но в переписке с Бесселем вместо выражаемых уверений в теснейшей дружбе и глубокой сердечности позднее наступила холодная формальность.

Характеры этих столь высоко заслуженных учёных были слишком различны, но при их усиленной профессиональной переписке согласие могло сохраняться несмотря на большое расстояние между ними [быть может ввиду этого].

Бессель, будучи крупным и прославленным астрономом, чтимый своими учениками, не привык сталкиваться с

возражениями. При своей вспыльчивости, если не всё шло так быстро как ему хотелось, он легко терял терпение. Многие свои прекрасные работы он представлял Берлинской академии и публиковал их в её изданиях, Энке же служил промежуточным звеном. Ввиду многих обязанностей его время было раздроблено, и, несмотря на самые добрые намерения, он не всегда сразу же выполнял пожелания Бесселя, тем более, что ему часто не хватало поддержки и предупредительности коллег. Он, Энке, полагал, что ему завидуют как, казалось, профессионально лучше устроенному, чем большинство из них. Истерзанный подозрениями, он замечал враждебность там, где, возможно, было лишь безразличие. Много раз Энке говорил нам, что Бессель неизменно и слишком сильно выказывает купеческую пунктуальность, которая полностью противоречит его, Энке, природе.

Будучи прямодушно искренним, Бессель (хоть никак не желал этого) в своём тщательно продуманном и запечатлённом у него мнении об Энке с большим теплом защищал его и поэтому часто видел его как новичка, а не как коллегу, который уже стал мастером и посмел иметь своё собственное мнение (Гаген, Речь, посвящённая памяти Энке. Берлин, 1866, с. 16).

При подготовке к изданию звёздных карт[11] у Энке и Бесселя часто возникали разногласия по поводу их качества. [Кроме того,] у Энке, проживавшего в Берлине, официальные лица временами запрашивали мнение [о различных предполагавшихся мерах], и тот, исходя из отличных от Бесселя принципов, сообщал иные мнения[12].

Так, однажды Бессель рекомендовал кого-то, который произвёл на него хорошее впечатление сноровкой при наблюдениях, Но Энке обнаружил у того существенные слабости в теории. Меньше обращая внимания на практическом умении, он пришёл к противоположному мнению.

Когда Энке стал директором новой Берлинской обсерватории, которая превосходила кёнигсбергскую по размерам и оборудованию, Бессель порекомендовал ему предоставить все наблюдения другому астроному, однако Энке не согласился и очень усердно наблюдал многие годы.

Энке расходился с Бесселем и другими астрономами и во взглядах на точность наблюдений. Бессель, великий мастер наблюдательной астрономии, полагал, что даже с небольшими инструментами, при надлежащем обращении с ними и тщательном исследовании [инструментальных] погрешностей, можно добиваться точности в долях секунды, во что до тех пор мало кто верил, и чему все (включая Энке) в высшей степени поражались. Тем не менее, Энке придерживался иных взглядов и

вряд ли хотел даже слышать о долях секунды. 16 ноября 1843 г. он написал Герлингу:

Ни один ряд наблюдений не обрадовал меня так, как тот, который я использовал для определения высоты полюса в Берлине на старой обсерватории и его долготы по сравнению с [обсерваторией] *Альтоны. Отдельные наблюдения точны до одной или не более чем до двух секунд. Если желаешь достичь лучшего, и имеешь такую возможность, то требования внешних обстоятельств*[13] *усиливаются, а хлопоты самым существенным образом становятся более обременительными. С этими досадными обстоятельствами мне пришлось здесь сражаться, частично потому, что Бессель неуживчив и частично ввиду притязаний моих уважаемых знакомых, столичных астрономов. Я вечно оказываюсь в атмосфере соперничества, которая не соответствует моей натуре. Мне раньше было неясно, почему Гаусс, одарённый такими выдающимися практическими талантами, прекратил астрономические наблюдения, теперь же я это очень хорошо понял: он желал избегать всякой конкуренции, и, напротив, выказывает свой талант в новой области, в магнетизме*.

По случаю наблюдений астероида Астра Энке также выразил своё мнение в *Astron. Nachr*.: хоть меридианные наблюдения обладают преимуществом ввиду точного знания мест звёзд, сравнение со звёздами в зонах Бесселя уже весьма надёжно. Струве публикует наблюдения, которые основаны на абсолютных определениях мест звёзд, но считает приукрашенной оценку точности положения в полсекунды по Отто Струве, потому что фундаментальные звёзды не определены с такой точностью (*Astron. Nachr*., т. 24, с. 287).

Когда Бессель был в Берлине, чтобы определять длину секундного маятника, между ними возникло разногласие по поводу выбора и установки малого инструмента (*Astron. Nachr*., т. 15, с. 121 и 173). В этой связи Энке написал Гауссу 27 июля 1838 г.:

Если Вы узнали о неприятных различиях [мнений] *между мной и Бесселем, прошу Вас лишь поверить, что, как и в большинстве случаев, они были вызваны большим числом совместно действовавших малых причин*[14]*, которые и являются истинным источником размолвки*.

Эти малые причины частично заметны в переписке Энке и Бесселя, из которой мы приводим выписки для характеристики обоих значимых личностей. 11 октября 1825 г. Энке прибыл в Берлин, и уже 12-го написал Бесселю. Тот ответил 30 октября и закончил письмо следующим образом:

Мой любимейший друг! В Ваших письмах я неизменно замечаю определённую формальность: господин профессор и пр. Это несущественно, но что это должно означать? Вы же не хотите меня так обижать, что предполагаете, что кто-то в мире мне милее и ближе, чем Вы, так к чему эти формальности, от которых я давно уже отказался?

3 ноября Энке впервые написал *Дражайший покровитель и друг*. Он радовался тому, что может получать ответ на свои письма через восемь или десять дней и просил Бесселя не отказывать ему в совете и помощи как члену Академии.

Во многих письмах начала 1828 г. обсуждаются звёздные карты. 18 февраля Энке сообщил о трудностях, относящихся к подписям, Бессель же ответил 23 февраля [текст неясен. По существу вопрос был о том, кто должен подписывать решение о публикации отдельных листов карты, соответствующая комиссия или только Энке].

Уже 24 февраля Бессель сообщил, что неожиданное содержание письма Энке огорчило его, и ему было бы больно сразу ответить на него. Он, Бессель, застарел в своей дурной привычке и точно указывает, что с ним происходит и не скрывает ничего. Он очень хочет оставаться в наилучших отношениях со своим дражайшим Энке, образ мышления и научные достижения которого он ценит и уважает. Он просит Энке без обиняков, без любезностей, как это и должно быть между уважаемыми людьми, ответить на ясный вопрос: вполне ли они едины в вопросе о звёздных картах, да и вообще. […]

Вы и я, мы всегда легко поймём друг друга, если только Вы открыты и правдивы. Я почти опасаюсь (простите меня), что Вы думаете совсем иначе, но в таком случае Вы совершенно определённо ошибаетесь. Никто не может упрекнуть меня в том, что я говорю что-то не то, что полагаю. К сожалению! говорю всё, что думаю. […]

1 марта Энке сообщил, что [члены комиссии, принимающие листы карты к публикации, объективны]. 12 марта Бессель ответил: он доволен, хоть многое и происходит не так, как он полагал. Но главное, т. е. совпадение в основном и второстепенном, соответствует его действительным предположениям. Он уже никак не раздражён, кроме как по поводу своего прежнего мимолётного раздражения. Но это было и остаётся его ошибкой, он *знает, что раздражение недопустимо* и заверяет, что при каждом надлежащем случае будет склонять себя к хладнокровию и спокойствию. Он продолжил:

Тот, кому я доверяю, может сказать и сделать очень многое, пока я не лишу его своего доверия. По отношению к различным

людям я настолько различен, что не могу кого-то винить, если тот думает, что я неверно представляю себе, чего я хочу.

После этих писем снова наступил более мягкий тон. Разумеется, Энке иногда жаловался на многое и добавил, когда однажды сообщил о подающем надежды ученике Бесселя:

Пусть небо подарит мне счастье более продолжительное время жить под Вашим присмотром.

Бессель многое сообщал ему о других астрономах, равно как и о семейных делах. Когда Энке разъяснил в письме, что не имеет никакого наглядного представления о зональном аппарате [для установления мест звёзд в зонах] Бесселя, тот заметил, что ему это приятно, потому что это обстоятельство возможно побудит Энке посетить Кёнигсберг. Это обрадует Бесселя и сможет на долгое время придать ему новые силы.

В 1827 г. они усиленно переписывались по поводу Берлинской обсерватории и астрономического ежегодника. В связи с вычислениями [эфемерид?] для ежегодника Энке несколько неприятно чувствовал себя и сообщил об этом Бесселю. [Текст неясен. Вот его пересказ Репсольдом (1920, с. 197), который соответствует смыслу эпизода: Энке попросил совета у Бесселя, тот же ответил, что Энке должен идти своим собственным путём.]

Человек, подобный ему, не может сдерживаться в своих делах; перед ним стоит такая высокая цель, что он не может колебаться.

Я хотел, чтобы Вы больше доверяли мне; *может это было бы хорошо, но это должно произойти само по себе, требования не достигнут цели*.

Энке ответил, что полностью доверяет Бесселю, но никто не может помочь ему, кроме его самого, и он просил полностью забыть об этом деле.

В 1828 г. переписка стала оживлённее, и в основном она касалась постройки обсерватории. Бессель как-то написал:

Не могу умолчать, что Леопольд фон Бух говорит о Вас так, что моему сердцу поистине приятно. А именно, Ваши обстоятельства в Академии он считает подходящими wie Sie das Gewicht haben, was Ihnen von Rechtswegen gebührt.

С. 281 – 282. Очень скоро в их переговорах выявилось различие мнений. Бессель, такой искренний и живой, без утайки сообщал свои мысли и взгляды, даже при третьих лицах, и Энке неоднократно чувствовал себя оскорблённым. Тем не менее, они общались дружественно, и Энке проводил Бесселя, когда тот возвращался к себе домой [в Кёнигсберг]. […]

Бессель поблагодарил его в письме 15 октября [1835 г.] за существенную помощь во всём, и особенно за определение времени. Энке, однако, решил, что Бессель позволял себе слишком многое и пожаловался другу, что даже в присутствии

посторонних ему приходилось сдерживаться, чтобы избегать ссор. Оставшись один, Энке поразмышлял обо всём сказанном [Бесселем?] и его охватило серьёзное и хроническое дурное настроение.

С. 300 – 305. Общение Энке и Ольберса в основном сводилось к сообщению результатов, пересылке книг, благодарственным письмам и посещениям. Из [уже опубликованной в то время] переписки Ольберса и Бесселя достаточно известен тонко чувствительный и участливый характер Ольберса, так что заранее ясно, как дружественны должны были быть отношения Ольберса и Энке. В 1829 г. Ольберс написал Энке:

Каждое Ваше письмо, мой высокоуважаемый друг, является для меня истинным праздником.

И когда в 1830 г. Энке пообещал Ольберсу, что посетит его по дороге в Гамбург, тот ответил:

Да благословит Вас господь, мой дорогой друг, за прекрасное решение. Я не желаю ничего, кроме как снова увидеть и обнять такого уважаемого друга здесь, на этой Земле.

И позднее Ольберс решил, что дни посещения были счастливейшими и приятнейшими в его жизни и написал Бесселю: *Я пережил радостные дни с чудесным Энке* (*Переписка Ольберса и Бесселя*. Лейпциг, 1852, т. 2, с.339).

В 1833 г. Ольберс назвал Энке *бесспорно самым лучшим вычислителем нашего времени*, Энке же в письме Струве заметил, что

О*чень привязан к этому достойному человеку, потому что после смерти Тобиаса Майера считаю его самым ordentlch астрономом в Германии*[15].

Во многих письмах Ольберс благодарил Энке за присылку ежегодников, звёздных карт и за сообщения о кометах. Его предпоследнее письмо 12 сентября 1838 г. касалось отношений между Бесселем и Энке:

С глубоким сожалением я заметил, что между двумя людьми, которых я так искренне уважаю и высоко ценю, между Вами и Бесселем, возникла такая досадная ссора, и меня печалит, что ка ней примешивается горечь, которая, видимо, нарушила их отношения.

По крайней мере последнее обстоятельство было вовсе не нужно. Почему бы двум учёным, мнения которых о чём-то разнятся, не представить общественности свои противоположные предпосылки и не поспорить открыто без того, чтобы отказываться от своей взаимной дружбы и не повредить её? Между тем, обе стороны в достаточной мере высказали всё, что имели, и я надеюсь, что теперь их общие друзья будут избавлены от этой вражды.

Последнее письмо Ольберса 8 сентября 1839 г. сообщало о новейших астрономических событиях, к которым к тому времени 81-летний старец всё ещё проявлял такой живейший интерес.

Переписка Энке и Струве началась в 1819 г. и продолжалась до 1857 г., но часто с длительными перерывами. Они были друзьями, ценили и уважали друг друга, но они шли своими собственными путями, которые редко соприкасались, общались письменно и лично. Струве посещал Энке во время многих своих поездок из России, и они делились результатами своих работ, своими взглядами и семейными делами.

В 1827 и 1828 гг. их письма в основном касались звёздных карт, которые издавала Берлинская академия. Два листа карты Струве достал себе для ознакомления. В 1830 г. Струве был в Берлине и завязал с Энке более тесную дружбу, так что в 1832 г. в его письмах появилось выражение *Дражайший друг и брат*, и обращение на *ты*.

В письме 9 сентября 1833 г. Энке сообщил о личном уравнении, поправку за которое он не ценил высоко. Если только она не особенно велика, как у Бесселя, то относится, как он полагал, к поправкам, которые ввиду многих вариаций уничтожаются, притом же она изменяется с применением различных инструментов и маятников, и вообще она не всегда постоянна[16].

Письма 1834 – 1836 гг. заполнены указаниями и заметками об оборудовании Берлинской обсерватории, сообщениями об инструментах и т. д. Позднее Струве написал о строительстве обсерватории в Пулково.

28 августа 1838 г. Струве со своим старшим сыном Отто, нынешним директором Пулковской обсерватории, проехали через Берлин в Мюнхен и снова заехали к Энке на обратном пути, в ноябре.

В 1839 г. Энке порадовался окончанию строительства Пулковской обсерватории, а 23 марта 1840 г. он получил памятную медаль, посвящённую этому событию, и сердечно поблагодарил за неё. 29 октября 1840 г. он описал свою поездку в Англию, а позднее сообщил о болезненной утрате, которая постигла Бесселя ввиду смерти сына.

Во время хронометрического рейса между Пулково и Альтоной[17] Струве был в Германии, но к своему сожалению не смог заехать в Берлин. В 1846 г. основными темами обсуждения оказались открытие Астры и Нептуна. Энке часто признавался, что вначале не поверил в существование планеты Леверье[18]. В июле 1847 г. Струве снова был в Берлине, и в том же году вышли в свет его *Этюды*. Энке не мог полностью согласиться с их содержанием. 1 ноября он написал:

Дражайший Струве, моё сегодняшнее письмо относится к теме, которую я прошу тебя обдумать совершенно спокойно и хладнокровно, потому что я чувствую самую неотложную потребность быть предельно откровенным. Твои Этюды с самого начала очень заинтересовали меня, особенно в качестве продолжения твоего предисловия к каталогу Weisse (1846). И всё-таки я тогда, когда ты посетил меня, ещё не понял тебя в тесной связи. Позднее, возвратившись из краткой поездки, я снова взялся за Этюды и написал одну из своих самых длинных статей (49 страниц).

Но я отложил её, потому что, прояснив свои взгляды, я должен был почти во всём противоречить тебе. Однако, внимание, которое здесь многие круги обратили на Этюды, привело меня к мысли, что важно, чтобы твой труд не превратился в популярную или подобную книгу и не лежали бесплодно. И через несколько недель я составил выписку существенного, которая тем не менее почти во всём настолько же решительно противоречит твоим взглядам. Я послал её Шумахеру [редактору *Astron. Nachr.*] *и притом осведомился, не находит ли он в моих выражениях чего-либо, что может помешать публикации. Шумахер ответил, что, насколько он ознакомился с рукописью, это не тот случай.*

Но я не могу решиться опубликовать её без твоего согласия. Можешь поверить мне на слово, что я вообще не думал идти против тебя, если бы не долг перед наукой. При обдумывании твоих Этюдов это должно было случиться при наших совершенно противоположных мнениях. Статья, посланная Шумахеру, готова к твоему просмотру, и ты не станешь на меня обижаться за то, что я хотел бы обсудить твои Этюды.

Наконец, он просил Струве не злиться на него и представить себе, что он длительное время занимался его трудом как серьёзным доказательством почтения, которое он только и может чувствовать.

Струве отказался просматривать статью Энке. Он сказал, что исследовал истину и не боится никакой критики. По его субъективному убеждению главный итог его труда нисколько не ошибочен. И он так закончил своё письмо:

Можешь быть уверен, мой дорогой друг, что, по моему мнению, научный спор никак не должен повлиять на личные отношения между друзьями. […] *Твой, от всего сердца, Струве.*

Несмотря на эти уверения, хорошее доброе согласие несколько пострадало, потому что переписка на долгие годы прервалась. И когда в 1853 г. Струве посетил Энке в Берлине, тот, очень обрадованный, написал Гауссу, что прежние отношения, несколько нарушенные ввиду суждения об *Этюдах*, полностью

восстановились. Струве был необычно любезен и он [кто именно?] радовался возврату [добрых отношений?] с Аргеландером.

В дальнейшем в письмах Энке к Струве звучали его сожаления о том, что прошли уютные времена. Слишком многим полакомились [астрономы] с древа познания без того, чтобы силой ума продвинуть в той же мере теорию. И он опасается за последователей ввиду громадной массы ежегодно расточительно собираемых чисел[19].

Примечания

1. Труды этого замечательного учёного до сих пор не исследованы. Kendall & Doig (1968) перечислили 10 статей Ганзена, опубликованных в 1830 – 1874 гг. Особо упомянем его сочинение (1865a), посвящённое сферической геодезии, включая применение в ней астрономических наблюдений. В том же источнике он опубликовал ещё две крупные статьи (1865b; 1865c). Статья, а точнее книга (1865a) имеется в русском переводе (Тилло 1866).

2. Указанные свойства *обычных* случайных ошибок использовал сам Гаусс (1809, § 175). Вообще же Брунс не отличает мемуаров Гаусса 1809 и 1823 гг. (и его знание теории ошибок явно недостаточно), и остаётся неясным, описывал ли Энке оба эти мемуара или нет. Но заметим, что он критически отнёсся к ним обоим (Энке 1831).

3. Подобные усилия повторялись неоднократно. Zoch (1935) заключил, что успех не был достигнут, но что постулат среднего арифметического всё же может быть установлен без привлечения стохастических понятий. Впрочем, для теории ошибок это утверждение не было интересным.

4. Это напрасно доказывал Пуанкаре (1912/1999, § 135, с. 160), потому что в 1809 г. Гаусс вывел единственное, а именно нормальное распределение при условии, что среднее арифметическое является вероятнейшим значением измеряемой константы. Пуанкаре кроме того заявил, что в связи с доказанным свойством среднего арифметического Гаусс напрасно отказался от своего первого обоснования принципа наименьших квадратов. Это лишний раз убеждает, что он совершенно не разобрался в наследии Гаусса. Неудивительно! Он ведь ни разу не сослался на Лапласа или Пуассона, не говоря уж о Чебышеве и Маркове. Не доверяйте вторжениям классиков в чуждую для них область!

5. Гораздо более известно письмо Гаусса Бесселю 1839 г. (*Werke*, т. 8, с. 146 – 147), в котором Гаусс вновь и более чётко (фактически) заявляет, что интегральная мера точности надёжнее дифференциальной. Никаких иных причин (тем более важных и важнейших) он уже не указывал.

6. Это заключение неправдоподобно. Во-первых, ошибки остаются неизвестными, и рассматривать можно только уклонения от среднего. Но можно ли надеяться на постоянство закона распределения ошибок на протяжении столь длинного ряда наблюдений? К подобному неправдоподобному заключению дважды пришёл Бессель, и во втором случае он (1838, § 11) ещё более чётко, чем в первом, заявил, что наблюдения в нескольких, рассмотренных им длинных рядах, подчиняются нормальному распределению. Он явно желал подтвердить доказанный им (нестрого, но это вполне понятно) там же (1838) вариант центральной предельной теоремы вместо того, чтобы первым заявить, что наблюдения могут быть не полностью нормальными.

7. Очевидно, таблица логарифмов сумм и разностей чисел. Было опубликовано несколько таких таблиц, Гаусс же был их инициатором, но не составителем. Снова (см. Прим. 2) Брунс оказался неважным комментатором. Первые 10 градусов: о них следовало сказать в связи с синусами (но не с косинусами) малых углов.

8. Этот союз учредили они же, Гаусс и Вебер (May 1972, с. 306).

9. Поясное время было введено лишь в конце XIX в.

10. Улица Бесселя (правда, очень короткая) существует и сейчас. На неё выходит ещё более короткая улица Энке, но площади Энке нет. В другом районе Берлина есть улица Энкефортвег.

11. Бессель определял положение звёзд (быть может не очень точно) *по возможности* до девятой величины на большом протяжении небесной сферы, и Берлинская академия наук публиковала отдельные листы составляемой звёздной карты (Repsold 1920, с. 190 – 191).

12. Бессель был не только великим учёным, но и заядлым халтурщиком (Шейнин 2016, § 2). Дополнительно заметим, что Гаусс заметил некоторые его грехи. Так, в письме Шумахеру между 14 июля и 8 сент. 1826 г. он *доверительно* указал, что тот крайне завысил точность своего определения точности делений штрихов лимба. Подобным же образом Гаусс и ранее высказался о других выводах Бесселя (письмо Ольберсу 2 ноября 1817 г.), о чём Ольберс сообщил Бесселю также *доверительно*. Наконец, Гаусс, опять же в письме Шумахеру, 27 дек. 1846 критически отозвался о каких-то посмертных рукописях Бесселя. В частности, он отметил неряшливость изложения и неверное предположение об обстоятельствах его, Гаусса, наблюдений, а по поводу каких-то вычислений Бесселя, заявил, что они слишком хороши, но затемняют сущность (*за деревьями леса не видно*) и вообще могли бы быть сильно упрощены. По поводу неудачной рекомендации кого-то Бесселем (см. выше), мы добавим, что брошюра Ангера (1846), его ученика (Bruhns 1875), оставляет тягостное впечатление плохо понятными описаниями и поразительными ошибками.

13. Метеорологические условия наблюдения должны были быть более благоприятными? Необходимые поправки следовало определять более точно?

14. Многочисленные *малые причины, каждая из которых приводит лишь к незначительным следствиям*: таково, по Пуанкаре (1912/1999, с. 15), одно из пояснений случайности, в данном случае – случайности размолвки.

15. Майер умер в 1762 г., a ordentlich может означать аккуратный, порядочный, значительный, честный, а также штатный. Штатным астрономом был и Бессель (и сам Энке) и директора и некоторые сотрудники нескольких астрономических обсерваторий.

16. Опасения Энке были оправданы. Личное уравнение астронома может меняться, изменяется оно и при перемене инструмента. Всё это принимается во внимание при долготных определениях пунктов астрономо-геодезических построений (впрочем, перемены инструмента не происходит). Новое помещение Берлинской обсерватории (см. чуть ниже) было оборудовано в 1835 г. (Freiesleben 1971).

17. Хронометрические рейсы применялись при долготных определениях, см., например, Гаусс (1826).

18. В 1846 г. У. Ж. Ж. Леверье вычислил положение неизвестной планеты, которая вызывала неправильности в движении Урана. В том же году, используя эти вычисления, её обнаружил И. Г. Галле. Её назвали Нептуном.

19. И снова (Прим. 13) Энке был прав. Уже в начале XIX в. появились *легионы числовых статистических данных и статистических таблиц, наполненных числами* (Lueder 1812, с. 9). Descartes (1637/2012, с. 63) заметил, правда, что необходимость в наблюдениях (в естествознании ?) возрастает с

познанием, и уже в середине XIX в. астрономы начали изучать собственные движения сотен звёзд. Статистическое изучение звёздных ансамблей стало считаться намного важнее, чем точное определение параметров той или иной звезды (Hill & Elkin 1884, с. 191).

Краткие сведения об упомянутых лицах

Аргеландер Фридрих Вильгельм Август, 1799 – 1875, астроном

Боде Иоганн Элерт, 1747 – 1826, астроном. Соавтор правила Титиуса – Боде о расстояниях планет от Солнца

Герлинг Христиан Людвиг, 1788 – 1864, геодезист, ученик Гаусса

Линденау Бернгард фон, 1779 – 1854, юрист, государственный деятель (*кабинет-министр*), астроном

Струве, Отто Васильевич, 1819 – 1905, астроном, сын В. Я. Струве. Директор Пулковской обсерватории. С 1895 г. жил в Германии. Золотая медаль Королевского статистического общества за исследование собственных движений звёзд

Библиография

Бессель Ф. В. (1838, нем.), Исследование о вероятности ошибок наблюдения. В книге автора *Избр. геод. соч.* М., 1961, с. 226 – 258.

Блажко С. Н. (1947), *Курс общей астрономии*. М. – Л.

Гаусс К. Ф. (1809, латин.), Теория движения, кн. 2, раздел 3. В книге автора (1957, с. 89 – 109).

--- (1823, латин.), Теория комбинации наблюдений. Там же, с. 17 – 57.

--- (1826, нем.), Определение долгот хронометрическими рейсами. Там же, с. 135 – 140.

--- (1828, латин.), Дополнение к Теории комбинаций … Там же, с. 59 – 88.

--- (1957), *Избранные геодезические сочинения*, т. 1. М.

Новокшанова З.Я. (1964), *В. Я. Струве*. М.

Пуанкаре А. (1912, франц.), *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999. Главу о случайности Пуанкаре переписал со своей брошюры 1905 г.

Струве В. Я. (1847, франц.), *Этюды звёздной астрономии*. Без места, 1953.

Тилло А. (1866), *Геодезические исследования Гаусса, Бесселя и Ганзена*. СПБ.

Шейнин О. Б., Sheynin O. (1984), On the history of the statistical method in astronomy. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 29, pp. 151 – 199. **S, G,** 30.

--- (2016), Неожиданные штрихи к портретам Гаусса и Бесселя. В *Шестнадцатой хрестоматии по истории теории вероятностей и статистики*. Берлин. **S, G,** 74.

Anger C. T. (1846), *Erinnerung an Bessel's Leben und Wirken*. Danzig. **S, G,** 74.

Batten A. H. (1988), *Resolute and Undertaking Characters: the Lives of Wilhelm and Otto Struve*. Dordrecht. Интересующее нас место мы описали в нашем расширенном переводе своей статьи 1984, в §§ 10.5 и 10.6.

Bruhns C. (1875), Bessel. *Allg. deutsche Biogr*., Bd. 2, pp. 558 – 567.

Descartes R. (1637), *Discours de la méthode.* La Gaya Scienza, 2012. Декарт Р. *Рассуждение о методе.* М., 1953.

Encke J. F. (1831), Über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. *Abh. Kgl. Akad. Wiss. Berlin* für 1831, pp. 73 – 78.

--- (1868), *Astronomische Abhandlungen*, Bde 1 – 3. Berlin.

Freiesleben H. C. (1971), Encke. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 4, pp. 369 – 370.

Hansen P.A. (1865a), Geodätische Untersuchungen. *Abh.* Math.-Phys. Kl. *Sächs. Ges. Wiss*., Bd. 8 für 1868, pp. 1 – 224.

--- (1865b), Bestimmung des Längenunterschieden zwischen den Sternwarten zu Göttingen und Leipzig. Там же, pp. 225 – 320.

--- (1865c), Von der Methode der kleinsten Quadrate im allgemeine und in ihrer Anwendung auf Geodäsie. Там же, pp. 571 – 806. Также отдельное издание.

Hill D., Elkin W. L. (1884), Heliometer-determination of stellar parallax. *Mem. Roy. Astron. Soc*., vol. 48, pt. 1 (вся часть)

Kendall M. G., Doig A. G. (1968), *Bibliography of Statistical Literature*, vol. 1. London.

May R. O. (1972), Gauss. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 5, pp. 298 – 315. **S, G,** 70.

Morando B. (1995), The golden age of celestial mechanics. В книге Taton R., Wilson C., редакторы, *General History of Astronomy*, vol. 2B. Cambridge, pp. 211 – 239.

Repsold Joh. A. (1920), FriedrichWilhelm Bessel. *Astron. Nachr.*, Bd. 210, NNo. 5027 – 5028, pp. 160 – 214. **S, G,** 71.

Weisse M. (1846), *Positiones mediae stellarum fixarem in zonis Regiomontanis.* Petropolis.

Zoch R. T. (1935), On the postulate of the arithmetic mean. *Annals Math. Stat.*, vol. 6, pp. 171 – 182.

IX

Ф. В. Бессель

Рецензия на книгу Delambre (1827)

F. W. Bessel, J. B. J. Delambre, *Histoire de l'Astronomie du dix-huitème siècle*. Paris. 1827.
Jahrbucher f. Wiss. Kritik, Bd. 2, 1829, pp. 161 – 168, 179 – 200

[1] Историк науки должен досконально, а не поверхностно знать всё о событиях, которые он собирается описывать, притом не в хронологическом порядке, а с достигнутой позднее точки зрения. То, что остаётся без последствия или связей и поэтому не вписывается в общий ход событий, можно кратко отметить, либо не упоминать вовсе. Если же историк хочет наполнить свою книгу описанием отдельных событий, то она окажется не историей, а источником для составления истории. Напротив, если историк может составить ясный и полноценный обзор событий и их последовательности, то, по нашему разумению, он будет достоин уважения за достигнутый успех.

Ясно видимое без принуждения ясным и представится, но, чтобы донести до читателя собственное видение событий, тон повествования естественным образом окажется подходящим к описываемым событиям и характерным чертам автора. В соответствии с этой точкой зрения составление истории не является самостоятельным искусством, но оно требует *больших усилий* и возможно только для тех, кто способен прочувствовать события и обозреть их. И мы склонны считать, что успех обеспечивается выполнением этого *единственного* условия.

Правильное описание развития и упадка государства вытекает из знания соответствующих событий и приобретённого представления об обстановке в сообществе его жителей. Для описания развития и упадка науки требуется подобное же знание и представление о ней.

Каждый может составить историю только того, что ему точно известно. Впрочем, отношение историков общества и науки к своим темам различно: первый не может сам вмешиваться в события, второй же *обязан* так поступать, потому что иначе он не сможет полностью постичь их. Первый, стало быть, может ограничиться описанием прошлого, второй же обязан интересоваться и прошлым, и настоящим. Такова возможная причина, ввиду которой лишь немногие способны успешно разрабатывать историю науки.

В истории математических наук, как и в любой иной истории, можно достигнуть совершенства. Это ясно само по себе, да и

усматривается на примерах. Мы вспоминаем бесподобные введения к различным разделам *Небесной механики* Лапласа, хоть они и являются и должны были являться лишь набросками истории[1]. И многие части труда Montucla [1758; 1799 – 1802] разработаны так, что читатель вводится в самую сущность математика описываемого времени. Но только величественный обзор, которого смог достичь только Лагранж, мы находим в его *Аналитической механике* (1788).

Потребность в истории какой-либо науки ощущается тем сильнее, чем больше изменяются взгляды на неё и на её формы. Астрономия имеет здесь преимущество перед другими науками в том, что она неизменно совершенствовалась медленнее или быстрее, трижды рождалась заново в связи с великими открытиями Коперника, Кеплера и Ньютона. Неудивительно, что подобные открытия, относящиеся к устройству мира, ставили астрономам новые цели.

В течение XVIII века разрастались посеянные Ньютоном всходы, после чего труды астрономов оказались существенно отличными от прежних. Потребность в *истории* астрономии стала ощущаться в высшей степени, поскольку форма исследований почти полностью изменилась и очень многие прежние труды, бывшие в своё время интересными, утратили свою значимость. Прежние времена стали важнее астрономам, и они заслужили больше внимания, чем обычно могло быть bei der wachsenden Verschiedenheit des äußeren derselben sein mag.

Именно XVIII век создавал неожиданно оживлённую картину способом, которым толчок, происшедший в его начале, постепенно передавался всем частям астрономии и как одни из них влияли на другие. Беспримерно интересно в ясной и полноценной форме иметь перед глазами подобное столетие, в течение которого всё было разработано из сырья. Такое изображение было бы прекрасным средством для обучения будущих астрономов.

[2] В последние годы своей жизни Деламбр подготовил *семь* больших трудов по истории астрономии (1817; 1819; 1821), сочинение об астрономии XVIII в., которое после его смерти отредактировал Матьё, равно как и труд по истории измерения Земли, которое Матьё обещает отредактировать[2]. Такую громадную массу материала мы не ожидали бы получить от одного человека, притом за такой короткий срок, даже если бы они не были тогда же и подготовлены.

Мы описываем последнее из вышедших сочинений, которое, по крайней мере для нас, слишком обширно, хоть и недостаточно обозревает прошлое, чтобы охарактеризовать в одной рецензии.

Сочинение разбито на восемь книг, каждая из которых посвящена не отдельной теме, а нескольким астрономам, но большей частью одному или нескольким их трудам. *Первая книга* посвящена Ньютону и его комментаторам; *вторая* – Флемстиду, Галлею, Хорребоу, J. P. von Wurzelbaur; *третья* – третьему Кейлу (1671 – 1732), Лемоньё, A. G. Graham (1675 – 1751), J. Sisson, Бэрду; *четвёртая* – школе Доминика Кассини: трём Macaldis, четырём Кассини [без Доминика только трём: Жаку, Цезарю-Франсуа и Жаку-Доминику] и J.-B.-C. Bochard de Saron; *пятая* – Louville (1671 – 1732), Делилю, Гадену (1704 – 1760), Кондамину, Буге, Мопертюи и нескольким другим; *шестая* – Брадлею, Т. Майеру, Коутсу, Лакайлю; *седьмая* – Варгентину, Лаланду, Жану д′Отрош Шаппу, Маскелайну, Ч. Мезону; *восьмая* – Пингре (1711 – 1796), Бошковичу, A. P. D. du Sejour, Мешену, Ch. Massier (Messier, 1730 – 1817), и нескольким другим.

Подобное подразделение позволяет ожидать, что сочинение Деламбра не посвящено собственно астрономии XVIII в., а представляет собой множество сообщений с суждениями автора. Оно никак не является исчерпывающим, что можно было бы предположить уже из приведённого перечня имён астрономов. Трудно поверить своим глазам, когда видишь в Указателе вперемежку[3] имена Клеро, Даламбера, Эйлера и Ламберта, и тем не менее Ньютона со многими его не упомянутыми значимыми комментаторами.

Нет [в Указателе] Гершеля, который также упомянут лишь мимоходом[4]. Это быть может оправдывается тем, что Деламбр написал свою книгу до смерти этого учёного [в 1822 г.]. Впрочем, если он не хотел описывать живущих, то и книги своей не написал бы, или по крайней озаглавил бы её иначе. Но мы не сомневались бы считать Гершеля исключением, поскольку в 1822 г., когда началось печатание книги Деламбра, его великие открытия могли считаться состоявшимися.

Иногда представляется, будто Деламбр хотел бы писать только о наблюдательной и сферической астрономии, а также о Taselen (?), притом же эти области были наверняка его самой сильной стороной, но тогда как же Ньютон попал в его книгу?

Какой же должна выглядеть астрономия XVIII века, если она едва касается названных имён? Излишне особо упоминать, что при составлении своей книги Деламбр должен был придерживаться точки зрения, никак не соответствующей описанной выше, которую мы считаем правильной. Мы позаботились понять его точку зрения, но его книга не оставила у нас никакого общего впечатления и представилась нам лишь как груда сообщений. Она не могла быть взята у кого-то, обладающего полным обзором нашей науки.

В истории астрономии XVIII века следовало ожидать описания того,
− как искусство наблюдения из сырого состояния, из которого его вывел Флемстид, заботами производителей инструментов и требованиями некоторых астрономов постепенно достигло ранее немыслимого совершенства,
− как теория движения небесных тел была усовершенствована исследованиями взаимных возмущений,
− как открытия Брадлея [аберрации света и нутации] сделали возможными извлечение удовлетворительных результатов из хороших наблюдений,
− как объединение хороших наблюдений и тонкой теории изменило форму астрономических исследований,
− как введение метода условных уравнений[5] привело к серьёзному продвижению,
− как более общее применение математического анализа представило астрономические задачи в их простейшем виде,
− как, наконец, вместо грубого совпадения теории и наблюдений, которым приходилось прежде удовлетворяться, была достигнута возможность их полного совпадения.

Ничего подобного у Деламбра нет, да и вообще у него нет никакой путеводной нити. Кто захочет представить себе астрономию XVIII века по его книге, получит в высшей степени искажённую картину, притом ненамного более полную, чем можно представить себе по наблюдению звёзд невооружённым глазом.

[3]Теперь мы обязаны сообщить, что же содержится в книге. Показать всё, шаг за шагом, мы не сможем, потому что нельзя повторить все замечания. Есть среди них удачные, чего и следовало ожидать от астронома, который *долго* и *упорно* трудился на своём поприще. Другие замечания, видимо, указывают, что он не достиг общности взгляда, которая необходима автору истории астрономии.

Описание открытий Ньютона, при котором часто упомянут Клеро, представляется в целом верным, однако не настолько разработанным, насколько требуется значимостью этой темы. Высказывания, подобные *Притяжение зависит лишь от масс притягивающихся тел* (с. 25), могут привести к недоразумениям. *Всеобщую арифметику* Ньютона автор мог бы вовсе не упоминать, и справедливый упрёк в его адрес оказался бы излишним. [Бессель описывает неверный комментарий Деламбра к одной задаче Ньютона: вопреки его мнению, задача была в точности определённой, а не переопределённой.] Ясного представления о сути *Всеобщей арифметики* читатель не составит себе, чего и следовало ожидать ввиду подобных ошибок.

О Флемстиде сказано, что он отказался от измерения расстояний [?], чтобы перенять метод наблюдений Пикара, а именно метод меридианных наблюдений. [Далее неясно о Пикаре]. Следует также признать, что этот талантливый астроном [Пикар] пытался таким образом достичь чего-то полезного, но этот метод нельзя называть его именем, да и вообще не метод наблюдения, а его применение основывает заслуги астронома.

Флемстид повысил точность инструментов, однако у нас не было бы достаточно оснований благодарить его, если бы он не произвёл со своими более точными вспомогательными средствами [инструментами] самый полный и прекрасный ряд наблюдений и таким образом более твёрдо обосновал практическую астрономию.

Про наблюдения Флемстида Деламбр заявил: *Они представляются менее точными, чем у La Hire или чем в Römer's Triduum*[6], мы же неизменно считали их очень точными, такими, которые при надлежащем редуцировании часто представляют собой решающие результаты. Но при нынешнем состоянии дела требуется, чтобы тот, кто желает судить о доброкачественности существующих обширных рядов наблюдений, методически исследовал вероятную ошибку[7] каждого способа наблюдений и основывал на этом своё мнение.

Подобное исследование прежних и новых рядов наблюдений необходимо, если нужно объединить многие ряды. Это также было бы источником для истории наблюдений. Для наблюдений Флемстида Аргеландер привёл подобное исследование при защите докторской диссертации в Кёнигсберге и определил вероятную ошибку времени[8] наблюдённого прохождения [звезды], равную 0,”3263, а зенитного расстояния, 5,”2. Эти погрешности следует отнести частично наблюдению и их отсчётам, и частично несовершенству деления шкал инструментов.

Бросается в глаза, что, лучше изучив теорию ошибок [включая метод наименьших квадратов], наблюдатели всё же не полностью сравнимы друг с другом. Одна из самых существенных заслуг Флемстида состоит во вдумчивом расположении [во вдумчивой регистрации] своих наблюдений: он всегда приводил необходимые указания о состоянии инструментов и об исключении инструментальных ошибок. Здесь же упомянем его известный метод одновременного определения прямого восхождения Солнца и какой-либо звезды, в точности подходящий особенностям его вспомогательных средств.

Деламбр приписал этот метод Пикару, о котором мы можем сказать только хорошее. Мы не сомневаемся, что он знал бы, как наблюдать в различных случаях, но не можем так благоприятно

судить о нём, если для этого нет никаких оснований, кроме того, что он, *наверное, мог бы так поступить*.

Когда Деламбр судил о Пикаре и Лакайле как составитель похвальных речей, а не как историк, он должен был бы удовольствоваться тем, чем они действительно сделали для астрономии. Его окончательное мнение о Флемстиде неожиданно:

Был ли он таким же точным и неустанным наблюдателем, как Гевелий? Думаю, что нет, но он оказался в лучших условиях: угловые измерения уже производились со зрительной трубой и т. д.

Мы не склонны указывать здесь своё собственное мнение о Флестиде и оставляем эту задачу читателям, которые в состоянии сообразить, какова была бы астрономия в середине прошлого века без Флемстида. По нашему мнению, несправедливо ставить славу человека, подобного Флестиду, в зависимость от существенной, правда, случайности, от применения зрительной трубы. Его направляла идея, которой он долгие годы следовал изо всех сил, о лучшем обосновании астрономии. Следует признать, что эта идея преодолела бы любые трудности. И мы не должны забывать, что силы, требуемые для крупного мероприятия в течение длительного его исполнения, осуществлялись, и, быть может медленнее, возрастали до тех пор, пока не преодолевали всех видимых затруднений.

Обратно, наверное можно спросить, почему те, которые обучали внедрению зрительной трубы, не выполнили наблюдений Флемстида. Деламбр не ставит себе такого вопроса, и мы должны признать, что не можем удовлетвориться обычным ответом, который основывается на случайных трудностях и экономических затруднениях.

Часто имеются все возможности, да и понимание, так что следует рассчитывать на успех большого труда, но на него либо не решаются, либо для него нет сил. Так происходит чаще, чем величественная идея останавливается перед трудностями, и когда происходит подобное, следует с благодарностью признать не думая, что кто-то другой при аналогичных обстоятельствах сможет достичь этого, либо что запоздавшее открытие вспомогательных средств помешает этому. Но здесь не место сравнивать Гевелия и Флемстида.

[4] О прекрасном Галлее, чей великий труд отличается стремлением к зрелости и полноте, суждение Деламбра более благоприятно, чем о его предшественниках. Мы бы желали, чтобы связанный с его именем период возврата ошибок таблиц Луны был исследован более тщательно. Это было бы нетрудно,

потому что теперь нам известна истинная теория движения этого небесного тела.

Во времена Галлея знание возмущений, как нам кажется, считалось крайне необходимым, тем более, что проведение 18-летнего цикла наблюдений (а точнее, двойное такое проведение) должно было установить границы надёжности[9].

Мы не можем не упомянуть, что, к сожалению, не увидели в книге Деламбра *более точного* известия о наблюдениях обоих прохождений Венеры через солнечный диск, которые были проведены по инициативе Галлея[10]. Было бы уместно расследовать здесь несколько сомнительных обстоятельств, как это и сделал Энке [1822 – 1824] в обоих своих добросовестных сочинениях. По поводу спора Лаланда и [иезуита Максимилиана] Хела, который разразился в связи с прохождением Венеры 1769 г., мнения Деламбра иЭнке совпали.

[5] Описание трудов Лемоньё мы считаем удачным. Он был значим, но как бы несозревшим и неизменно отставал от своего времени. Известно, что он произвёл очень длинный ряд наблюдений с хорошими инструментами, который в основном ещё не был использован, но в котором Бувар отыскал большое число наблюдений Урана. Они беспорядочно рассеяны, что, конечно же, было весьма ошибочно. Возможно по этой причине они оказались непригодными для отыскания [Урана?]. Более точное известие о рукописях Лемоньё было бы тем не менее желательно, чтобы судить о некоторых сомнительных обстоятельствах.

Представляется, что из всего сказанного, и из сообщения Деламбра следует, что Лемоньё не был хорошим наблюдателем. Но установить зрительную трубу, считать и отсчитывать он был способен не хуже других, и его наблюдения, из которых можно исключить инструментальные ошибки, всё же могут быть использованы. По отношению к Урану они содержат клад. Не будь они так беспорядочны, их можно было бы рассматривать отдельно от других. При их сравнении с несколькими сотнями звёзд, места которых известны из других источников, они могли бы предоставить многие полезные результаты. Редуцирование этих многочисленных наблюдений и их возможно наиболее полное применение было бы неплохим занятием для молодого неустрашимого астронома, они ведь начались до наблюдений Брадлея.

Если будущие астрономы когда-нибудь воспримут почтенную уверенность, восстановив скрытый клад прежних времён и тем самым надёжнее показав своё усердие, и сразу же начнут наблюдать при помощи кругов (Kreise) и меридианных кругов, то можно будет надеяться, что и Лемоньё заслужит больше

уважения. В случае более обширной публикации, обусловленной кометными вычислениями Лемоньё, мы заметим, что лишены основательного знания такого существенного для науки решения проблем комет, которое почти целиком было проведено в XVIII в. И здесь видна нецелесообразность подразделения книги Деламбра по учёным.

Про Лакайля в ней сказано, что он первым прояснил кометные вычисления, но про метод Ольберса [XIX века] мы не узнаем ничего. Мы можем извинить это так же мало, как и умолчание об открытиях Гершеля[11].

Принимать при вычислениях, что кометы движутся по эллипсам, Деламбр считает весьма бесполезным, по крайней мере, если период их обращения не является коротким. Но нельзя узнать, что же по его мнению является полезным и бесполезным. Мы полагаем, что по возможности более полное понимание результата, полученного из ряда наблюдений, полезно вне зависимости от того, где это будет использовано. Можно показать, что наблюдения кометы нельзя согласовать с параболической орбитой и что достаточно считать движение эллиптическим, так что его установление наверняка полезно для изучения комет, что важно уже само по себе. Оно полезно даже тогда, когда для повторного знания достаточна парабола[12].

Небо предохраняет науку, чтобы она не подчинялась так называемому полезному, т. е. какой-то произвольной точке зрения, по-видимому лежащей вне науки. Всё, что действительно научно, окажется научно полезным, очень скоро даже в других научных темах. При желательном случае мы не пропустим ни единого слова, чтобы заявить, что так называемые полезные работы (например, новые таблицы планет), если они неполны, видимо гораздо меньше продвигают науку, чем законченные работы по теме, которая относится лишь к другой научной области, непосредственно не примыкающей к почве реальности. Историку астрономии нетрудно будет вывести эту истину по опыту.

Предложенный Лемоньё метод наблюдения горизонтальной рефракции быть может не заслуживал строгого порицания (с. 228): наблюдатель очевидно оказывается независимым от указания времени, вместо которого будет известен азимут звезды на видимом горизонте, или, вообще, на определённой высоте. В примере со звездой α Лира Лемоньё допустил вычислительную ошибку, но легко видеть, что для звезды, близкой к полюсу, влияние ошибки азимута окажется ещё меньшим, чем в его примере. Порицаемое неудобство состоит в том, что горизонтальная рефракция выводится не непосредственно, а как среднее из двух при наблюдении восхода и захода [звезды]. Это

неудобство отпадает, если каждый азимут определяется независимо.

[6] Про Graham, Sisson и Bird, которых мы считаем *весьма заслуженными* в продвижении искусства наблюдения, сказано на полутора страницах, зато школе Доменика Кассини уделено 75 страниц. Об её основателе речь идёт не в рассматриваемой книге, а в *Hist. Astron. Moderne*. Можно заметить, что астрономы, которых Деламбр причислил к этой школе, лишь мимолётно продвинули науку, хотя частично работали не без усердия. Но их заслуга состоит в геодезическом измерении Франции[13]. По описанию их работы представляется, что их усилия были менее направлены к завершению труда, чем к его пользе. Математическое понимание часто отсутствовало в такой степени, что преимущество ньютоновой истины по сравнению с прежними ошибочными представлениями не выявлялось.

От Louville также мало что осталось. Делиль первым повторно заметил комету Галлея, и Деламбр по этому поводу заметил:

Вероятно потому, что другие астрономы оставили ему заботы по отысканию кометы. Они знали, что даже Messier, который не имел никаких других дел, занялся этим же и по существу более года все свои ночи разыскивал комету. Все были уверены, что Лакайль не хотел доставить себе удовольствие тем, что первым покажет комету своим товарищам.

Проще говоря, другие не нашли комету, и эта заслуга поэтому принадлежит Messier и Делилю.

При описании трудов Буге и во многих других местах Деламбр сообщает о рефракции. Он приводит таблицы рефракции многих авторов или выписки из них, хоть позднее выяснилось, что эти сведения малоинтересны, если не установлены температура воздуха и атмосферное давление, к которым они должны были бы относиться. Про истинную математическую теорию рефракции, открытую Крампом и Лапласом, Деламбр сообщает лишь в приведённой им заметке Матьё.

Ничего не сказано об изменении влияния температуры с зенитным расстоянием наблюдаемого объекта , хоть оно и было установлено теоретически и подтверждено малостью вероятных ошибок малого расхождения между кёнигсбергскими наблюдениями и теоретически основанными на теории таблицей. Напротив, Деламбр остался при своём прежнем мнении о формуле Тобиаса Майера, которая частично учла указанное влияние. Вместо таблиц различных астрономов или помимо их следовало выяснить, в какой мере применение средств наблюдения и *последовательность и следствия из исследований* могли бы доставить более надёжное ожидание результата.

Действительно, при этом, да и вообще с течением времени стало достаточно ясно, что для получения надёжных результатов эти требования должны быть выполнены. И всё это неизменно яснее отмечалось и поистине стало одним из главнейших результатов опыта за последнее столетие. История науки должна прежде всего постараться ярко осветить подобные основные результаты, но по многим основаниям мы должны заключить, что Деламбр не имел об этом ни малейшего понятия.

Метод, которым французские астрономы воспринимали неоднократный спор об изменяемости или постоянстве наклона эклиптики, мы также не одобряем. По существу не имеет значения, достигнута ли истина или результат ошибочен, коль скоро нет достаточных оснований ни для того, ни для другого мнения. Спор оказался бы намного более уместным, если бы вначале решили выяснить, было ли причиной явления движение эклиптики или экватора, но подобная более основательная точка зрения на проблему видимо в то время не была воспринята.

О Marinoni, который немало занимался новым устройством инструментов, но не оставил астрономии ничего дополнительного, в книге сказано мимоходом:

Представляется, что он всё своё свободное время потратил на изготовление и юстировку своих инструментов, а на их полезное применение времени уже не было.

[7] Шестая книга сочинения Деламбра сияет именами Брадлея, Майера, Коутса и Лакайля и должна была бы доложить о *великих* заслугах. Но он не выполнил эту прекрасную задачу так, как подобало. Он исходил из того, что Лакайль ни в чём не должен появляться ниже Брадлея, а если его соотечественник не сделал того, чего добился Брадлей, или сделал не так полно, Деламбр уменьшал значимость этого. Если же этот метод не удавался, Деламбр старался поднять другого астронома, более раннего или того же времени, как можно ближе к уровню Брадлея, так чтобы он меньше выделялся.

Пустые старания! Никого из читателей он не убедит. Заметное старание понизить одного и повысить другого приведёт даже к противоположному результату. Прекрасные свойства прилежных и в наибольшей степени спелых трудов Лакайля способствовали тому, чтобы предохранить его от неуклюжего восхваления.

Во многих местах Деламбр пытался частично приписать другому своему соотечественнику, Пикару, славу за открытие аберрации света, которая до сих пор принадлежала одному лишь Брадлею. Он обосновывал это притязание на книге *Voyage d'Uranibourg* [Paris, 1680]. В ней Пикар говорит, что наблюдал изменения высоты Полярной в меридиане, но они обладают годичным периодом и не могут быть объяснены параллаксом.

[Следует пояснение,] частично обусловленное недостаточной точностью наблюдений того времени.

При тех возможностях было бы чистой случайностью, если бы Пикар оказался ближе к истине. Но он так близко подошёл к ней, что доказал свою внимательность и точность, которые сами по себе похвальны. И всё же они так же мало оправдывают притязания на его участие в открытии аберрации, как первое указание на неправильности в движении планет оправдывали бы притязания на открытие системы Коперника.

Кроме того, Пикар говорит только о Полярной, а его вспомогательные средства не давали бы ему возможности решить, следует ли приписать замеченное явление изменению склонений звёзд или высоты Полюса. И если бы Пикар пошёл ещё дальше, но не пояснил этого явления, то Брадлей оставался бы его истинным первооткрывателем.

По другому случаю Деламбр сослался на Лакайля:

Si quis vero nonnullas inter observata sua dissensiones pro novis in coelo inaequalitatibus gestiat propalare, eum, nisi simul causis hisce physicis consentaneas ostenderit, Detectoris nomen infeliciter ambire, puta, Astronomiaeque perturbatorem potius quam promoterem, agere.

Это нечёткое, вовсе не ведущее к цели и замеченное другими высказывание безусловный поклонник Лакайля мог бы оставить у себя в памяти, даже если он хотел его выделить. Сравнивая высказывания Пикара в целом с правилом, которое Брадлей установил, чтобы полностью понять это явление и исключить любую возможность ошибки mit Maßregeln, welche ein vielleicht nie übertroffenes Beispiel vollendeter Experimentierkunst geben, то доля славы, приходящаяся Пикару, должна была бы считаться совсем незаметной.

Сообщив о примечательной истории большого собрания наблюдений, опубликованного только через длительное время после смерти Брадлея, Деламбр вставил много замечаний, и некоторые из них мы хотим привести. Он порицает обозначения долей секунды у Брадлея (которые тот делил на трети и восьмые части) и предпочитает более удобные и ныне обычные десятые доли, но добавляет:

Все они недостаточно точны, и Маскелайн хорошо сделал, изменив их.

Против изменения ничего не возразишь, но мы не видим никакого основания считать, что подразделение секунд у Брадлея должно было быть менее точным. Во всяком случае, это обстоятельство весьма незначительно, а качество наблюдений зависит совсем от иных причин. Некоторые подобные замечания Деламбра мы обходим молчанием, но никак не ожидали увидеть у него, что число наблюдений у Брадлея должно было быть

слишком незначительно: *Наблюдений у Bliss ещё меньше, чем у Брадлея*. И далее: *У Маскелайна ещё намного меньше, чем у Брадлея*. И, наконец (с. 628):

Брадлей не сделал всего того, чего можно было ожидать от такого умелого астронома, так благоприятно устроенного, что мог бы расширить свой каталог.

Наблюдения Брадлея охватывают более трёх тысяч звёзд, существенное большинство которых он наблюдал очень часто. Они также включают полные ряды наблюдений Солнца, Луны и планет и всё, что требуется для исследования элементов редуцирования, а их число составляет примерно 65 тысяч.

И вот итоговое заявление Деламбра:

Это столь долго ожидаемое собрание [наблюдений] *не полностью оправдало надежды, которые сложились ввиду великой репутации автора. Наблюдения Маскелайна, хоть и намного менее многочисленные, затемнили их. Наблюдения Брадлея были, видимо, более тщательны с неизменным использованием пяти нитей меридианного круга. Впрочем, если наблюдения Брадлея или Маскелайна и директоров всех обсерваторий, у которых имеются ассистенты, предпочтительнее остальных, то мы не знаем, не будут ли предпочтительнее наблюдения Gael Morris или Charles Mason, или какого-нибудь ещё неизвестного ассистента. По существу превосходство часто следует приписывать инструменту, а не астроному*.

Мы должны признать, что по существу нам в основном безразлично, наблюдает ли ассистент или сам астроном, если предположить, что между ними нет никакого постоянного различия в определении времени[14], или что влияние этого отличия исключено отделением их наблюдений друг от друга.

Считать, отсчитывать и записывать умеет каждый, а если ассистент непривычен или неряшлив, это скажется в возрастании случайных ошибок наблюдений. Некоторые из них могут быть исключены выбором другого ассистента. Если же случайные ошибки изучаются по существующим рядам наблюдений, то в некоторых случаях их можно будет избежать. И если выведенная вероятная ошибка достаточно мала, так что наблюдения можно считать надёжными, их мог допустить и тот, и другой. Но кроме случайных ошибок, по поводу которых можно легко успокоиться, если только наблюдения согласны, но возможны [неизбежны] другие, более опасные, потому что они не выявляются сразу же.

Это – *неизвестные* погрешности инструмента[15], которые опознаются или обезвреживаются его целесообразным исследованием и осмотрительным порядком наблюдений. Но умения подсчитывать, отсчитывать и записывать для этого

недостаточно, требуется более глубокое проникновение в суть вспомогательных средств и собственно наблюдений. Исключение этого вида ошибок *определяет зрелость наблюдателя*, если он подобающе озаботится о выборе помощников.

И здесь Брадлей показал себя мастером. Вероятную ошибку прямого восхождения [звезды] мы установили в своей работе[16] равной 0,”1426 во временной мере, а склонения – 0,”98. И вместо того, чтобы порочить наблюдения Брадлея, Деламбр должен был ухватиться за эти данные и кроме того показать, как можно было добиться *ещё более удовлетворительного* исследования инструмента и *ещё более целесообразного* расположения наблюдений. [Переведено по смыслу ввиду типографского дефекта оригинала.]

Что же касается сравнения с Маскелайном, то мы и здесь придерживаемся противоположного мнения. Те пять нитей (прохождение через которые Брадлей часто наблюдал) не основывают предпочтительности. С одной стороны, Деламбр должен был бы точно вычислить 10 или 20 прохождений звёзды через одну нить и почувствовать то доверие, которое внушается согласием наблюдений Брадлея [?]. С другой стороны, он должен был бы вспомнить известное и столь неблагоприятное явление, которое одно лишь обесценило большую часть наблюдений Маскелайна. Длительное использование настенного квадранта привело к его ошибочности, *выявленной лишь в этом столетии*.

Если бы Деламбр учёл всё это, то, видимо, не стал бы так безусловно утверждать, что последователь отбросил предшественника в тень. Напротив, он понял бы, что последовавшие наблюдения не так хороши, как предшествовавшие, притом, что эти последующие могли быть правильно редуцированы только на основе мест звёзд, установленных по определению Брадлея и более новым. Наконец, при сравнении объектов наблюдений сразу видно, что один из них охватывал всю астрономию, второй же имел в виду лишь солнечную систему. […]

Мы не стали бы ничего подобного упоминать, если бы не требовалось исправлять бросающееся в глаза и атакующее Брадлея непонимание. Деламбр порицает его прозвище, *vir incomparabilis* (муж бесподобный), потому что необычно включать в него прилагательное и превосходную степень[17]. Мы полагаем, что он прав, но нас извиняет тогдашний юношеский расцвет, приступ которого не был приглушён даже последующей обработкой быть может 40 тысяч наблюдений, и тем более в процессе их появления.

Непонимание, которое мы желали бы исправить, состоит в утверждении не существовавшей ненадёжности инструментов и

их юстировки. Погрешность штрихов сектора, составлявшую примерно 2″ на градус, никак не оставалась неизвестной Брадлею и была указана 25 января 1750 г. Старый квадрант, разумеется, оказался весьма изменчивым, что было полностью объяснено влиянием температуры. Но это влияние могло быть установлено формулой, выводимой на основе наблюдений, и исключалось, но не должно было скрываться.

Следовало сказать, что если инструмент становился изменчивым или казался ненадёжным, чтобы все результаты основывались не на этом, а на новом квадранте. Даже коллимационная ошибка квадранта была упомянута, − непостижимым образом, − чтобы оправдать притязания Брадлея на репутацию бесподобного.

Что касается уклонения меридианного круга от плоскости меридиана или этой его коллимационной ошибки, то и здесь не было повода для оспаривания доброкачественности наблюдений. Если наблюдения Полярной (которые всегда имелись) в целом указывали по меридианной марке на небольшое уклонение инструмента, то последующая юстировка при помощи ватерпаса и перекладывания [инструмента] определяла значимость ошибки. Это уклонение инструмента почти всегда оказывалось таким незначительным, что без большого вреда могло полностью пренебрегаться.

Если бы оно приводило к ненадёжности, то по крайней мере не ввиду своего существования, а лишь по причине его неверного определения по наблюдениям. Инструментом, который установлен в десять раз более ошибочно, можно наблюдать так же точно, если его погрешность известна и учитывается при вычислениях.

Чтобы высказывать обоснованное сомнение, должны быть оспорены вычисления, чего нельзя добиться без новых вычислений. Если наблюдения указывают, что установка инструмента была очень изменчива, сомнение было бы оправдано, потому что нельзя было бы вплоть до нового наблюдения полагаться на уклонение, определённое по Полярной. Но инструмент устанавливался так основательно, что мы до сегодняшнего дня не видели более жёсткой установки, и поэтому должны объявить необоснованным суждение Деламбра о том, что уклонения были *весьма изменчивыми*.

Некоторые астрономы должны были уметь ежедневно поворачивать свой меридианный круг, чтобы возвращать его на меридианную марку или подправлять его горизонтальность (Niveau). Если бы Брадлей так и поступал, то его инструмент никогда не уклонялся бы, но он был *хорошим* наблюдателем,

постоянно совершенствовался и прилежно наблюдал Полярную, чтобы определить необходимое исправление.

Вряд ли можно понять, как опытный астроном мог пытаться оправдать свои сомнения! Заключения о том, что определения Брадлея отягощены ошибками, мы частично не понимаем, хотя наверняка убеждены в том, что ни один результат, выведенный из наблюдений, не свободен от них. Различия между самим Брадлеем и каталогом его наблюдений, который вычислил Томас Хорнсби, с новым (с. 429) вызваны вычислениями, т. е. элементами вычислений или вычислителями.

Часто слишком легкомысленно следуют обычаю осреднять большое число определений (с. 429). Наблюдения должны быть полностью одного и того же вида и иметь одни и те же свойства и веса. Из двух результатов вычислений, основанных на тех же самых наблюдениях, никогда нельзя брать среднее, потому что, если они отличаются друг от друга, то по крайней мере одно из них ошибочно. В таких случаях следует определять, которое из них заслуживает предпочтения, а если неверны оба, следует вычислять заново[18].

Все эти замечания, как представляется Деламбру, ещё недостаточно компрометируют результаты наблюдений Брадлея, он ведь при всяком удобном случае снова возвращается к этой теме. На самом деле никакой тени он не набрасывает, и последующие [соображения Деламбра] так же малопригодны для этого.

[8] В описании работы Лакайля сравниваются места 148 звёзд, определённые им и Брадлеем. Существует большое различие между данными Лакайля и каталога Брадлея 389 звёзд, который издал Хорнсби, равно как и с нашим новым вычислением наблюдений, притом два последних часто отличаются друг от друга на многие секунды. И Деламбр спрашивает:

Почему Брадлей не указал на эти поправки (он имеет в виду последующие вычисления), *если они были необходимы*.

Можно только сказать: указал бы, будь они известны ему. Мы, напротив, полагаем, что, при вспомогательных средствах вычисления прежних времён кроме хорошего совпадения результатов Брадлея и его помощников с новыми (исключая некоторые ошибки записи и вычислений), ничего другого перед окончанием всей серии наблюдений нельзя было бы ожидать.

Основной результат сравнения 148 звёзд состоит в том, что в среднем прямые восхождения у Лакайля на 0″,42 во временной мере меньше, чем у Брадлея. Это, полагает Деламбр, можно приписать замеченному Пондом обстоятельству, что при горизонтальной оси тот же меридианный круг, который применял

Брадлей, вращался не в вертикальной плоскости, а близко к ней, в некотором часовом круге.

Заметим мимоходом, что Понд предпринял своё исследование после смерти Маскелайна и что инструмент в то время был уже не тем же самым: он был снабжён ахроматическим объективом, возможно более тяжёлым, чем прежний, простой, и потому вызывал изгиб, которого раньше быть может и не было.

Уместно заметить, что если инструмент описывает некоторый часовой угол, или, общее, большой круг, то по примеру Брадлея это исправляется по наблюдению Полярной. Положение этого большого круга относительно горизонта или меридиана остаётся безразличным, поскольку редукция разностей прямых восхождений зависит только от расстояния derselben от полюса. Не должен ли был Деламбр это заметить?

Брадлей наблюдал при обоих положениях оси, так что уклонение линии визирования от большого круга оказывалось настолько безвредным, насколько это вообще было возможно. Наконец, Деламбр мог бы подумать, что если прямые восхождения у Брадлея имели существенные ошибки, зависящие от склонения, их должны были заметить по сравнению с новыми наблюдениями, например, с каталогом Пиацци.

Мы приведём ещё цитату со с. 524:

Возможно, что в какой-то мере слишком легко убеждались, что с намного бОльшими инструментами Брадлей должен был наблюдать намного лучше (как Лакайль). В некоторой степени это вероятно. Вспоминали, что он открыл аберрацию и нутацию и полагали, что он должен был быть лучшим наблюдателем. Это следствие было смелым. Наблюдать зенитные расстояния, не превосходящие 6°, *это самое простое и лёгкое из всех видов наблюдений.*

Рефракция мало влияла, время вообще не влияло. Но известны ли нам эти зенитные расстояния? Представляется, что автор их скрыл, и. если судить по тому, что он сам сказал, они совпадают не лучше, чем у других астрономов, которые наблюдали с зенитными секторами даже намного меньших размеров.

И далее:

Мы сожалеем, что он был в какой-то мере слишком суров и не сообщил о проверке своих инструментов, и что он не стал подражать Лакайлю в тщательности сообщений обо всех проверках всего того, что он замечал и вычислял. И можно подумать, что для приписывания себе несколько преувеличенную репутацию, он считал, что неплохо оставаться не слишком открытым.

[9] Здесь мы не можем уклониться от того, чтобы снова не вспомнить книгу Деламбра. Она содержит самые очевидные доказательства того, что не только наблюдения малых зенитных расстояний, но и все виды наблюдений Брадлея удались превосходно, включая даже разности прямых восхождений в 12 часов (с. 112 и др.). Более того, как раз наблюдения Брадлея так благоприятно выделяются наличием всех средств контроля, что мы по крайней мере верим, что видим истинные значения [измеряемых величин].

Деламбр даже заявляет, что точное вычисление наблюдений Брадлея почти излишне. Мы уже сказали, что не знаем, что ему кажется полезным, а что – нет. Но если точное вычисление наблюдений излишне, то и сами они тоже не нужны, равно как не нужно точное присоединение теории к ним [не нужно их теоретическое обоснование]. Короче, в астрономии каждое усилие приблизиться к истине излишне.

Никто, знакомый с астрономией и её истинными потребностями, не может проповедовать подобное учение! Мы должны признать, и не думаем, что ошибаемся, что сам Деламбр, который в своё время так подобающе, т. е. заслуженно трудился в науке, и занимался определениями и исследованиями die von ihm selbst in jener früheren, nicht die Vorarbeiten der gegenwärtigen besitzenden Zeit, gemachten Untersuchungen, noch in einer späteren, будто хотел представить границы астрономии. Но вот что важно:

Мы не опасаемся изложить своё убеждение. Только *основательное и настойчивое* использование существующих наблюдений приближает нас к цели, которая так часто кажется *уже достигнутой*. Подробное разъяснение этого завлекло бы нас слишком далеко, но каждый увидит, что если только захочет, что, к примеру, наше знание солнечной системы, столь долго остававшееся грубым, т. е. подвластным существовавшим наблюдениям, будет приближённым, пока мы не откажемся выстраивать из них сомнительных следствий.

Но когда основы наших исследований крепко заложены, то вопреки всем доказательствам, направленным против наблюдений Брадлея, к ним будут неизменно возвращаться. Они настолько преобладают в любом смысле, что одновременные наблюдения Лакайля и Майера почти исчезают. Впрочем, мы вовсе не считаем, что последние бесполезны. Все они, по нашему убеждению, должны быть *переработаны*, и мы не сомневаемся, что они окажутся намного полезнее, чем ныне более употребительные и легковесные труды.

Деламбр оценил Тобиаса Майера намного правильнее, чем Брадлея. Видно, как великая идея полностью понять казалось бы беспорядочное движение Луны руководила трудом этого

великого астронома, как он своими усилиями связал теорию с практикой. Счастьем для науки вероятно было то, что Майер не стремился возглавлять обсерваторию так же богато оборудованную, как Гринвичская. Если бы один человек хотел решить обе проблемы, по охвату подобным тем, которые в то же самое время решали и Брадлей, и Майер, то их объединение помешало бы и той, и другой. Польза, которую наука могла бы извлечь из разделения занятий, должна была серьёзно обдумываться, тем более теми, чья одарённость и склонности позволяла им вступить на какой-либо отклоняющийся путь.

[10] Как уже было косвенно сказано, о Лакайле Деламбр судит с предпочтением, что соответствовало его значимости. Истинная любовь и пламенное усердие одухотворяли все его шаги. Он никогда не уставал жертвовать собой, вычислял собственными силами, никому не угождал и верно служил только своей царице, астрономии. Подобные качества необходимо приводили к успеху, неприкрашенное описание которого должно было быть достаточным для составителя похвальных слов, не говоря уже об историке. Не было никаких причин для его ошибочного сравнения [с Брадлеем] и оправдания слабостей.

Главным трудом Лакайля было исследование движения Солнца, которое он почётно, прилежно, с любовью к точности и проникновением обосновал собственной разработкой своих собственных и прежних наблюдений Вальтера (Walter). Этот труд был вознаграждён прекрасным успехом большинства определений. Кроме того, он

− составил по своим наблюдениям каталог 397 звёзд,

− определил места 10 тысяч южных звёзд по наблюдениям в предгорье Мыса Доброй Надежды [La Caille 1847],

− проложил градусное измерение и проделал наблюдения для установления параллакса Луны,

− проверил градусное измерение, проложенное вдоль парижского меридиана,

− наконец, исследовал рефракцию

Все эти работы были выполнены любовно, осмотрительно и умно[19], часто лишь с такими незначительными вспомогательными средствами, что оказались бы неудовлетворительными, не сумей Лакайль в каждом затруднительном случае отыскать им замену.

Известно, что Лакайль вывел значение астрономической рефракции, намного бОльшие действительного. Вероятная причина этого была погрешность делений на всём протяжении шкалы инструмента, которая была определена [кем?] только косвенно, по уклонению рефракции. Деламбр исследовал эту проблему несколько глубже и заключил, что результаты Лакайля могут быть достаточно хорошо согласованы с теперешним

знанием, если установить погрешность делений шкалы так, чтобы согласование оказалось наилучшим[20].

Полного согласия достичь нельзя, потому что инструментальные ошибки определения зенитных расстояний пропорциональны им, а ошибки рефракции примерно пропорциональны их тангенсам. Деламбр пытался оправдать Лакайля в том, что он просмотрел эту ошибку, но уверенность, которую Лакайль приписывал своему результату, не принимая при этом решающих средств, чтобы обеспечить столь необходимую здесь точность своих инструментов; отсутствие иных проверок рефракции, например, по наблюдению звёзд в верхней и нижней кульминации; непринятие во внимание противопоставления результатов других наблюдателей, хоть никаких действительных оснований для этого не могло быть приведено; пренебрежение теорией, которая уже в своём тогдашнем состоянии (Томас Симпсон, 1743) указывала, что рефракция по Лакайлю не могла иметь места и для больших, и для малых зенитных расстояний, − всего этого Лакайль мог избежать [или учесть], и историк должен был воспринять эту проблему не так, как Деламбр, а правильно совместить описанное с действительно похвальным, и не представлять результат Лакайля как безошибочное. Это никак не соответствует истине, и если есть желание проверить точность результата по наблюдениям Брадлея, потребуется новое исправление.

Указание Деламбра, что погрешность в 1″ в полной дуге квадранта приводит к погрешности в 0″,5 в рефракции при зенитном расстоянии 45°, является следствием ошибочного взгляда, или, если угодно, так действительно получается при ошибочной схеме исследования. Рассуждение, основанное на подобном исследовании и направленное против определения рефракции у Брадлея, безосновательно и ничтожно, потому что Брадлей исследовал ошибки штрихов своего квадранта.

Необычное явление представляет упомянутое в начале § 8 сравнение мест 148 звёзд: по сравнению с Брадлеем у Лакайля прямые восхождения в целом тем меньше, чем севернее расположена звезда, притом расхождение южных и северных звёзд возрастает в среднем более, чем на секунду времени. Это явление должно быть пояснено. Мы не смогли ознакомиться с исходными данными (Fundamente) Лакайля, хоть и всерьёз постарались. Его наблюдения нам известны только по сведениям из разных источников, и поэтому мы должны оставить для других вопрос о том, не состоит ли ошибка в пренебрежении изменения рефракции при вычислении соответствующих высот, из которых были выведены прямые восхождения. Если это действительно произошло (ни Деламбр, ни другие авторы не припомнили этого

соображения), то ошибки должны были быть того же смысла, в котором они действительно произошли.

Восточные величины видимо в основном наблюдались в начале ночи, западные – позже, когда становилось холоднее, из чего может последовать вычитательное (subtraktive?) улучшение записи моментов кульминации, притом более значительное для южных, чем для северных звёзд. Было бы действительно намного интереснее исследовать это явление объективно и основательно и рассмотреть наблюдения Лакайля, которые во всех отношениях не так хорошо подкреплены вспомогательными средствами, как брадлеевские, совместно с последними и принять среднее как наиболее надёжное[21]. Деламбр говорит:

Если можно усомниться в двух секундах в прямом восхождении звёзды у Лакайля, то у Брадлея – в одной секунде, и разность этих величин не очень велика.

Если так и было, то на самом деле разность оказывается *весьма* значительной и при осреднении результатов их следовало бы брать в соотношении 4:1. Но так ли это, или хуже или лучше, необходимо было бы выяснить, исследовав наблюдения Лакайля так же методически, как брадлеевские.

Сообщая о Коутсе, Деламбр говорит, что он первым предложил метод наименьших квадратов, но в своём примечании Матьё заметил, что это недоразумение, и что правило Коутса иное[22].

[11] Хотя седьмая книга сочинения Деламбра также посвящена таким уважаемым учёным, как Варгентину, Лаланду, Шаппу, Маскелайну, Мезону, мы можем меньше на них останавливаться. Про Варгентина у нас всегда говорили, что все свои усилия он направил в одном направлении и продвинул его насколько мог[23]. У Лаланда не было такого качества, но были другие, и очень неплохие. Он – автор сочинения об астрономии в целом (1801), которое мы, несмотря на его неполноту и устарелость, всё ещё полагаем самым важным в своём роде, притом также ввиду приведённых им исторических сообщений, которые намного чаще пригоднее для отыскания указаний, чем более поздние труды того же вида. Его сочинение оказывает ему почёт как знатоку всей астрономии.

Он не рассматривал отдельных тем основательно; видимо, ни одной из многих из них он не исчерпал так, как мог бы, но он доставил астрономам своего века один из прекраснейших трудов, по которому мы впервые смогли гораздо полнее узнать о звёздном небе, чем это раньше считалось возможным. Наблюдения, собранные им, выполнил не он, но он следовал великой и прекрасной идее о таком сборе и осуществил её. Это достижение принадлежит ему одному, и оно обеспечит ему бессмертие.

Про Маскелайна Деламбр судит несколько поверхностно. Со времени своего пребывания в Гринвиче Маскелайн уделял основное внимание продолжению наблюдений, т. е. по существу важному делу, тем более, что в то время ни одна иная европейская обсерватория ничего существенного этом направлении не делала.

Этот [!] длинный ряд наблюдений, будучи единственным, сыграл большую роль в истории века, и поэтому историк должен был бы приложить все усилия, чтобы точно показать, в каком смысле этот ряд достаточно хорошо оправдал своё [т. е. затраченное?] время, либо сообщить, что что-то желательное осталось не выполненным. Он должен был указать, всегда ли было произведено достаточно исследований коллимации и других исправлений квадранта и оценивать свойства, присущие поздним выявленным погрешностям [!] этих [!] инструментов.

Мы чувствуем, что много требуем от историка, но считаем, что его обязанность, если он желает выполнить свою задачу, весьма тяжела. И это вовсе не моё мнение, что он должен заниматься всем этим, не будучи неизменно готов проводить серьёзные исследования. Впрочем, это требование так трудно выполнить, что мы можем надеяться на действительно достаточно полную историю астрономии последнего столетия лишь в далёком будущем.

В последней книге своего сочинения Деламбра раздел о Мешене заслуживает быть выделенным.

Ясно проявляются все качества этого астронома, его хорошие и дурные стороны. Деламбр так же утончённо и разносторонне описывает геодезические работы во Франции, за что ему и Мешену (Méchain & Delambre 1806 – 1810) выпала немалая честь.

Примечания

1. Наряду с *бесподобными введениями* Лаплас совершил непростительную ошибку. Повторяя Канта (и Кеплера), Лаплас (1796/1982, с. 328) заявил, что эксцентриситеты планетных орбит вызваны разностью температур и давлений в различных регионах этих планет. В последний раз указанная книга была переиздана при жизни Лапласа в 1813 г., так что вплоть до этого года Лаплас не знал, что, по Ньютону, этот эксцентриситет зависит от скорости обращения планеты около Солнца.

2. Этот труд вышел значительно позже (Delambre 1912).

3. Ниже, по контексту, *вперемежку* означало *слишком кратко*.

4. Гершель упомянут в общем Указателе имён и предметов только как астроном, открывший Уран, см. с. xlix в *парижском издании книги 2004 г.* Во многих местах Бессель ссылается на номера страниц *первоначального издания* той же книги.

5. Бессель видимо имел в виду решение переопределённых систем исходных уравнений при каком-либо дополнительном условии (потому что строгого

решения не существовало), но не по ещё неизвестному условию наименьших квадратов.

6. Астроном Ole Romer (1644 – 1710); его Tridium – результаты наблюдений за какие-то три дня. Мы не смогли установить никаких подробностей, но Бессель будто бы описал их (*Astron. Nachr*., т. 3, 1824, с. 14). Будто бы, потому что мы не нашли этой статьи в Перечне сочинений Бесселя, приложенном к первому тому его *Трудов* (1876).

7. Бессель (1816, с. 141 – 142) ввёл вероятную ошибку наблюдений, зависящую от их закона распределения. Гаусс, в письме Шумахеру 2 февр. 1825 г. заявил, что её надо *запретить*, но сам же применял её в своей переписке и опубликованной работе (1828). Бессель неизменно пользовался ей, и пожалуй из-за этого она стала единственной мерой точности. Лишь много позже L. Struve (1887, последняя ненумерованная страница) выступил против неё, и даже почти через столетие Bomford (1952/1971, с. 610 – 611) *неохотно* перешёл от неё к средней квадратической ошибке (к *средней ошибке* по терминологии Гаусса).

8. Ошибку в определении времени Бессель несколько раз выражал в дуговой мере (и иногда так и указывал), но четыре значащих цифры было данью скверной традиции [v, Прим. 3].

9. Узлы Луны (точки пересечения её орбиты с эклиптикой) обходят эклиптику за 18,6 лет.

10. Об этих наблюдениях см. Van Halden (1995, с. 154 – 157).

11. См. Прим. 4.

12. Эти утверждения следовало значительно уточнить.

13. Градусные измерения 1684 – 1718 гг. оказались ошибочными (Изотов 1972, столбец 639).

14. Бессель (1823) обнаружил, что различные астрономы регистрируют моменты прохождения звёзд несколько отлично друг от друга, и неуверенность его замечания непонятна.

15. Бессель так и не упомянул систематических ошибок, в данном случае – ошибок за счёт неточного учёта рефракции, да и некоторых инструментальных ошибок.

16. Нам известны две статьи Бесселя (1812a; 1812b), в которых он исследовал наблюдения Брадлея, но упомянутых оценок точности в них нет.

17. Видимо: прилагательного в превосходной степени, но, воспользовавшись несколькими переводами, мы отказались от этой степени.

18. Бессель таким образом отказался от своего прежнего и ненужного ограничения, см. выше.

19. Это никак не может относиться ка исследованию рефракции (см. чуть ниже).

20. Вряд ли подобное определение погрешности делений шкал может быть надёжным.

21. См. Прим. 18.

22. Мы выпустили странное и вообще ненужное пояснение Матьё. О рекомендации Коутса см. Gowing (1983) и Шейнин (2013, § 7.3.1).

23. О Варгентине см. Nordenmark (1929).

Краткие сведения об упомянутых лицах

Блисс, умер в 1764 г. Королевский астроном

Гевелий Ян, 1611 – 1687, астроном, конструктор телескопов. Первым начал картографирование Луны

Делиль Жозеф-Никола, 1688 – 1748, много работал в России, почётный академик Петербургской академии наук

Лакайль Никола Луи де, 1713 – 1811, аббат, астроном, почётный член Петербургской академии наук, учитель Лаланда

Лаланд Жозеф Луи, 1732 – 1807, выдающийся историк астрономии

Ла Хир Филипп де, 1640 – 1718, художник, математик, астроном, архитектор. Составил таблицы движения Солнца, луны и планет

Майер Тобиас, 1723 – 1875, крупнейший астроном

Маскелайн Невил, 1732 – 1811, в 1776 – 1811 гг. опубликовал 90 тысяч наблюдений

Матьё Клод Луи, 1783 – 1875

Пикар Жан, 1620 – 1682

Флемстид Джон, 1646 – 1719, первый Королевский астроном, первый директор Гринвичской обсерватории

Хорнсби Томас, 1733 – 1810, в 1798 г. опубликовал каталог звёзд Брадлея

Библиография

Bessel F. W., Бессель Ф. В. (1812a), Einige Resultate aus Bradley's Beobachtungen. *Werke*, Bd. 1, pp. 222 – 233.

--- (1812b), Ankündigung einer vollständiger Bearbeitung der Bradley'schen Beobachtungen mit Nachschrift von Lindenau. *Werke*, Bd. 2, pp. 236 – 238.

--- (1816), Untersuchung über des Olbersschen Kometen. *Werke*, Bd. 1.

--- (1823, нем.), Личное уравнение при наблюдении прохождения звёзд. В книге автора (1961, с. 219 – 225).

--- (1961), *Избранные геодезические сочинения*. М.

--- (1876), *Werke*, Bde 1 – 3. Leipzig.

Изотов А. А. (1972), Градусные измерения. БСЭ, третье издание, т. 7, столбцы 1684 – 1718.

Шейнин О. Б., Sheynin O. (1973), Mathematical treatment of astronomical observations. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol 11, pp. 97 – 126.

--- (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. **S, G,** 11.

Bomford G. (1952), *Geodesy*. Oxford, 1971. Третье издание.

Cohen I. B. (1971), Delambre. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 4, pp. 14 – 18.

Delambre J. B. J. (1817), *Histoire de l'astronomie ancienne*. Paris.

--- (1819), *Histoire de l'astronomie du moyen age*, tt. 1 – 2. Paris.

--- (1821), *Histoire de l'astronomie moderne*, tt. 1 – 2. Paris.

--- (1912), *Grandeur et figure de la Terre*. Paris. Reink, 2015. Редактор G. Bigourdan.

Encke J. F. (1822 – 1824), *Die Entfernung der Sonne von der Erde aus dem Venusdurchgang von 1761*, Tle 1 – 2. Gotha.

Gauss C. F. (1828), Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona. *Werke*, Bd. 9, 1903, pp. 5 – 64. **S, G,** 70.

Gowing R. (1983), *Roger Cotes – Natural Philosopher*. Cambridge.

La Caille N. L. (1847), *Catalogue of 9766 Stars of the Southern Hemisphere*. London.

Lalande J. L. (1801), *Histoire celeste Françoise continent les observations faites par plusieurs astronomes français*. Paris, 1847. Nabu Press, 2010.

Lagrange J. L., Лагранж Ж. Л. (1788, франц.), *Аналитическая механика*. М. – Л., 1950.

Laplace P. S., Лаплас П. С. (1796, франц.), *Изложение системы мира*. Л., 1982.

Méchain & Delambre (1806 – 1821), *Base du système métrique décimal*, tt. 1 – 4. Paris. Немецкий перевод: Leipzig, 1911. *Ostwald Klassiker*, No. 181.

Montucla J. E. de (1799 – 1802), *Histoire des mathématiques*, tt. 1 – 4. Paris. Посмертно издал Ж. Л. Лаланд. Первое издание 1758 г., тт. 1 – 2.

Nordenmark N. V. E. N. (1929), Pehr Wilhelm Wargentin. *Nordic Stat. J.*, vol. 1, pp. 241 – 252.

Struve L. (1887), Bestimmung der Konstante der Präcession etc. *Mém. Acad. Imp. Sci. St. Petérsbourg*, sér. 7, t. 35, No. 3. Отдельная пагинация.

Thoren V. E. (1972), Flamsteed. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 5, pp. 22 – 26.

Van Halden A. (1995), Measuring solar parallax etc. В книге *General History of Astronomy*, vol. 2. Редакторы R. Taton, C. W. Wilson. Cambridge, pp. 153 – 168.

Приложение: Бессель и Гаусс в своих письмах о Деламбре

Мы выписываем отзывы о Деламбре из переписки Бесселя с Ольберсом и Гаусса из его переписки с несколькими учёными, в том числе с Бесселем. Источники:

Gauss C. F., *Werke, Ergänzungsreihe*. Hildesheim.
Gauss – Bessel: Bd. 1, 1975.
Gauss – Gerling: Bd. 3, 1975. Gauss – Olbers: Bd. 4, 1976.
Gauss – Schumacher: Bd. 5, 1975.
Olbers – Bessel: Leipzig, 1852.

Авторы писем обычно не указывают точных названий упоминаемых ими книг Деламбра, но их можно определить по следующему списку, к которому мы добавили и книгу Лаланда, также упоминаемому этими авторами:

Delambre J. B. J. (1813), *Abrégé d'astronomie*. Paris.
--- (1814), *Astronomie théoretique et pratique*. Paris.
--- (1817), *Histoire d'astronomie ancienne*, tt. 1 – 2. Paris. New York – London, 1965.
--- (1819), *Histoire d'astronomie moyen age*. Paris. New York – London, 1969.
--- (1821), *Histoire d'astronomie moderne*, tt. 1 – 2. New York – London, 1969.
--- (1827), *Histoire d'astronomie du dix-huitième siècle.* Paris. Paris, 2004.
Lalande J. L. (1801), *Histoire céleste Française*. Paris, 1847. Nabu Press, 2010.

Ольберс – Бессель

Б – О, 9 октября 1823. Как мог Деламбр так ошибочно сказать, что исправление за счёт рефракции плохо соответствует наблюдениям?

Б – О, 4 июня 1829. Вы, наверное, будете бранить меня за мою рецензию. Это очень плохая книга, просто басня, и в этом мы полностью согласны. Но должен ли был я выступить против него, он ведь уже не сможет ответить мне, – вот вопрос, который склонил бы меня к молчанию, если бы при чтении книги меня непреодолимо не охватила [необходимость высказаться].Книга очень плоха, и всё же я по крайней мере нигде этого прямо не сказал, хоть это и было легко сделать, что Деламбр об астрономии в целом ничего не понимает.

О – Б, 16 ноября 1830. Последний том его *Истории астрономии* действительно очень плох и убог, а смерть автора не должна защищать книгу от справедливой критики, пусть даже строгой. Но прежние научные заслуги Деламбра я раньше оценивал выше, чем, видимо, Вы.

Гаусс – Бессель

Г – Б, 13 ноября 1814. Вы, наверное, уже тоже имеете большую книгу Деламбра, *Астрономия*. Печально, что многое

хорошее, что могло быть в ней, повсюду сметается её духом. Многословное рассмотрение самого элементарного, мелочность суждений. Весь ход мучителен, нет чувства изящного, неизменное стремление держать обучающихся астрономии только на последней парте в школе математиков. Всё это парализует порыв духа, и я полагаю, что *Астрономия* Лаланда при всех её недостатках окажется более целесообразным руководством для новичков в астрономии

Б – Г, 17 июля 1815. Я перелистал *Астрономию* Деламбра. Как всё-таки возможно, что-то прекрасное и ясное, взятое у других, так затемнить, как постарался Деламбр. На каждой странице чувствуешь боль, которую причинило рождение этого сочинения своему автору.

Г – Б, 15 ноября 1822. … если не подгонять, то отбирать наблюдения (такая склонность заметна у Деламбра).

Г – Б, 17 сентября 1841. Формулы Деламбра непригодны.

Гаусс – Ольберс

О – Г, 28 марта 1813. Книга Деламбра *Abrégé d'*Astronomie – особая. Как я себе представляю, из Вашей *Теории* [*движения*?] вообще ничего не использовано, а Лаплас и Лагранж цитируются экономно. У него, кажется, устанавлено весьма ограниченное понятие о цели астрономии, и всё же, по моему мнению, это не исключает близкого рассмотрения строения мира в целом. И для него малые планеты, кометы, солнечные пятна[1] и т. д. являются незначительными объектами.

Его так называемый собственный метод вычисления кометных орбит – примечательный пример того, как вообще-то проницательный человек так может обманываться в своей собственной идее, ибо Причудливой скучной ошибочной кометной орбиты, как он рекомендует, не существует.

В общем, книгой, думается, не удовлетворишься. Но я не буду обманывать, потому что в ней много хорошего. Расположение материала ново и в целом удачное. Сферическая тригонометрия мне тоже понравилась. Но количество опечаток немыслимо.

Г – О, 8 апреля 1813. Что *Астрономия* Деламбра оказалась такой скверной мало меня удивляет. В его научном поведении мне всегда казалось что-то ограниченное, мелочное и бездушное.

Гаусс – Шумахер

Ш – Г, 10 июня 1812. Не видели ли Вы болтовню Деламбра в *Moniteur* [*Le Moniteur Universel*] о Ваших наименьших квадратах?

Г – Ш, 13 декабря 1814. Боюсь, что *Астрономия* Деламбра окажется вредной для науки. Она вытесняет Лаланда, потому что частично включает больше. Но в ней нет такого чуткого духа жизни, который воодушевляет к высоким устремлениям. Она

будет нашим астрономическим подёнщиком, но не воспитает астрономов.

Ш – Г, 22 сентября 1827. Вам известно, что я всегда придавал чему-то значимость у Деламбра, но его *История астрономии XVIII века* всё это разрушила. Это обычная книга, наполненная ложными утверждениями, искажениями и недоброжелательством.

Г – Ш, 1 марта 1845. … делец, подобный Деламбру, …

Гаусс – Герлинг

Гаусс – Герлинг, 13 сентября 1814. *Астрономия* Деламбра [1814] вышла в трёх толстых томах в четверть листа. Она должна была являться теоретической и практической астрономией, но в области последней она представляется намного беднее, чем книга Лаланда. Физической астрономии нет вообще. Уже поэтому можно заключить, как широка и проторена должна была бы быть книга. Соответствующим высотам Солнца посвящено 32 страницы. Он сам разъясняет, что для изучения астрономии (исключая физическую, к которой он, видимо, испытывает определённую робость) нужны только обе тригонометрии и элементарная геометрия. И вообще, включено многое того, чего в подобных книгах как будто совсем не должно быть. Из моей *Теории* [*движения*?] вполне могло быть перенесено более половины. Многое, как я заметил при перелистывании, глупым образом.

Гаусс – Герлинг, 18 февраля 1815. После более внимательного просмотра я нахожу большую книгу Деламбра ещё намного худшей, чем полагал. Метод вычисления кометных орбит может сослужить хорошую службу вместо наказания за серьёзное преступление, а от галер тогда можно будет отказаться.

Гаусс – Герлинг, 10 марта 1818. Непонятная болтовня Деламбра не заслуживала внимания Ольберса, притом (мягко говоря) в такой утрированно вежливой форме. Вот что написал мне иностранный астроном [Больяи, Бойяи ?] про его *Астрономию*:

Так называемую Астрономию я прочёл с неподдельным отвращением. Если бы в Предисловии было сказано, что он лишь переписал тетрадь одного из своих средненьких учеников, который что-то случайно понял из его лекций, я бы сразу поверил, потому что это написано так подробно, беспорядочно, и, я бы сказал, безалаберно.

Примечание. Schwabe (1838) первым опубликовал свои наблюдения солнечных пятен с 1826 г., и даже после этого на них долгое время почти не обращали внимания. Замечание Ольберса поэтому интересно.

Schwabe H. (1838), Über die Flecken der Sonne. *Astron. Nachr.*, Bd. 15, No. 350, pp. 243 – 248.

X

А. Райс

“Все ошибаются”. Пересечение логики и теории вероятностей у Де Моргана, 1837 – 1847 [выдержки]

A. Rice, “Everybody makes errors”: the intersection
of De Morgan’s logic and probability, 1837 – 1847
Hist. and Phil. of Logic, vol. 24, 2003, pp. 289 – 305

2. Работа Де Моргана в теории вероятностей

Его основным трудом в этой области была статья (1837a), по объёму сравнимая с книгой[1]. Она оказалась одним из первых комментариев к *Аналитической теории вероятностей* Лапласа. Оригинальных результатов в ней не было, но она была первым полным изложением теории вероятностей Лапласа, опубликованным в Англии, т. е. первой большой работой по современной теории вероятностей[2] на английском языке. В 1833 – 1846 гг. Де Морган также опубликовал различные анонимные статьи по логике и теории вероятностей в *Penny Cyclopedia*, которые S. E. De Morgan (1882, с. 415, мимоходом) приписала ему.

Из указанной большой статьи и его длинного обзора (1837c) сочинения Лапласа ясно следует, что Де Морган (1837c, с. 347) считал, что оно является самым трудным и требовательным в математическом смысле, которое ему когда-либо попадалось:

Это – Монблан математического анализа, но возле горной вершины всегда имеются проводники, а вот изучающий его остаётся с ним наедине.

И вот другое высказывание Де Моргана (1837a, с. 418 прим.) о Лапласе:

Никто не был более уверен в верности результата аналитического процесса, и никто так мало не заботился о различных мелких[3] *соображениях, от которых эта верность зависела*. *Его Теория является намного более трудным математическим сочинением, которое нам когда-либо встречалось, и именно главным образом по указанной причине*.

И всё-таки ввиду вдумчивого описания и разъяснения многих сложных доказательств, его статья (1837a) служила не только сводкой или кратким изложением лапласовой *Теории*, но и её переводом и в лингвистическом, и в математическом смысле.

Свидетельством того, что Де Морган владеет этим материалом, служит не только упрощение многих излишних сложностей в сочинении, печально известном своей дремучестью, но и его

способность заметить и исправить в нём несколько ошибок (1837a, с. 410, 418, 447, 452 – 453, 460, 468; 1847, с. 188)[4]. Одна из этих ошибок, которую повторил Пуассон, оправдала появление его статьи (1837b).

Вскоре Де Морган опубликовал более элементарную книгу (1838) о вероятностных методах применительно к задачам страхования жизни, т.е. к науке, в то время находящейся в Англии в младенческом состоянии.

Работа Де Моргана в теории вероятностей кроме того проявила его знание и высокую оценку математической статистики[5], что особо заметно в его *Обзоре* (1838). В нём, он во многих местах исследовал материалы из различных публикаций, в том числе из нескольких недавних работ Кетле (с. 120, 165 – 181, 191 – 197, 211 – 212). Значительную часть другого сочинения (1837a, с. 440 – 464) он посвятил приложению теории вероятностей к проблемам, относящимся к реальным данным и к обсуждению метода наименьших квадратов.

Интерес к этим темам возобновился через четверть века в статье (1864), в которой он попытался упростить математическое обоснование теории ошибок наблюдений[6]. Таким образом, Де Морган внёс двойной вклад в теорию вероятностей в Англии. Во-первых, он дал англичанам первую полную трактовку лапласовой теории вероятностей[7] на их родном языке, притом показав себя участником основного потока английских сторонников этой дисциплины в середине XIX века.

Во-вторых, он выступал за практическую применимость теории вероятностей в разрастающейся области страхования жизни. Он тем самым помог её становлению на основе этой теории, каковой она с тех пор и осталась.

4. Применение теории вероятностей в логике

В своих ранних работах Де Морган настойчиво заявлял, что включение теории вероятностей в логику убедит в обоснованности некоторых выводов. Он противопоставлял традиционную логику, – в которой невозможность формального доказательства некоторого утверждения признанными методами приводила к его безусловному отклонению как ложного, – с математикой, в которой существовало немало возможностей для установления верности или ошибочности утверждений[8].

Он (1846, с. 385) заметил, что логик,

Если его предпосылки не приводят к их следствиям закономерным путём, отказывается от них как от ложных. И действительно, мало имеется книг, в которых обсуждается различие между несостоятельным следствием и ложным выводом, притом показывая, что это самое различие является

вполне признанной темой. Я полагаю, что математик обязан изменить эту привычку, вытекающую из указанного упущения, а именно из смешивания ложного умозаключения и ошибки. Он также должен ввести [в логику] *свои понятия о вероятности, чтобы тем самым обеспечить некоторую способность отличать степени ошибочности друг от друга. Все эти степени* [напрасно] *называются одним термином, либо ошибкой, либо нет*.

Его убеждение в значимости теории вероятностей в области логики выявляется подзаголовком его *Формальной логики* (1847): *Исчисление необходимых и вероятных следствий*. Но он (1847, с. v) обострённо представлял себе, что это внедрение будет оспариваться:

Многие будут возражать против этой теории как экстра-логической. Но я не вижу, на каком определении, основанном на действительном отличии, можно поддерживать это исключение. […] *Не осмеливаюсь утверждать, что логика может обращать внимание на вероятность каждого предмета своего обсуждения, но не понимаю, почему изучение воздействия частичного доверия к предпосылкам на следствия должно быть отделено от следствий из предположения о полной истинности предпосылок*. […] *Вопреки тем, кто желает отделить теорию вероятностей от логики, я заявляю, что, как бы они не предпочитали называть её, она должна сопровождать логику*. […]

Для Де Моргана вероятность не была объективным понятием. В его системе она представляла меру доверия, которую рациональный разум имел бы по отношению к правдоподобию предстоящего события, представляла притязания или что-то, для чего не существует абсолютного знания. Он (1837a, с. 394) утверждал:

Итак, что мы понимаем под вероятным или неправдоподобным событием: по отношению к нему разум наблюдателя склонен либо сомневаться, либо верить в его наступление. Это, очевидно, зависит никак не от самого события, а от присущих этому разуму целой последовательности предыдущих идей и связей о таких обстоятельствах, которые он считает схожими. Поэтому неверно говорить о какой-то вещи, что она вероятна или неправдоподобна сама по себе. Та же самая вещь может быть <u>поистине</u> вероятна для одного человека и неправдоподобна для другого.

Де Морган таким образом приравнивал вероятность события и степень доверия, которую разумный человек припишет ему. Выбор численной шкалы для измерения этой степени доверия,

как он заявил, произволен. Он (1847, с. 182 – 183) действительно привёл примеры шкалы Фаренгейта (32 – 212) и числовой оси на отрезке – 1, 1, но затем принял обычную шкалу 0, 1. Определив таким образом *p*, т. е. свою меру вероятности события (или доверия к нему), простирающуюся от 0 до 1, он (1846, с. 393; 1847, с. 183) дополнительно определил *свидетельство* (testimony) *q*:

$q = 2p - 1$, так что $p = \frac{1}{2}(q + 1)$.

Поскольку $0 \le p \le 1$, $-1 \le q \le 1$. Далее, если $p > 1/2$, он по определению принял, что соответствующее *q* представляет вероятность того, что утверждение отдельного лица о событии верно. Иногда он называл его значением веса (authority) этого события.

Итак, если кто-то приписал событию вероятность 2/3, то свидетельство = – 1/5. Будучи отрицательным, оно противопоставляется этому доверию. Однако, вероятность 4/5 приведёт к положительному весу 3/5 в пользу доверия. Очевидно, что событие с правдоподобием появления, равным 50% (т. е. имеющим $p = 1/2$), приведёт к отсутствию веса для заключения[9]. Применяя установленные правила математической вероятности, Де Морган был теперь в состоянии обсуждать объединение и вывод частичных доверий, исходя из вероятных заключений. Он (1846, с. 393) рассмотрел оценку истинности противоречащих друг другу предложений при помощи своей вероятностной системы и утверждал, что

Авторы работ по логике не озаботились приложением математической теории вероятностей к уравниванию доводов.

Одна из нескольких задач, которые он исследовал, состояла в установлении относительных вероятностей истинности вывода и его опровержения по различным заданным доводам за и против и *свидетельств* каждого (там же, с. 398).

[…]

Если доводы за и против вывода одинаково убедительны, то следует ожидать, что соответствующие вероятности истинности и ошибочности будут равны.

[…]

В своей ранней работе по логике Де Морган явно старался показать, что методы математической вероятности могут быть применены для оценки правдоподобия логических выводов. Он, следовательно, полагал, что вероятность является областью формальной логики, которая исследует правила влияния не вполне достоверных предложений на правдоподобие родственных утверждений. Некоторые современники, например,

математический физик Donkin (1851)[10], поддерживали его точку зрения, но позднее в ней усомнились (Venn 1962, с. ix, 119 прим., 122 – 123).

Примеры, приведённые выше [не включены в перевод], показывают, что применение вероятности в логике вряд ли *облегчают* дело, но Де Морган и не стремился к этому: он был заинтересован лишь в том, чтобы показать, что вероятностные методы *могут быть* применены, но не в усовершенствовании математических методов (Panteki 1992, с. 490):

Во всех своих сочинениях Де Морган следовал понятийному подходу и был более заинтересован в пояснении основных принципов, чем в открытии новых строгих методов.

И так действительно и было в его работах по применению вероятности к логике. Обсуждение идей Де Моргана о вероятных следствиях см. у Hailperin (1996, с. 91 – 107).

5. (Неверное) приложение логики в теории вероятностей

К концу своей научной карьеры, в 1861 г., Де Морган опубликовал ряд статей в *English Cyclopedia*, в том числе существенные статьи о логике и о теории вероятностей. Обе они интересны сами по себе, особенно вторая, поскольку в ней содержался следующий занимательный параграф (1861, столбцы 778 – 779):

Во всей области прикладной математики[11] *нет таких проблем, которые требуют столь пристального внимания и при исследовании которых так трудно избежать ошибки, как в тех, которые встречаются в теории вероятностей*[12] […] *и из всех тем нет ни одной, в которых авторы каждого ранга так часто или так странно не ошибались просто ввиду невнимательности. Одну ошибку, которую допустили и Лаплас, и Пуассон, обнаружили около 20 лет назад* [De Morgan (1837b)]. *Но тот, кто поправил их, очень скоро явно оказался подверженным ещё худшим ошибкам* (*Cab. Cyclopedia*, *Probability and life insurance*, *c.* 28).

Последнее предложение особо интересно не только упоминанием двух превосходнейших математиков XIX века, но и анонимностью того, кто обнаружил их ошибку. Но личность анонима устанавливается в письме Де Моргана 26 августа 1853 г. его другу, Сэру Уильяму Роуану Гамильтону (Graves 1889, с. 459), которого не следует путать с великим философским противником Де Моргана, Сэром Уильямом Гамильтоном:

Вижу, что Вы не заметили [в *Опыте* (1838)] […] *громадной ошибки по простейшему поводу. И вообще никто не заметил её, кроме меня самого. Я опубликовал язвительную заметку,*

направленную против недавнего автора[13]*, чтобы доказать, что я первым обнаружил её*.

Гамильтон, как оказывается, тоже не смог заметить ошибки Де Моргана, поскольку через две недели попросил указать её. И вот ответ (Graves 1889, с. 461): *Моя громадная ошибка находится на с. 28.*

Итак, Де Морган обнаружил логическую ошибку, допущенную и Лапласом, и Пуассоном, и опубликовал заметку, в которой указал её, но вскоре сам допустил подобную же в своём *Опыте* (1838). Так что же представляла собой эта ошибка, и почему она была допущена?

Это было простым и обычным недосмотром в применении условной вероятности, и (Де Морган 1837b, с. 424) указал, что Лаплас (1812, с. 279)[14], и Пуассон (1837, § 83, с. 209*)*

По существу предположили, что вероятность уравнения $\varphi(x, y) = a$*, в котором x задан, а y подразумевается, не изменится, если y задано, а x подразумевается*.

Иными словами, при заданных событиях X и У они заключили, что вероятность X при заданном У равна вероятности У при заданном X. Для исправления этого недосмотра Де Морган опубликовал заметку (1837b) с математическим анализом. Ирония, как он заметил, состояла в том, что не позже, чем через год, он сам в двух местах допустил аналогичную *громадную ошибку*. Более того, его ошибка была того же вида, которую очень часто допускают новички в теории вероятностей.

[Следует не очень понятное описание условия задачи, решение которой приводит к уравнению (Де Морган 1837a), уже выведенному и Лапласом (1812/1886, с. 261), и Пуассоном (1837, § 110). Мы приведём его по Пуассону: если все значения некоторой величины A в границах от нуля до $2g$ равно возможны и невозможны вне их, то

$$P = \frac{1}{\mu!}[\beta^\mu - \mu(\beta-1)^\mu + C_\mu^2(\beta-2)^\mu - C_\mu^3(\beta-3)^\mu + \ldots$$

$$- \alpha^\mu + \mu(\alpha-1)^\mu - C_\mu^2(\alpha-2)^\mu + C_\mu^3(\alpha-3)^\mu - \ldots]$$

оказывается вероятностью того, что при μ испытаниях сумма значений A заключена между $2g\alpha$ и $2g\beta$. Ряды продолжаются до тех пор, пока величины, возводимые в степень μ, остаются положительными.]

Де Морган применил свою формулу к астрономической задаче, которая служила примером у Лапласа [и Пуассона]. Считая, что число планет, исключая Землю, но причисляя к ним известные в

то время астероиды, равно 10, поскольку Нептун был открыт только в 1846 г., а Плутон – в 1930 г.[15], он (1837a, с. 412) рассматривал наклонения плоскостей планетных орбит относительно эклиптики и заявил, что

Наклонения так малы, что их сумма составила всего 91,4187 *градов* [град = 1/400 окружности], *т. е. меньше, чем могло быть одно из них, если бы планетные орбиты были наклонены случайно*.

Пусть все значения наклонений равно вероятны; какова тогда вероятность того, что их сумма была бы менее 92 градов, спрашивает Де Морган. Учитывая только первый член указанной формулы, он получает вероятность, равную

$$\frac{1}{10!}[\frac{92}{100}]^{10} \approx 0,00000012.$$

Но, продолжал Де Морган, если наклонения были определены какой-либо *причиной*, т. е. если случайности не было, указанная вероятность равнялась бы единице. Поэтому (Де Морган 1837a, с. 412) существует соотношение шансов 1:0,00000012 ≈ 10^7:1 в пользу существования причины при образовании солнечной системы, и в соответствии с ней наклонности таковы, каковы они и есть в действительности.

Аналогичное обсуждение, но менее математическое и более философское, содержится в другом источнике (Де Морган 1838, гл. 1). Начиная обсуждение вероятностей, Де Морган высказался против того, что эта тема способствует безбожию. Его основным примером было более популярное рассмотрение параметров планетных орбит. Он рассмотрел и их наклонности, как описано выше, и общность направления движения планет вокруг Солнца, и попытался определить правдоподобие существования соответствующей созидающей силы или замысла (Де Морган 1838, с. 27):

Считая достоверным, что эти явления произошли по замыслу, если он существовал, […] *мы рассмотрим, какова была бы надежда на осуществление подобного стечения обстоятельств при действии одного только слепого случая*.

Он начал с установления вероятности того, что 11 планет вращаются вокруг Солнца в одном и том же направлении. Возможных направлений только два, и выведенная им вероятность равнялась $1/2^{11}$ = 1/2048. Соотношение шансов против чисто случайных направлений движения составляла 2047:1. Далее Де Морган определяет вероятность того, что сумма наклонений 10 планет относительно эклиптики менее 92 градов. Как указано выше, соотношение шансов против действия одного только слепого случая равнялось 10^7:1.

Затем Де Морган (1838, с. 27) вычисляет вероятность совмещения этих двух (независимых) событий. Она равна

$$\frac{1}{2048}\cdot\frac{1}{10!}[\frac{92}{100}]^{10}\approx 0,000000000058,$$

т. е. соотношение шансов против действия слепого случая более, чем 20 000 000 000:1.

Поэтому существует та же степень вероятности, что при образовании солнечной системы действовало что-то, не являющееся случаем (с. 27 – 28).

И он заключает (с. 28), что

Что-то объединяет различные и независимые расположения, чтобы добиться того, что не может быть ceteris manentibus произведено помимо этого [не может оставаться никаких других], *что должно быть присоединено к понятию провидения, разумного или нет, поскольку оно требуется в качестве первопричины.*

Он неверно решил, что наверняка существовала (или существует) какой-то замысел или какая-то причина, которые привели к нынешнему очертанию солнечной системы.

Дойдя до этого заключения, Де Морган фактически совершил две ошибки, хотя одна из них была гораздо менее серьёзна, чем другая[16]. Менее серьёзная содержалась в начальных предпосылках (1838, с. 26):

Пусть для определённости мы принимаем за доказанное такое предположение, соотношение шансов в пользу которого составляет сто миллионов к одному.

Другими словами, если предложение X имеет вероятность 100 000 000/100 000 001 или более высокую, то Де Морган будет считать, что *p*(X) = 1. Но тогда надо будет считать, что предложение У с вероятностью 1/100 000 001 или более низкой имеет *p*(У) = 0[17].

Но эту небольшую неточность можно, пожалуй, объяснить тем, что он писал для неспециалистов. Вторая ошибка, однако, была намного серьёзнее. Мы видели, что Де Морган предположил, что если существовала соответствующая причина или замысел, вероятность выравнивания плоскостей планетных орбит была бы равна единице:

p(орбиты таковы, каковы они и есть/замысел был) = 1.

Затем он выводил вероятность выравнивания при отсутствии замысла. Соотношение шансов против выравнивания оказалось равным 20 000 000 000:1, т. е. вероятность этого события была равна нулю:

p(орбиты таковы, каковы они и есть/замысла не было) = 0.

И он заключает, что

p(замысла не было/орбиты таковы, каковы они и есть) = 0.

Он, стало быть, допустил тот же логический промах, что и Лаплас и Пуассон, поскольку невольно предположил, что p(Х/У) = p(У/Х)[18]. Hailperin (1986, с. 355 – 359) обсуждает аналогичную ошибку. Фактически логика Де Моргана такова:

Если замысел или необходимая причина существовала, планетные орбиты были бы выравнены как сейчас; но они действительно выравнены, поэтому замысел или необходимая причина существовала.

Такова была *громадная ошибка* Де Моргана.

6. Выводы

Публикация *Формальной логики* (1847) фактически обозначила начало нового периода в карьере Де Моргана как логика. В частности, весьма различные отклики на неё, и положительные (например, Буль), и отрицательные (например, Гамильтон), подпитывали его исследования в течение последующей четверти века. Отрицательная реакция на его первую статью (1846) и *Формальную логику* склонили Де Моргана подправить и разработать свою систему, и многие его дальнейшие логические исследования […] было стимулированы необходимостью отвечать на различные критические замечания Гамильтона и выдающихся последователей его философии, как, например, H. L. Mansel и T. S. Baynes. Только в одной из его позднейших публикаций по логике (1860a) он не ссылался на свой длительный спор со школой Гамильтона.

И среди этих позднейших публикаций только одна (1850) в какой-то мере рассматривала теорию вероятностей. В другом случае Де Морган (1860b, с. 67 – 72), правда, тоже упомянул теорию вероятностей, но эта публикация была обзором его работ и поэтому не содержала ничего нового. И даже здесь, в 1850 г., он (с. 116 – 125) поместил это обсуждение в последнем, независимом разделе, *Приложение теории вероятностей к некоторым обстоятельствам, относящимся к свидетельским показаниям*. Этот раздел не был связан с предыдущей частью статьи, и написал его Де Морган на несколько месяцев раньше остального текста, да и был он вначале задуман как совершенно отдельная заметка (Де Морган 1850, с. 116 прим.).

Таков был последний случай, в котором Де Морган рассматривал математическую вероятность в статье о логике. Если исходить из этого обстоятельства, то можно сказать, что вероятность почти отсутствовала в его соответствующих трудах. И возможно по этой причине применение Де Морганом ни теории вероятностей в логике, ни философии логического фундамента вероятности почти или совсем не повлияло на последующих логиков. К примеру, труд его бывшего студента Джевонса о логике никак не был связан с работами его бывшего учителя, и почти целиком сосредоточился на подходе Буля (Grattan-Guinness 2000, с. 56 – 60, 62 прим.). Только Венн подробно сослался на пересечение логики и вероятности у Де Моргана, но лишь для того, чтобы подточить его субъективный взгляд на вероятность (Venn 1962, с. ix, 119 прим., 122 – 123). Быстрая замена

логической системы Де Моргана на системы Буля и его последователей привела к её незамедлительному забвению. Keynes (1921) была последней найденной мной работой, в которой Де Морган упоминается как вероятностник.

Но почему Де Морган не продолжил применять вероятность в своих логических изысканиях? Это интересный, но трудный вопрос. Рассматривая постепенное развитие его логической системы, Panteki (1992, с. 428) заметила, что существующие свидетельства недостаточны для объяснения того, что она описывает как *медленную и своеобразную эволюцию его рассуждений*.

Самое очевидное разумное объяснение отсутствия теории вероятностей в позднейших трудах Де Моргана по логике состоит, видимо, в том, что его внимание просто направилось на другие проблемы. Всего заметнее, что, поскольку большинство его работ после 1847 г. имело целью ответить на критику Гамильтона, Mansel и других, его исследования по необходимости обратились в намного более отвлечённое и философское направление по сравнению с его первоначальными и более математическими вылазками. В результате, в течение 1850-х годов логика Де Моргана стала менее арифметической по характеру и намного более озабоченной общими предложениями, чем конкретными вычислениями.

И на самом деле он затратил столько усилий в своих ранних работах по силлогизму о вероятностях и количественно определённых предложениях, что, его редкое возвращение к этой теме после 1850 г. может показаться нелепым. Но в своей второй и последней книге о логике он (1860b, с. 29) пояснил возможную причину этого видимого пренебрежения темой, на которой прежде настолько сосредоточивался:

Силлогизмы, относящиеся к численно определённым величинам, редко или вообще никогда не встречаются в обычных размышлениях.

И в другом месте (Де Морган 1858, с. 206) мы находим следующее:

Нет никакой пользы от арифметически определённых силлогизмов. Таково почти единодушное мнение.

Итак, хоть он всё ещё считал, что его примеры количественного и вероятностного рассуждения совершенно справедливы теоретически, он понял, что практически они вряд ли окажутся полезными.

Другая возможная причина, по которой он перестал применять вероятность в своей логике, состоит в присущей трудности и сложности этой темы, о чём ему было хорошо известно и к чему, как мы видели, он был восприимчив. Действительно, упомянутая выше ошибка в вероятностном рассуждении не была единственной; другую указал Todhunter (1865, с. 557)[19].

В ранние 1850-е годы он живо переписывался с Булем об этой теме, и Буль задал ему сложный вопрос[20] об установлении вероятности события E по сведениям о вероятностях независимых или зависимых событий E_1, E_2, …, E_n. Письма Де

Моргана того периода не сохранились, но из ответа Буля становится ясно, что его решения были ошибочными. В одном из писем в августе 1851 г. Буль написал (Smith 1982, с. 50):

Я также благодарен Вам за решение этой задачи, которое, я полагаю, ошибочно.

Буль привёл пример, показывающий, что из решения Де Моргана последует бессмысленная вероятность, равная 1 1/3 (там же, с. 51)[21]. Возможно, что осознание практических трудностей, связанных с применением вероятности в логических умозаключениях в сочетании со сравнительной лёгкостью ошибок привели Де Моргана к отказу от подобных применений в последующей работе.

Интерес Буля к теории вероятностей также произошёл от его работе в логике (Hailperin 1986) и видимо возник в поздние 1840-е годы, частично, как можно предположить, от чтения соответствующих работ Де Моргана. В письме 1851 г. он даже похвалил Де Моргана:

Я нигде не видел основных положений теории [вероятностей] *изложенных лучше, чем в Вашей небольшой книжке* (Де Морган (1838) – А. Р.), которую я впервые недавно просмотрел, и в статье Донкина (Донкин (1851) – А. Р.) (там же, с. 52).

Первоначальные работы Буля по логике содержали очень немного вероятностного, но существенная часть его монументальной работы (1854, с. 243 – 398) была посвящена теории вероятностей, и его интерес к этой дисциплине не снизился в течение 1850-х и начала 1860-х годов.

Напротив, в течение 1850-х годов интерес Де Моргана к теории вероятностей видимо снижался. Опубликованная переписка Буля с Де Морганом показывает, что, хоть они трудились в родственных областях, их интересы редко в точности совпадали, и ясно, что к 1851 г. Буль более сосредоточился на применении теории вероятностей в логике, чем Де Морган. Возможно даже, что, как свидетельствует неспособность Де Моргана удовлетворительно ответить на вопрос Буля, он мог придти к мысли о превосходстве Буля. Во всяком случае, он несколько раз выражал своё восхищение трудами Буля по логике.

В энциклопедической статье 1861 г. о логике [в библиографии таких статей две] Де Морган (1966, с. 255) заявил, что

Обобщение форм логики, проведённое Булем, намного более смелое и самое оригинальное из всего, что нам следует рассмотреть.

Вскоре после смерти Буля в 1864 г. он указал, что из нескольких *общеизвестных работников* в области логики и математики *Буль добился намного более поразительных результатов* (Smith 1982, с. 119). Напротив, он (1850, с. 79) полагал, что в его собственных методах

Нет ничего общего с методами профессора Буля. Его манера рассмотрения форм логики наиболее достойна внимания всех, кто способен изучать эту науку математически. Он наверняка займёт выдающееся место в окончательной системе логики.

Исследуя труды Де Моргана по связям логики и алгебры, Panteki (1992, с. 490) могла бы с таким же успехом описывать его работу по логике и теории вероятностей, когда заметила, что

Де Морган видимо уловил дополнительную близость между этими двумя науками по сравнению с обсуждением (в 1850 г., А. Р.), *но должен был почувствовать неспособность справиться с ней ввиду трудности этой задачи и своих неважных технических методов*[22].

И поэтому правдоподобно, что он решил сосредоточиться на тех сторонах логики, в которых уютно чувствовал себя, а не на тех, где (например, на связях с вероятностью) он скорее столкнулся бы с трудностями и допустил ошибки.

Видимо кратчайший ответ на наш вопрос можно отыскать в простом замечании 1853 г. самого Де Моргана. В письме Гамильтону он (Graves 1889, с. 459) сжато выразил своё тогдашнее отношение к теории вероятностей, и если понимать его замечание в духе обсуждения, приведённого выше, мы скажем, что он разумно выразил своё позднейшее пренебрежение этой дисциплиной:

В теории вероятностей временами ошибается каждый, и притом сильно.

Признательность. Автор желает поблагодарить Джона Доусона, Юджина Сенету, Стефана Стиглера, анонимного рецензента и ментора моей докторской диссертации Айвора Граттан-Гиннеса за различные комментарии и предложения по поводу прежнего варианта этой статьи. Он также с благодарностью признаёт финансовую поддержку грантом Rashkind Research из колледжа Randolph-Macon.

Примечания

1. Ввиду растянутого характера этого источника точные даты статей из него часто путают. В течение почти 30 лет всего своего существования, с 1817 г. и до 1845 г. присылаемые статьи часто публиковались отдельно. Работа Де Моргана о вероятности впервые появилась в 1837 г., но её часто относили к 1845 г., когда её окончательно сброшюровали вместе со статьями других авторов.

2. Де Морган никак не мог *полностью* изложить лапласову *Аналитическую теорию*. Действительно, что же тогда могло содержаться в десятках позднейших комментариях? Назовём хотя бы Todhunter (1865), Molina (1930) и Hald (1998). То же нелепое утверждение ранее высказал Stigler (1986, с. 157).

3. Без подобных, якобы, мелочей, от математики ничего не останется.

4. Это утверждение крайне сомнительно: Де Морган обнаружил семь ошибок у Лапласа?

5. Математическая статистика фактически родилась у Фишера. До него существовала биометрическая школа Пирсона и *континентальное направление* статистики, начало которому положил Лексис.

6. Райс неверно указал дату публикации этой статьи. О его сообщении по существу см. в нашем общем комментарии.

7. См. Прим. 2.

8. Это утверждение неясно.

9. Последний вывод совпадает с положениями теории информации.

10. В 1844 – 1857 гг. Донкин опубликовал три или более статистические статьи, и математическим физиком в современном смысле он не был. Примерно в 1843 г. по предложению Пуассона, которое было вызвано административными причинами, в некоторых французских университетах были учреждены кафедры *исчисления вероятностей или математической физики* (Bru 1981, с. 87). Более того, на титульном листе книги Poincaré

(1896/1912) указано: *Курс факультета наук, Париж. Курс математической физики. Исчисление вероятностей*.

11. Де Морган верно причислил тогдашнюю, лапласову теорию вероятностей к прикладной математике. Предшественники Лапласа развивали эту теорию как область чистой математики, к которой она вернулась примерно в 1930 г.

12. Об этих трудностях писал Лаплас (1814, глава *Об иллюзиях в оценке вероятностей*).

13. Почему одного автора, а не их обоих?

14. К сожалению, автор оставил ссылку на первоначальное и редкое издание *Аналитической теории*.

15. По поводу Плутона ясности нет: его, возможно, причислят к карликовым планетам.

16. Ниже, в § 6, автор упомянет ещё одну ошибку, см. Прим. 19, но не укажет, что она не имела отношения к логике.

17. В отличие от автора мы не видим здесь никакой ошибки, ср. Прим. 18.

18. Вот аналогичное рассуждение (полная дизъюнкция), не связанное, правда, с вероятностями: обратная теорема Пифагора тоже верна, потому что, если $a^2 + b^2 = c^2$, то треугольник не может быть ни острым, ни тупым. Если же невозможность каждого из указанных двух вариантов формы треугольника имеет вероятность нуль, то обратная теорема Пифагора будет иметь место с вероятностью единица, т. е. всегда, потому что события с нулевой вероятностью могут происходить только в непрерывном случае. Мы заключаем, что ошиблись не Лаплас и Пуассон, а Де Морган (и Райс).

19. Тодхантер описал вывод Де Морганом простейшего варианта центральной предельной теоремы (теоремы Муавра – Лапласа по терминологии Маркова) и заметил, что он недостаточно аппроксимировал одно из выражений.

20. В описании автора эта задача не имеет смысла. Впрочем, она напоминает об утверждениях Чебышева (1845/1951, с. 29) и Буля (1851/1952, с. 251):

> Цель теории вероятностей – определение вероятности события, связанного с другими событиями, вероятность которых известна.
>
> *Цель теории вероятностей можно выразить так: По данным вероятностям любого предложения определить вероятность другого предложения*.

21. См. общий комментарий.

22. Вот подходящее место из § 1 статьи:

> Ввиду ограничения темы своего исследования Panteki не обсуждала применение теории вероятностей в логике у Де Моргана, но упомянула (с. 426), что он предложил заменить *прежнее учение о модалях количественной теорией вероятностей.* Заметим ещё, что Райс не сослался на английский перевод 1969 г. книги Стяжкина (1967).

Библиография автора

Boole G. (1854), *Investigation of the Laws of Thought.* London.

De Morgan A. (1837a), Theory of probabilities. *Enc. Metropolitana*, Pure Scence, vol. 2. London, pp. 393 – 490.

--- (1837b), On a question in the theory of probabilities. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 6, pp. 423 – 430.

--- (1837c), Anonymous review of Laplace (1812/1820). *Dublin Rev.*, vol. 2, pp. 338 – 354; vol. 3, pp. 237 – 248.

--- (1838), *An Essay on Probabilities and on Their Application to Life Contingencies and Insurance Offices.* London.

--- (1846), On the structure of the syllogism and on the application of the theory of probabilities to questions of argument and authority. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 8, pp. 379 – 408.

--- (1847), *Formal Logic, or, the Calculus of Inference, Necessary and Probable* London.

--- (1850), On the symbols of logic, the theory of the syllogism […] and the application of the theory of probabilities to some questions of evidence. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 9, pp. 9 – 127.

--- (1858), On the syllogism III and on logic in general. Там же, vol. 10, pp. 173 – 230.

--- (1860a), On the syllogism IV and on logic of relation. Там же, vol. 10, pp. 331 – 358.

--- (1860b), *Syllabus of a Proposed System of Logic*. London.

--- (1861a), Probability, theory of. *English Cyclopedia*, vol. 6, cols 769 – 780.

--- (1864), On the theory of errors of observation. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 10, pp. 409 – 427.

--- (1966), *On the Syllogism and Other Logical Writings*. London. Редактор P. Heath.

De Morgan Sophia Elizabeth (1882), *Memoir of Augustus De Morgan*. London.

Donkin W. F. (1851), On certain questions relating to the theory of probabilities. *London, Dublin and Edinb. Phil. Mag*., ser. 4, vol. 1, pp. 353 – 368, 458 – 466.

Grattan-Guinness I. (2000), *The Search for Mathematical Roots, 1870 – 1940: Logic, Set Theories and the Foundation of Mathematics* […]. Princeton.

Graves R. P. (1889), *Life of Sir William Rowan Hamilton*, vol. 3. Dublin.

Hailperin T. (1986), *Bool's Logic and Probability*, второе издание. Amsterdam.

--- (1996), *Sentential Probability Logic*. Bethlehem.

Keynes J. M. (1921), *Treatise on Probability*. London.

Laplace P. S. (1812), *Théorie analytique des probabilités*. *Oeuvr. Compl*., t. 7. Paris.

Panteki M. (1992), *Relationships between Algebra, Differential Equations and Logic in England : 1800 – 1860*. Middlesex Univ. Диссертация.

Poisson S.-D. (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements* […]. Paris, 2003. **S, G,** 52.

Smith G. C. (1982), *The Boole – De Morgan Correspondence 1842 – 1864*. Oxford.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Venn J. (1962), *The Logic of Chance*. New York. Четвёртое издание.

Библиография переводчика

Стяжкин Н. И. (1967). *Формирование математической логики*. М.

Чебышев П. Л. (1845), Опыт элементарного анализа теории вероятностей. *Полн. собр. соч.*, т. 5. М. – Л., 1951, с. 26 – 87.

Шейнин О. Б., Sheynin O. (2015), Cluster of anniversaries II. *Math. Scientist*, vol. 40, pp. 1 – 6.

Boole G. (1851), On the theory of probabilities. В книге автора *Studies in Logic and Probability*, vol. 1. London, 1952, pp. 247 – 259.

Bru B. (1981), Poisson, le calcul des probabilités et l'instruction publique. В книге *Poisson et la science de son temps.* Paris. Редактор M. Métivier и др.

Hald A. (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York.

Laplace P. S., Лаплас П. С. (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей*. В книге Прохоров Ю. В., редактор (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энц*. М., с. 834 – 863.

Molina E. C. (1930), The theory of probability. Some comments on Laplace's *Théorie analytique*. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, pp. 369 – 392.

Poincaré H. (1896), *Calcul des probabilités*. Paris, 1912, 1923, 1987.

Rice A., Seneta E. (2005), De Morgan in the prehistory of the statistical hypothesis testing. *J. Roy. Stat. Soc*., vol. A168, pp. 615 – 627.